REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO
Plan. W. 34

MÉMOIRES
DONNÉS
À L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES,
NON-IMPRIMÉS DANS LEUR TEMPS.

Par M. FONTAINE, de cette Académie.

ACCADEMIA
DELLE SCIENZE
DI TORINO

A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

M. DCCLXIV.

MÉMOIRES

DE L'

ACADÉMIE ROYALE

DES SCIENCES.

POUR L'ANNÉE 1740.

Par M. FONTAINE, de cette Académie.

A PARIS,

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

TABLE

Des Mémoires contenus dans ce Volume.

Nouvelle Méthode de Maximis *&* Minimis. Page 1

Détermination de la Courbe de la moindre action. 6

Détermination de la Courbe que doit embraſſer un angle donné, pour que, l'embraſſant toujours, ſon ſommet puiſſe tracer une courbe donnée.

Détermination des Courbes qui ſe développent elles-mêmes.

L'on a réſolu ces deux Problèmes, en conſidérant les Courbes en elles-mêmes, ſans les rapporter à aucune ligne droite, ni à aucun point, comme l'on fait toujours; l'on a cherché une équation entre un arc quelconque de la courbe & la courbure de cet arc: la courbure d'un arc eſt l'angle que fait la tangente à ſon extrémité avec la tangente à ſon origine. 7

Solution du Problème des Courbes Tautochrones. 15

Le Calcul intégral. Première méthode.

Ceux qui continueront l'Hiſtoire du calcul de M. *Wallis*, doivent regarder tout ce qui eſt contenu dans ce Mémoire-ci comme auſſi connu des Géomètres de l'Europe, depuis la fin de 1738, que s'il avoit été imprimé alors. Le premier Théorème qui en eſt le fondement, a été trouvé auſſitôt après la ſolution du Problème des Tautochrones, & eſt une ſuite de la méthode de cette ſolution. Lorſque M. *Nicole* lut à l'Académie le Mémoire qui a pour titre: *Uſage des ſuites pour la ſolution de certains Problèmes*, qui ſeroient impoſſibles

ſans cela, j'en donnai auſſitôt à l'Académie une ſolution par le moyen de ce Théorème; quelqu'un a fait mettre depuis peu cette ſolution dans un des Volumes des *Savans étrangers*. Comme la manière que j'ai imaginée de différencier les fonctions indéterminées, eſt d'un grand uſage, non-ſeulement ici, mais encore dans beaucoup d'autres recherches, & qu'elle peut faciliter les découvertes; pour la rendre familière tout d'un coup, je vais en mettre ici un exemple.

Soit μ une fonction de pluſieurs variables x, y, z, u, &c.

on aura $d\mu = \frac{d\mu}{dx}dx + \frac{d\mu}{dy}dy + \frac{d\mu}{dz}dz + \frac{d\mu}{du}du +$ &c.

$$\frac{ddμ}{dx} = \frac{ddμ}{dx^2}dx + \frac{ddμ}{dxdy}dy + \frac{ddμ}{dxdz}dz + \frac{ddμ}{dxdu}du + \text{&c.}$$

$$\frac{ddμ}{dy} = \frac{ddμ}{dxdy}dx + \frac{ddμ}{dy^2}dy + \frac{ddμ}{dydz}dz + \frac{ddμ}{dydu}du + \text{&c.}$$

$$\frac{ddμ}{dz} = \frac{ddμ}{dxdz}dx + \frac{ddμ}{dydz}dy + \frac{ddμ}{dz^2}dz + \frac{ddμ}{dzdu}du + \text{&c.}$$

$$\frac{ddμ}{du} = \frac{ddμ}{dxdu}dx + \frac{ddμ}{dydu}dy + \frac{ddμ}{dzdu}dz + \frac{ddμ}{du^2}du + \text{&c.}$$

$$\frac{dddμ}{dx^2} = \frac{dddμ}{dx^3}dx + \frac{dddμ}{dx^2dy}dy + \frac{dddμ}{dx^2dz}dz + \frac{dddμ}{dx^2du}du + \text{&c.}$$

$$\frac{dddμ}{dxdy} = \frac{dddμ}{dx^2dy}dx + \frac{dddμ}{dxdy^2}dy + \frac{dddμ}{dxdydz}dz + \frac{dddμ}{dxdydu}du + \text{&c.}$$

&c.

Cette expreſſion-ci $\frac{1}{dx} \cdot d\mu$ eſt donc bien différente de celle-ci $\frac{d\mu}{dx}$. La première ſignifie la différence de μ diviſée par dx; la ſeconde ſignifie le coëfficient de dx dans la différence de μ.

24.

Le Calcul intégral. Seconde méthode.

L'Introduction doit être lûe avec beaucoup d'attention; on y trouvera des choſes fondamentales, qui, quoique ſimples, n'avoient encore été vues de perſonne. Les commençans feront bien de s'exercer à former des intégrales, en donnant des valeurs

aux coëfficiens A, B, C, D, E, &c. en n; en n & en m; en n, en m & en l, &c. & à en déduire les équations différencielles, en différenciant ces intégrales autant de fois qu'il faudra pour pouvoir chaſſer les nombres arbitraires n, m, l, &c. on ne ſavoit point encore qu'une équation aux ſecondes différences a deux intégrales aux premières, qu'une aux troiſièmes en a trois aux ſecondes, &c. on ne ſavoit point que pour chaque intégrale d'une équation aux premières différences, il n'y a qu'une ſeule équation aux premières différences dont elle ſoit l'intégrale; que pour l'intégrale d'une équation aux ſecondes différences, il n'y a qu'une ſeule équation aux ſecondes différences dont elle ſoit l'intégrale, & ainſi de ſuite; & réciproquement on ne ſavoit pas que la dernière intégrale, c'eſt-à-dire, l'intégrale finie d'une équation différencielle d'un ordre quelconque, eſt unique: une preuve qu'on ne le ſavoit pas, c'eſt que je ne le ſavois pas moi-même dix ans après avoir trouvé la première méthode. 84

Table pour intégrer les élemens qu'on nomme rationels, c'eſt-à-dire, dans l'expreſſion deſquels il n'entre aucun rádical.

Soit $X\dot{x}$ l'élément qu'il faut intégrer; X déſignant une fonction de p & de x. Soit s l'intégrale de cet élément, on aura $\dot{s} = X\dot{x}$. Soit la dimenſion de la fonction $X = e$, en faiſant $\dot{s} = p^e\dot{y}$, on aura $p^e\dot{y} = X\dot{x}$; donc $\dot{y} + \frac{-X}{p^e}\dot{x} = 0$. $\frac{-X}{p^e}$ eſt une fonction de dimenſion nulle de p & de x irréductible, c'eſt-à-dire, dont le numérateur & le dénominateur n'ont aucun facteur commun. Nous avons mis la lettre N pour déſigner le numérateur de cette fonction; je ſuppoſe qu'à ſon dénominateur le coëfficient du terme où eſt la plus haute puiſſance de x, eſt $= 1$; lorſqu'au moyen de la Table on aura y en p & en x, on aura $s = p^e y$. 236

Principes de l'art de réſoudre les Problèmes ſur le mouvement des corps.

Ceux qui écriront l'hiſtoire des Sciences, doivent regarder

ces principes-ci comme auſſi connus depuis 1739, que s'ils avoient été imprimés cette année-là. Celui ci, *dans le conflit de pluſieurs corps, quelle qu'en ſoit la cauſe, les changemens qui arriveront aux états de ces corps dans l'eſpace, ſeront tels que les forces qu'ils avoient pour s'y refuſer ſe ſeront vaincues mutuellement, ou auront été en équilibre*, ſur-tout, & tous ceux qu'il propoſe, furent donnés à l'Académie en 1739, & communiqués depuis à tous les Géomètres que j'ai rencontrés. 305

Nouvelle Méthode d'approximation pour la ſolution des Problèmes qui ſe réduiſent aux Quadratures. 370

Sur les Logarithmes. 387

Doutes ſur la Méthode d'approximation, dont M. Clairaut *s'eſt ſervi pour déterminer le mouvement de la Lune autour de la Terre, & autre route pour la ſolution de ce Problème.* 393

Sur le mouvement de la Lune autour de la Terre, d'après le ſyſtème de la Peſanteur. 404

Analyſe du Problème où il s'agit, par le moyen de trois obſervations, de déterminer dans le ſyſtème de M. Newton *la trajectoire d'une Comète, en ſuppoſant qu'elle ſe meut dans une ellipſe infiniment alongée ou dans une parabole.* 419

Solution d'un Problème ſur les Jeux de haſard. 429

L'Art de réſoudre les équations. 432

Extrait des Regiſtres de l'Académie Royale des Sciences.

Du 20 Décembre 1763.

MESSIEURS *d'Alembert* & *Bezout* qui avoient été nommés pour examiner un Ouvrage de M. FONTAINE, intitulé : *Mémoires donnés à l'Académie, & non imprimés dans leur temps*, en ayant fait leur rapport, l'Académie a jugé cet Ouvrage digne de l'impreſſion. En foi de quoi j'ai ſigné le préſent Certificat. A Paris, le vingt-trois Décembre mil ſept cent ſoixante-trois. *Signé* GRANDJEAN DE FOUCHY, *Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.*

MÉMOIRES

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.

NOUVELLE MÉTHODE pour la ſolution des Problèmes de Maximis & Minimis.

JE n'en étois encore qu'au Livre des *infiniment petits* de M. le Marquis de l'Hôpital, & je ne connoiſſois pas les méthodes de M. Jacques Bernoulli, de M. Taylor, &c. lorſque l'on me propoſa de trouver, entre deux points donnés ſur une ſurface courbe quelconque, la ligne la plus courte. Je réſolus ce problème par une méthode qui ſe trouve être plus ſimple & plus générale qu'aucune de celles qu'on a 1732.

données; je ne sais si on ne l'aura pas publiée quelque part, car elle est très-répandue: deux ou trois exemples connus la feront aussi bien entendre, que d'autres que je pourrois imaginer.

PREMIER EXEMPLE.

Soient A & B *(fig. 1)* deux points donnés dans un plan vertical: un corps M peut par sa pesanteur aller de A en B par une infinité de chemins; l'on demande celui le long duquel il faut le faire descendre pour qu'il arrive le plus vîte de A en B.

Je mène l'horizontale AC *(fig. 2)* & la verticale AD, & je suppose que $AMm\mu B$ est le chemin qu'il faut faire suivre au corps M, pour qu'il arrive en moins de temps de A en B.

Deux petits côtés quelconques Mm, $m\mu$ de la courbe $AMm\mu B$, feront donc parcourus plus vîte que ne le feroient deux autres petits côtés quelconques Mn, $n\mu$; sans quoi ce ne seroit pas $AMm\mu B$ qui seroit la ligne de la plus vîte descente, comme nous le supposons, mais ce seroit $AMn\mu B$.

Je vais chercher l'expression du temps que le corps M met à parcourir le petit côté Mm, plus l'expression de celui qu'il met à parcourir le petit côté $m\mu$, & la somme de ces deux expressions sera un *minimum*.

Des points M, m, μ, je mène à la verticale AD les perpendiculaires MP, mp, $\mu\pi$.

Je fais $\begin{cases} AP=x, Ap=x', A\pi=x'', x'-x=\dot{x}, x''-x'=\dot{x}', Mm=\dot{s}, m\mu=\dot{s}'. \\ PM=y, pm=y', \pi\mu=y'', y'-y=\dot{y}, y''-y'=\dot{y}'. \end{cases}$

Soit la force qui accélère les corps verticalement $=g$, cette force peut être regardée comme le résultat de deux autres, l'une dans la direction MQ perpendiculaire à Mm, & qui par conséquent n'a aucun effet le long de Mm, & l'autre dans la direction Mm que j'appelle f.

On aura $g:f::MG:QG::\dot{s}:\dot{x}$, donc $f=\frac{g\dot{x}}{\dot{s}}$.

Soit la vîtesse du corps au lieu $M=v$, & la vîtesse au

lieu $m = v + \dot{v}$, le temps qu'il emploiera à parcourir Mm, sera $= \frac{\dot{s}}{v}$; & par le principe que l'effet que produit une force qui agit continuellement, divisé par le temps qu'elle met à le produire, est sa mesure, on aura $\frac{g\dot{x}}{\dot{s}} = \frac{\dot{v}}{(\frac{\dot{s}}{v})}$ ou $g\dot{x} = v\dot{v}$; en intégrant & faisant que x & v soient $= 0$ en même temps, on aura $2gx = v^2$ ou $v = (V 2gx)$.

Par conséquent le temps de M en m est $= \frac{\dot{s}}{\sqrt{(2gx)}}$, & celui de m en μ est $= \frac{\dot{s}'}{\sqrt{(2gx')}}$.

On aura donc $\frac{\dot{s}}{\sqrt{(2gx)}} + \frac{\dot{s}'}{\sqrt{(2gx')}} =$ un *minimum*; donc $d(\frac{\dot{s}}{\sqrt{(2gx)}} + \frac{\dot{s}'}{\sqrt{(2gx')}}) = 0$, ou $d(\frac{\dot{s}}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{\dot{s}'}{x'^{\frac{1}{2}}}) = 0$.

Pour différencier réellement & avoir l'équation à la courbe, il faut observer qu'il n'y a que pm ou y' qui doive varier; car en faisant mouvoir le point m le long de pm, soit à droite, soit à gauche, on aura une infinité de chemins pour arriver de M en μ, parmi lesquels $Mm\mu$ sera celui qui sera parcouru le plus vîte de tous.

Nous avons $\dot{s}^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2$, & $\dot{s}'^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2$.

En différenciant & en ne faisant varier que y', nous aurons $d\dot{s} = \frac{\dot{y}\,dy'}{\dot{s}}$, & $d\dot{s}' = -\frac{\dot{y}'\,dy'}{\dot{s}'}$.

Reprenons à présent l'expression $d(\frac{\dot{s}}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{\dot{s}'}{x'^{\frac{1}{2}}}) = 0$; elle se changera en celle-ci, $\frac{\dot{y}\,dy'}{x^{\frac{1}{2}}\dot{s}} - \frac{\dot{y}'\,dy'}{x'^{\frac{1}{2}}\dot{s}'} = 0$; ou $\frac{\dot{y}'}{x'^{\frac{1}{2}}\dot{s}'} - \frac{\dot{y}}{x^{\frac{1}{2}}\dot{s}} = 0$, ou *Fluxion* $(\frac{\dot{y}}{x^{\frac{1}{2}}\dot{s}}) = 0$, dont la *Fluente* est $\frac{\dot{y}}{x^{\frac{1}{2}}\dot{s}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}$, que l'on trouvera être l'équation de la cycloïde.

EXEMPLE II.

Je suppose qu'ayant fixé l'un des bouts d'un fil en A, (*fig. 3*) & l'autre bout en B, l'on propose de trouver la courbe qu'il faut former avec ce fil sur le plan AMB, pour que l'espace qu'il renfermera avec la ligne AB, soit le plus grand possible.

Je regarde la chose comme faite, & prenant sur la courbe AMB, trois petits côtés quelconques consécutifs, $M\mu$, μm, $m\mu$, & des points M, μ, m, μ, menant à AB les perpendiculaires MP, μp, mp, $\mu\pi$, j'aurai la somme des trois espaces $MP p\mu$, μppm, $mp\pi\mu$ égale à un *maximum*, & celle des trois petits côtés $M\mu$, μm, $m\mu$, constante.

Je fais $\begin{cases} AP=x, Ap=\dot{x}, A\pi=\dot{x}', \dot{x}'-\dot{x}=\ddot{x}, \dot{x}''-\dot{x}'=\ddot{x}', \\ PM=y, pM=\dot{y}, pm=\dot{y}', \pi\mu=\dot{y}'', \dot{y}'-\dot{y}=\ddot{y}, \ddot{y}'-\dot{y}=\ddot{y}', \end{cases}$
$\ddot{x}''-\dot{x}''=\ddot{x}'', M\mu=\dot{s}, \mu m=\dot{s}', m\mu=\dot{s}''.$
$\ddot{y}''-\dot{y}''=\ddot{y}''.$

J'aurai donc $d(y\dot{x}+\dot{y}'\dot{x}'+\dot{y}''\dot{x}'')=0$, & $d(\dot{s}+\dot{s}'+\dot{s}'')=0$.

Il faut observer qu'ici il n'y a que deux lignes qui doivent varier, qui sont $\dot{y}'$, $\dot{y}''$, & qu'en général, dans ces problèmes-ci, il faudra toûjours prendre un nombre de côtés, tel qu'il y ait autant d'ordonnées variables qu'il y aura de conditions à remplir : s'il y avoit trois conditions à remplir, il faudroit prendre quatre petits côtés ; on auroit cinq ordonnées, & par conséquent trois variables, savoir, les trois du milieu, les deux extrêmes devant toûjours nécessairement être constantes.

Pour remplir les deux conditions précédentes, considérons que $\dot{s}^2=(x'-x)^2+(y'-y)^2$, $\dot{s}'^2=(x''-x')^2+(y''-y')^2$, $\dot{s}''^2=(x'''-x'')^2+(y'''-y'')^2$, que par conséquent $d\dot{s}=\frac{\dot{y}\,d\dot{y}}{\dot{s}}$ $d\dot{s}'=\frac{\dot{y}'\,d\dot{y}''}{\dot{s}'}-\frac{\dot{y}'\,d\dot{y}'}{\dot{s}'}$ $d\dot{s}''=-\frac{\dot{y}''\,d\dot{y}''}{\dot{s}''}$, & qu'ainsi nous aurons $\dot{x}'\,d\dot{y}'+\dot{x}''\,d\dot{y}''=0$, & $-\text{flux.}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{s}}\right)d\dot{y}'-\text{flux.}\left(\frac{\dot{y}'}{\dot{s}'}\right)d\dot{y}''=0$, ou $\frac{d\dot{y}''}{d\dot{y}'}=\frac{-\dot{x}'}{\dot{x}''}$,

& $\frac{dy''}{dy'} = \frac{-\text{flux.}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{s}}\right)}{\text{flux.}\left(\frac{\dot{y}'}{\dot{s}'}\right)}$, d'où nous tirerons $\frac{\text{flux.}\left(\frac{\dot{y}'}{\dot{s}'}\right)}{\dot{x}''}$

$= \frac{\text{flux.}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{s}}\right)}{\dot{x}}$ ou $\text{flux.}\left(\frac{\text{flux.}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{s}}\right)}{\dot{x}}\right) = 0$, ou $\text{flux.}\left(\frac{\text{flux.}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{s}}\right)}{\dot{x}}\right) = 0$;

donc en intégrant $\text{flux.}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{s}}\right) = \frac{\dot{x}}{a}$, & en intégrant de rechef

$\frac{\dot{y}}{\dot{s}} = \frac{x}{a} + m.$

DÉTERMINATION
de la Courbe de la moindre action.

1732. JE ſuppoſe que je me trouve placé dans un endroit où je ſois environné de corps qui faſſent ſur moi une impreſſion deſagréable: trouver le chemin par où je dois m'enfuir pour échapper, le plus qu'il eſt poſſible, à cette impreſſion.

Je ſuppoſe que je ſuis parti du point C, & que je me trouve actuellement en M (*fig. 4*); du point M je mène à une ligne AB la perpendiculaire MP, & je fais $AP = x$ $PM = y$. Soit F une fonction de x & de y, qui exprime l'impreſſion que je ſouffre au point M: ſi je fais un pas, $\dot{F}$ ſera l'impreſſion que je ſouffrirai au bout de ce pas, qui ſera moindre que F; par conſéquent $\dot{F} - F$ ou $\dot{F}$ ſera une quantité négative, & le pas $Mm = \dot{s}$ que j'ai fait, doit avoir été dirigé de façon que cette quantité ſoit un *maximum*. Je ſuppoſe $\dot{F} = e\dot{x} + f\dot{y}$; j'aurai $e\dot{x} + f\dot{y} =$ un *maximum*, donc $d(e\dot{x} + f\dot{y}) = 0$.

Pour exécuter cette condition, il faut obſerver que x, y & $\dot{s}$ ſont conſtans, & qu'il n'y a que $\dot{x}$ & $\dot{y}$ qui doivent varier; on aura donc $e\,d\dot{x} + f\,d\dot{y} = 0$.

Mais $\dot{x}^2 + \dot{y}^2$ étant conſtant, on aura $\dot{x}\,d\dot{x} + \dot{y}\,d\dot{y} = 0$; donc $\frac{d\dot{y}}{d\dot{x}} = \frac{-e}{f}$ & $\frac{d\dot{y}}{d\dot{x}} = \frac{-\dot{x}}{\dot{y}}$; donc l'équation de la courbe $CMmD$ ſera $e\dot{y} = f\dot{x}$.

PROBLÉME.

Trouver la Courbe que doit embraſſer un angle donné, pour que ſon ſommet puiſſe gliſſer le long d'une courbe donnée.

Nous aurons beſoin, pour réſoudre ce problème, des théorèmes ſur les ſinus & coſinus, que M. Euler a mis ſi à la mode : ils ont ſans doute été démontrés en beaucoup d'endroits ; mais comme je ne les connois que par des Livres où ils ne ſont pas démontrés, voulant m'en ſervir, j'ai trouvé auſſi court de me les démontrer à moi-même, que d'aller chercher ceux où ils le ſont.

LEMME.

a & b ſont deux angles quelconques ; on peut prendre la ſomme de ces deux angles, on peut en prendre la différence.

Il faut trouver les équations entre les ſinus, les coſinus de ces angles, de leur ſomme & de leur différence.

Je fais deux figures ; dans la première, les angles a & b ſont ajoûtés l'un à l'autre ; dans la ſeconde, l'angle b, que je ſuppoſe le plus petit, eſt retranché de l'angle a.

Par la *(fig. 6)* où $ACB = a$, $BCD = b$, on aura $\text{cof. } a : \text{ſin. } a :: \text{cof. } (a+b) : Dg = \frac{\text{ſin. } a \cdot \text{cof. } (a+b)}{\text{cof. } a}$, donc $gD = \text{ſin. } (a+b) - \frac{\text{ſin. } a \cdot \text{cof. } (a+b)}{\text{cof. } a}$; on aura $\text{cof. } a : 1 :: \text{cof. } (a+b) : cg = \frac{\text{cof. } (a+b)}{\text{cof. } a}$, donc $gd = \text{cof. } b - \frac{\text{cof. } (a+b)}{\text{cof. } a}$; & à cauſe des triangles ſemblables CBb, gDd, on aura $1 : \text{ſin. } a :: \text{ſin. } (a+b) - \frac{\text{ſin. } a \cdot \text{cof. } (a+b)}{\text{cof. } a} : \text{cof. } b - \frac{\text{cof. } (a+b)}{\text{cof. } a}$

ou $\text{cof. } b - \frac{\text{cof. } (a+b)}{\text{cof. } a} = \text{ſin. } a \cdot \text{ſin. } (a+b) - \frac{(\text{ſin. } a)^2 \text{ cof. } (a+b)}{\text{cof. } a}$

ou $\text{sin.}\ a \cdot \text{sin.}\ (a+b) + \text{cos.}\ a \cdot \text{cos.}\ (a+b) = \text{cos.}\ b$, & $1 : \text{cos.}\ a :: \text{sin.}\ (a+b) - \frac{\text{sin.}\ a \cdot \text{cos.}\ (a+b)}{\text{cos.}\ a} : \text{sin.}\ b$ ou $\text{cos.}\ a \cdot \text{sin.}\ (a+b) - \text{sin.}\ a \cdot \text{cos.}\ (a+b) = \text{sin.}\ b$.

Par la (*fig. 7*) où $ACB = a$, $ACD = b$, on aura $\text{cos.}\ b : \text{sin.}\ b :: \text{cos.}\ a : bf = \frac{\text{cos.}\ a \cdot \text{sin.}\ b}{\text{cos.}\ b}$, donc $fB = \text{sin.}\ a - \frac{\text{cos.}\ a \cdot \text{sin.}\ b}{\text{cos.}\ b}$; on aura $\text{cos.}\ b : 1 :: \text{cos.}\ a : ef = \frac{\text{cos.}\ a}{\text{cos.}\ b}$, donc $f\mathcal{C} = \text{cos.}\ (a-b) - \frac{\text{cos.}\ a}{\text{cos.}\ b}$;

& à cause des triangles semblables CDd, $fB\mathcal{C}$, on aura $1 : \text{sin.}\ b :: \text{sin.}\ a - \frac{\text{cos.}\ a \cdot \text{sin.}\ b}{\text{cos.}\ b} : \text{cos.}\ (a-b) - \frac{\text{cos.}\ a}{\text{cos.}\ b}$ ou $\text{sin.}\ a \cdot \text{sin.}\ b - \frac{\text{cos.}\ a \cdot (\text{sin.}\ b)^2}{\text{cos.}\ b} = \text{cos.}\ (a-b) - \frac{\text{cos.}\ a}{\text{cos.}\ b}$ ou $\text{sin.}\ a \cdot \text{sin.}\ b + \text{cos.}\ a \cdot \text{cos.}\ b = \text{cos.}\ (a-b)$, & $1 : \text{cos.}\ b :: \text{sin.}\ a - \frac{\text{cos.}\ a \cdot \text{sin.}\ b}{\text{cos.}\ b} : \text{sin.}\ (a-b)$ ou $\text{sin.}\ a\ \text{cos.}\ b - \text{cos.}\ a \cdot \text{sin.}\ b = \text{sin.}\ (a-b)$.

Nos deux premières équations peuvent se changer en ces deux-ci ..... $\begin{cases} \text{cos.}\ (a+b) = \text{cos.}\ a \cdot \text{cos.}\ b - \text{sin.}\ a \cdot \text{sin.}\ b. \\ \text{sin.}\ (a+b) = \text{sin.}\ a \cdot \text{cos.}\ b + \text{cos.}\ a \cdot \text{sin.}\ b. \end{cases}$

Les deux dernières sont $\begin{cases} \text{cos.}\ (a-b) = \text{sin.}\ a \cdot \text{sin.}\ b + \text{cos.}\ a \cdot \text{cos.}\ b. \\ \text{sin.}\ (a-b) = \text{sin.}\ a \cdot \text{cos.}\ b - \text{cos.}\ a \cdot \text{sin.}\ b. \end{cases}$

Au moyen de la 1.re & de la 3.me de ces quatre équations, on aura ces deux-ci, $\begin{cases} \text{sin.}\ a \cdot \text{sin.}\ b = \frac{1}{2}\ \text{cos.}\ (a-b) - \frac{1}{2}\ \text{cos.}\ (a+b); \\ \text{cos.}\ a \cdot \text{cos.}\ b = \frac{1}{2}\ \text{cos.}\ (a-b) + \frac{1}{2}\ \text{cos.}\ (a+b); \end{cases}$ & au moyen de la 2.me & de la 4.me on aura ces deux-ci, $\begin{cases} \text{sin.}\ a \cdot \text{cos.}\ b = \frac{1}{2}\ \text{sin.}\ (a+b) + \frac{1}{2}\ \text{sin.}\ (a-b). \\ \text{cos.}\ a \cdot \text{sin.}\ b = \frac{1}{2}\ \text{sin.}\ (a+b) - \frac{1}{2}\ \text{sin.}\ (a-b). \end{cases}$

C. Q. F. T.

Je suppose que l'angle a croît, & qu'il devient $a + \dot{a}$, l'on demande la différence de $\text{sin.}\ a$; on aura $d\,\text{sin.}\ a = \text{sin.}\ (a + \dot{a}) - a$: mais par l'un des théorèmes précédens, $\text{sin.}\ (a + \dot{a}) = \text{sin.}\ a \cdot \text{cos.}\ \dot{a} + \text{cos.}\ a \cdot \text{sin.}\ \dot{a} = \text{sin.}\ a + \dot{a}\ \text{cos.}\ a$, car $\text{cos.}\ \dot{a} = 1$ & $\text{sin.}\ \dot{a} = \dot{a} \cdot 1$; donc

donc d fin. $a = \dot{a}$ cof. a, l'on trouvera de la même manière que d cof. $a = -\dot{a}$ fin. a.

SOLUTION.

$AMmB$ (*fig. 8*) eſt la courbe donnée, & $sM\gamma$ l'angle donné, que je ſuppoſe avoir dans la figure, la poſition qu'il doit avoir lorſque ſon ſommet eſt arrivé en M.

Je fais le petit côté Mm de la courbe donnée $= dz$, l'angle de contingence $Tmt = dy$, l'angle donné $sM\gamma = a$, l'angle $TMs = A$; l'angle $TM\gamma$ ſera $= A + a$, l'angle $tm\sigma = A + dA$;

& on aura l'angle $M\sigma m = dy - dA$,

l'arc $MR = dz$ fin. A, $MR = dz$ cof. A;

donc $\sigma M = \frac{dz \text{ fin. } A}{dy - dA}$.

Soit le petit côté $s\sigma$ de la courbe que touche $Ms = ds$, l'angle de contingence qui lui correſpond $= dx$.

Le petit côté $\epsilon\gamma = ds'$, l'angle de contingence correſpondant $= dx'$,

on aura $dx = dy - dA$, $ds = d\left(\frac{dz \text{ fin. } A}{dy - dA}\right) - dz$ cof. A.

$$dx' = dy - dA,\ ds' = d\left(\frac{dz \text{ fin. } (A+a)}{dy - dA}\right) - dz \text{ cof. } (A+a).$$

L'équation entre dz, dy étant donnée, quelque fonction de z & de y que l'on prenne pour A, on aura l'équation entre ds, dx, comme auſſi celle entre ds', dx'.

Soit, par exemple, A conſtant;

on aura $dx = dy$, $ds =$ fin. $A\, d\left(\frac{dz}{dy}\right) - dz$ cof. A;

& ſi de plus A eſt droit,

on aura $dx = dy$ $ds = d\left(\frac{dz}{dy}\right)$, c'eſt-à-dire que l'équation d'une courbe entre dz & dy étant donnée, on aura celle de ſa développée entre ds, dx, & réciproquement.

A étant toûjours conſtant, ſi l'on veut que l'équation entre dz, dy, ſoit telle que la courbe touchée ſoit un point, on

aura $ds = o$, c'eſt-à-dire que l'équation à cette courbe ſera ſin. $A\,d\left(\frac{dz}{dy}\right) - dz$ cof. $A = o$.

Mais pour notre problème, l'équation entre dz, dy étant donnée, il faut que A ſoit tel que l'équation entre $ds'\,dx'$ ſoit la même que celle entre ds, dx.

Soit $A = \alpha - \frac{1}{2}a$ & $A + a = \alpha + \frac{1}{2}a$,

on aura $\begin{cases} dx = dy - d\alpha,\ ds = d\left(\frac{dz \text{ ſin. } (\alpha - \frac{1}{2}a)}{dy - d\alpha}\right) - dz \text{ cof. } (\alpha - \frac{1}{2}a) \\ dx' = dy - d\alpha,\ ds' = d\left(\frac{dz \text{ ſin. } (\alpha + \frac{1}{2}a)}{dy - d\alpha}\right) - dz \text{ cof. } (\alpha + \frac{1}{2}a) \end{cases}$

ou $\begin{cases} dx = dy - d\alpha,\ ds = d\left(\frac{dz}{dy - d\alpha}\right) \text{ſin. } (\alpha - \frac{1}{2}a) + dz\left(\frac{d\alpha}{dy - d\alpha} - 1\right) \text{cof. } (\alpha - \frac{1}{2}a). \\ dx' = dy - d\alpha,\ ds' = d\left(\frac{dz}{dy - d\alpha}\right) \text{ſin. } (\alpha + \frac{1}{2}a) + dz\left(\frac{d\alpha}{dy - d\alpha} - 1\right) \text{cof. } (\alpha + \frac{1}{2}a). \end{cases}$

Soit $d\left(\frac{dz}{dy - d\alpha}\right) = M$, & $dz\left(\frac{2\,d\alpha - dy}{dy - d\alpha}\right) = N$,

on aura $\begin{cases} dx = dy - d\alpha,\ ds = M\left(\text{cof. } \frac{1}{2}a \text{ ſin. } \alpha - \text{ſin. } \frac{1}{2}a \text{ cof. } \alpha\right) + N\left(\text{ſin. } \frac{1}{2}a \text{ ſin. } \alpha + \text{cof. } \frac{1}{2}a \text{ cof. } \alpha\right) \\ dx' = dy - d\alpha,\ ds' = M\left(\text{cof. } \frac{1}{2}a \text{ ſin. } \alpha + \text{ſin. } \frac{1}{2}a \text{ cof. } \alpha\right) + N\left(-\text{ſin. } \frac{1}{2}a \text{ ſin. } \alpha + \text{cof. } \frac{1}{2}a \text{ cof. } \alpha\right) \end{cases}$

ou $\begin{cases} dx = dy - d\alpha,\ ds = (M \text{ſin. } \alpha + N \text{cof. } \alpha) \text{ cof. } \frac{1}{2}a + (-M \text{cof. } \alpha + N \text{ſin. } \alpha) \text{ ſin. } \frac{1}{2}a. \\ dx' = dy - d\alpha,\ ds' = (M \text{ſin. } \alpha + N \text{cof. } \alpha) \text{ cof. } \frac{1}{2}a + (M \text{ cof. } \alpha - N \text{ ſin. } \alpha) \text{ ſin. } \frac{1}{2}a. \end{cases}$

Déterminez α tellement que $-M$ cof. $\alpha + N$ ſin. $\alpha = o$, ou que $-M$ cof. $\alpha + N$ ſin. α ſoit un radical, & les deux courbes touchées auront évidemment la même équation. *C. Q. F. T.*

Au reſte, l'équation entre l'abſciſſe & l'ordonnée d'une courbe étant donnée, il ſera facile de trouver l'équation entre un arc de cette courbe & ſa courbure, & réciproquement.

Soit $Mm = dz$ (*fig. 9*) $Tmt = dy$, $MR = dx$, $Rm = du$; on aura, 1.° $dz^2 = dx^2 + du^2$; 2.° on aura $dx : du :: dx' : du' + \mu l$, ou $dx : dx' :: du : du' + \mu l$, ou $dx : ddx :: du : ddu + \mu l$, donc $\mu l = \frac{du\,ddx - dx\,ddu}{dx}$.

du centre m & du rayon $m\mu$ soit décrit le petit arc μn, on aura $dz : dx :: \frac{du\,ddx - dx\,ddu}{dx} : \mu n = \frac{du\,ddx - dx\,ddu}{dz}$;

donc $dz\,dy = \frac{du\,ddx - dx\,ddu}{dz}$.

L'équation entre x, u étant donnée, on aura par le moyen des deux équations précédentes celle entre z, y; & réciproquement l'équation entre z, y étant donnée, on aura celle entre x; u.

L'équation entre le rayon vecteur d'une courbe & l'angle que fait ce rayon vecteur avec une ligne donnée de position, étant donnée, il sera facile de trouver l'équation entre un arc de cette courbe & sa courbure, & réciproquement.

Soit $Mm = dz$ (*fig. 10*) $Tmt = dy$, $DCM = x$, $CM = v$; on aura $MR = v\,dx$, $RM = dv$; donc 1.° $dz^2 = v^2\,dx^2 + dv^2$;

2.° $v\,dx : dv :: v'dx' : dv' + \mu l$,

ou $v\,dx : v'dx' :: dv : dv' + \mu l$,

ou $v\,dx : v\,ddx + dv\,dx :: dv : ddv + \mu l$;

donc $\mu l = \frac{v\,dv\,ddx + dv^2\,dx - v\,dx\,ddv}{v\,dx}$; du centre m & du rayon $m\mu$ soit décrit le petit arc μn, on aura $dz : v\,dx :: \frac{v\,dv\,ddx + dv^2\,dx - v\,dx\,ddv}{v\,dx} : \mu n = \frac{v\,dv\,ddx + dv^2\,dx - v\,dx\,ddv}{dz}$;

donc $dz\,dy = \frac{v\,dv\,ddx + dv^2\,dx - v\,dx\,ddv}{dz}$.

L'équation entre x & v étant donnée, on aura par le moyen de ces deux équations celle entre z & y; & réciproquement l'équation entre z & y étant donnée, on aura celle entre x & v.

PROBLÉME.

Trouver les Courbes qui ſe développent elles-mêmes.

L'ÉQUATION à un point quelconque d'une courbe entre l'arc z & la courbure y de cet arc étant donnée, en allant, par exemple, de gauche à droite, trouver quelle ſera l'équation de cette même courbe, en allant de droite à gauche.

Je mène une tangente ATC *(fig. 11)* à la courbe à ſon origine A, enſuite je prends ſur cette courbe un arc quelconque AB, & je mène une autre tangente BD à l'extrémité B de cet arc, que je ſuppoſe rencontrer la première en T; l'angle BTC eſt ce que j'appelle la courbure de l'arc AB.

Soit $AB = a$, $BTC = c$, je marque un point quelconque M ſur l'arc AB, & faiſant $AM = z$, la courbure de $AM = y$, $BM = s$, la courbure de $BM = x$, j'aurai $s + z = a$, $x + y = c$; & par conſéquent $z = a - s$, $y = c - x$, $dz = -ds$, $dy = -dx$.

Il n'y aura donc qu'à ſubſtituer pour z, y, ces valeurs dans l'équation entre z & y, & on aura celle entre s, x.

Si l'équation entre z, y eſt ſans z & ſans y, on aura la même équation entre s, x, qu'entre z & y.

Si la développée eſt la même que la développante, l'équation à la développée ſera entièrement la même que celle de la développante, de quelque manière que la développée ſoit placée par rapport à la développante, pourvû qu'il n'entre que des différences dans l'équation à la développante.

Le problème où il s'agit de trouver les courbes qui ſe développent elles-mêmes, ſe réduit donc à trouver l'équation la plus générale qu'il ſoit poſſible d'avoir entre dz, dy & leurs différences, tellement que celle qu'on en déduira par le

moyen de ces deux équations-ci, $dx = dy$, $ds = d\left(\frac{dz}{dy}\right)$ entre ds, dx, soit la même que celle entre dz, dy.

Je suppose que AMB (*fig. 12*) est une courbe qui se développe elle-même; à un point quelconque M de cette courbe je mène le rayon de la développée MN, & au point N de la développée je mène le rayon de la seconde développée NQ; ou la courbe AMB se développe dans le même sens, c'est-à-dire, de manière que chaque point M se produit lui-même, ou elle se développe en sens contraire, c'est-à-dire, de manière que le point A donne le point B, le point B donne le point A, & qu'il n'y a que le point du milieu qui se donne lui-même.

Dans le premier cas, on aura $NQ = MN$; dans le second cas, toutes les lignes MQ seront égales & parallèles.

En général, $MN = \frac{dz}{dy}$, $NQ = \frac{d\left(\frac{dz}{dy}\right)}{dy}$; par conséquent, l'équation à la courbe qui se développe elle-même dans le même sens, est $\frac{dz}{dy} = \frac{d\left(\frac{dz}{dy}\right)}{dy}$ ou, en faisant dy constant, $dy\,dz = ddz$.

Pour avoir celle de la courbe qui se développe elle-même en sens contraire, je mène la petite ligne MR perpendiculaire à MQ, & Rm parallèle à MQ; & faisant $MR = dx$, $Rm = du$, j'aurai $dx : dz :: \frac{dz}{dy} : MQ = \frac{dz^2}{dx\,dy}$; par conséquent l'équation à cette courbe sera $\frac{dz^2}{dx\,dy} = m$.

Au lieu de cette équation, je veux en avoir une entre z & y seulement, & je me sers pour cet effet de ces deux équations-ci, $dz^2 = dx^2 + du^2$, $dz^2\,dy = du\,ddx - dx\,ddu$; j'aurai $dx = \frac{dz^2}{m\,dy}$, & en faisant dy constant, j'aurai $ddx = \frac{2\,dz\,ddz}{m\,dy}$; en substituant pour dx & ddx ces valeurs,

j'aurai $dz^2 = \frac{dz^4}{m^2 dy^2} + du^2$, & $dz^2\,dy = \frac{2\,dz\,ddz}{m\,dy}\,du - \frac{dz^2}{m\,dy}\,ddu$; en chaſſant du, j'aurai $dy^2\,dz^2 + ddz^2 = m^2\,dy^4$ pour l'équation à la courbe qui ſe développe elle-même en ſens contraire.

Maintenant, puiſque les courbes qu'expriment ces deux équations-ci, $dy\,dz = ddz$, $dy^2\,dz^2 + ddz^2 = m^2\,dy^4$, réſolvent le même problème, elles doivent avoir une équation commune qu'il s'agit de trouver.

En différenciant la ſeconde, j'aurai $dy^2\,dz + dddz = 0$.

En différenciant la première, j'aurai $dy\,ddz = dddz$, ou, en ſubſtituant pour ddz ſa valeur, $dy^2\,dz = dddz$.

Par conſéquent l'équation commune à nos deux courbes ſera $n\,dy^2\,dz = dddz$.

Vérifions ſi cette équation a la propriété que nous avons dit que devoit avoir celle de la courbe qui ſe développe elle-même, d'être telle que l'équation entre ds, dx ſera la même.

Il faut chaſſer dz, dy de ces trois équations-ci,

$$n\,dy^2\,dz = dddz,\ dx = dy,\ ds = \frac{ddz}{dy}.$$

En chaſſant d'abord dy, nous aurons $n\,dx^2\,dz = dddz$ & $dx\,ds = ddz$.

Je différencie cette dernière équation pour avoir $dddz$ à ſubſtituer dans l'autre ; j'aurai $dddz = dx\,dds$, donc $n\,dx\,dz = dds$.

Je différencie cette dernière équation pour avoir une ſeconde valeur de ddz, j'aurai $ddz = \frac{ddds}{n\,dx}$.

En égalant les deux valeurs de ddz, j'aurai $ndx^2\,ds = ddds$, c'eſt-à-dire, la même équation entre s & x, que celle entre z, y; par conſéquent cette équation-ci $n\,dy^2\,dz = dddz$ exprime toutes les courbes qui ſe développent elles-mêmes.

SUR LES COURBES TAUTOCHRONES.

LORSQUE j'entrai à l'Académie, l'Ouvrage que M. Jean Bernoulli lui avoit envoyé en 1730, qui eſt un chef-d'œuvre, venoit de paroître : cet Ouvrage avoit tourné l'eſprit de tous les Géomètres de ce côté-là, on ne parloit que du problème des Tautochrones; j'en donnai la ſolution que voici, & on n'en parla plus. 17 Février 1734.

Quoique cette ſolution ait été inſérée dans le volume de 1734, j'ai cru devoir la remettre ici, parce que tous les théorèmes qui vont me ſervir pour le calcul intégral y ſont cachés, & qu'elle eſt fort courte; l'on verra comment les idées ſe ſuccèdent les unes aux autres.

Par courbe tautochrone l'on entend une courbe dont tous les arcs, pris du point le plus bas, ſont deſcendus ou remontés dans des temps égaux.

Je diſtingue deux manières d'être tautochrone, parce que quoique dans quelques hypothèſes une même courbe le ſoit en même temps des deux, il doit y en avoir une infinité d'autres où elle ne pourra l'être que d'une ſeule.

On a la détermination de ces courbes pour quelques cas particuliers, mais on n'a point encore de méthode générale pour toutes les hypothèſes de peſanteur & de réſiſtance, & voici en quoi conſiſte la difficulté. Soit la courbe *AMM'B*, Fig. 13. on veut que cette courbe ſoit telle que tous ſes arcs *AM*, *AM'*, &c. ſoient parcourus en temps égaux, ſoit en montant, ſoit en deſcendant, ou plus généralement on veut que les temps ſoient comme une fonction donnée des arcs & des abſciſſes correſpondantes.

On voit d'abord que pour donner une origine fixe aux abſciſſes, il faut toûjours concevoir le corps partant de *A*, & que pour repréſenter la deſcente, au lieu que le milieu

retarde, il n'y a qu'à imaginer qu'il accelère; du reſte, naturellement on s'y prendroit ainſi : on commenceroit par déterminer la vîteſſe dans un point quelconque m de l'arc AM, pour avoir le petit temps de m en μ; ayant ce temps, on en prendroit la FLuente, & on auroit le temps de A en m, on ſubſtitueroit pour les lignes Am, Ap, les lignes AM, AP, & on auroit généralement pour toute courbe le temps de A en M, on égaleroit ce temps à la fonction donnée, & cette équation détermineroit la courbe $AMM'B$. Mais 1.° il n'y a que quelques hypothèſes où l'on puiſſe avoir l'expreſſion de la vîteſſe; 2.° quand bien même on auroit cette expreſſion, l'on ne pourroit pas intégrer l'élément du temps. Dans les cas où l'on peut avoir l'expreſſion de la vîteſſe, voyons ce que M.rs Newton & Bernoulli nous ont donné.

Soit, en premier lieu, le milieu ſans réſiſtance, & ſoit la force telle qu'on voudra; décrivez une courbe telle que la partie de cette force qui retardera le long de ſes petits côtés ſoit toûjours comme l'arc parcouru, cette courbe ſera tautochrone.

Car ſoit l'arc à parcourir $AM = X$, l'arc parcouru $Am = x$, l'arc que le corps parcourt actuellement $= \dot{x}$, la vîteſſe qu'a le corps en $m = y$, celle qu'il perd de m en $\mu = \dot{y}$, le temps total de A en $M = T$, le temps écoulé de A en $m = t$, le temps préſent $= \dot{t}$, & ſoit la force $= nx$, on aura $(-nx) \cdot \frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \dot{y}$, ou $nx\dot{x} + y\dot{y} = 0$; en intégrant & faiſant que y ſoit $= 0$, lorſque x deviendra $= X$, on aura $nx^2 + y^2 = nX^2$, donc $y = n^{\frac{1}{2}} (X^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, donc $\dot{t} = \frac{n^{-\frac{1}{2}}\dot{x}}{\sqrt{(X^2 - x^2)}}$ & $t = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} FL \left[\frac{\dot{x}}{\sqrt{(X^2 - x^2)}}\right]$; mais $FL \left[\frac{\dot{x}}{\sqrt{(X^2 - x^2)}}\right]$ eſt une fonction de dimenſion nulle de X & de x; donc ſi on avoit

avoit cette FLuente, & qu'on y fubſtituât X au lieu de x, on auroit T égal à une fonction de dimenſion nulle de X, c'eſt-à-dire, à un nombre conſtant.

Soit en ſecond lieu la réſiſtance du milieu $= \frac{y^2}{x}$, & ſoit la force égale à la gravité ordinaire $= g$, l'abſciſſe verticale $Ap = z$, on aura $(-\frac{g\dot{z}}{\dot{x}} \pm \frac{y^2}{n}) \cdot \frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \dot{y}$

ou $g\dot{z} \mp \frac{1}{n} y^2 \dot{x} + y\dot{y} = 0$,

ou $gC^{\mp\frac{2}{n}x} \cdot \dot{z} \mp \frac{1}{n} C^{\mp\frac{2}{n}x} \cdot y^2 \dot{x} + C^{\mp\frac{2}{n}x} y\dot{y} = 0$, (par C j'entends le nombre dont le logarithme eſt 1) ou $gFL\,(C^{\mp\frac{2}{n}x}\dot{z}) + \frac{1}{2} C^{\mp\frac{2}{n}x} \cdot y^2 = gFL\,(C^{\mp\frac{2}{n}X}\dot{Z})$;

donc

$$y = \sqrt{(2g)} \cdot C^{\pm\frac{1}{n}x} \cdot \sqrt{[FL(C^{\mp\frac{2}{n}X}\dot{Z}) - FL(C^{\mp\frac{2}{n}x}\dot{z})]}$$

$$\& \dot{t} = \frac{C^{\mp\frac{1}{n}x}\dot{x}}{\sqrt{(2g)} \cdot \sqrt{[FL\,(C^{\mp\frac{2}{n}X} \cdot \dot{Z}) - FL\,(C^{\mp\frac{2}{n}x} \cdot \dot{z})]}}.$$

Pour que T ſoit un nombre conſtant, je vais tâcher de ramener cette expreſſion de $\dot{t}$ à celle de $\dot{t}$ dans la ſolution de M. Newton; pour cet effet, je fais $C^{\mp\frac{1}{n}x}\dot{x} = m\dot{a}$ & $FL\,(C^{\mp\frac{2}{n}x}\dot{z}) = a^2$. J'intègre la première de ces deux équations en faiſant que x & a ſoient $= 0$ en même temps, j'aurai $\mp\, n\, C^{\mp\frac{1}{n}x} \pm n = ma$;

donc $a^2 = (\mp \frac{n}{m} C^{\mp\frac{1}{n}x} \pm \frac{n}{m})^2$.

Je mets pour a^2 ſa valeur dans la ſeconde, j'aurai

$FL\,(C^{\mp\frac{2}{n}x} \cdot \dot{z}) = (\mp \frac{n}{m} C^{\mp\frac{1}{n}x} \pm \frac{n}{m})^2$,

& en prenant les fluxions, j'aurai

$$C^{\mp\frac{2}{n}x}\cdot\dot{z} = 2\left(\mp\frac{n}{m}C^{\mp\frac{1}{n}x} \pm \frac{}{m}\right)\cdot\mp\frac{n}{m}\cdot\mp\frac{1}{n}C^{\mp\frac{1}{n}x}\cdot\dot{x};$$

$$\text{donc } \dot{z} = \pm\frac{2n}{m^2}C^{\mp\frac{1}{n}x}\cdot\dot{x} \mp \frac{2n}{m^2}\dot{x}.$$

Maintenant voici une méthode qui ne demande point qu'on ait l'expreſſion de la vîteſſe, & qui paroît générale pour tous les problèmes de ce genre; mais avant tout je dois avertir que comme j'ai été obligé, dans mes calculs, de faire varier les mêmes lignes de deux manières différentes, il a fallu que je déſigne leurs variations différemment: j'ai marqué les unes à la façon des Géomètres Anglois par des *fluxions*, les autres par des *différences*, à notre manière, en ſorte qu'ici dx ne ſera pas la même choſe que $\dot{x}$, $d\dot{x}$ que $\ddot{x}$, &c.

EXEMPLE I.

Dans l'hypothèſe de la gravité ordinaire & d'un milieu ſans réſiſtance, on demande que $T = \frac{X^m}{A^m}$. Soient ici les mêmes dénominations que précédemment, & ſoit de plus $\dot{z} = p\dot{x}$, $\dot{p} = q\dot{x}$, $\dot{q} = r\dot{x}$, &c. on aura

$$(-gp)\cdot\frac{\dot{x}}{y} = \dot{y}, \text{ ou } gp\dot{x} + y\dot{y} = 0.$$

Il faut à préſent faire en ſorte que lorſque x deviendra $= X$, $FL\left(\frac{\dot{x}}{y}\right)$ devienne $= \frac{X^m}{A^m}$.

Fig. 14. Pour cet effet, je prends ſur la courbe $AMM'B$ un autre arc AM' infiniment peu différent du premier, & je fais ce nouvel arc à parcourir $AM' = X'$, le temps pour le parcourir $T' = \frac{X'^m}{A^m}$, l'arc parcouru $Am' = x'$, la vîteſſe au point $m' = y'$, le petit arc $m'\mu' = \dot{x}'$, la vîteſſe que le corps perd de m' en $\mu' = \dot{y}'$, & on aura ici, comme

dans l'autre arc, $gp'\dot{x}' + y'\dot{y}' = 0$. Soit $X' - X = dX$, $x' - x = dx$, $y' - y = dy$, $\dot{x}' - \dot{x} = d\dot{x}$, $\dot{y}' - \dot{y} = d\dot{y}$, on aura $(gp'\dot{x}' + y'\dot{y}') - (gp\dot{x} + y\dot{y}) = d(gp\dot{x} + y\dot{y}) = 0$; donc $gpd\dot{x} + gq\dot{x}dx + ydy + \dot{y}dy = 0$. Je suppose $dx = \varphi dX$, & par φ j'entends une fonction de X & de x. Soit $\varphi = \gamma\dot{x}$, $\gamma = \lambda\dot{x}$, $\dot{\lambda} = \mu\dot{x}$, &c. donc $d\dot{x} = \gamma\dot{x}dX$. Pour avoir dy, je fais la proportion suivante, qui renferme les conditions du problème,

$FL\left(\frac{\dot{x}}{y}\right) : FL\left(\frac{\dot{x}}{y}\right) :: T'$, ou $\left(\frac{X^m}{A^m}\right) : T$, ou $\left(\frac{X^m}{A^m}\right)$, ou,

en divisant, $dFL\left(\frac{\dot{x}}{y}\right) : FL\left(\frac{\dot{x}}{y}\right) :: mdX : X$; donc $dFL\left(\frac{\dot{x}}{y}\right) = \frac{mdX}{X} FL\left(\frac{\dot{x}}{y}\right)$; donc $d\left(\frac{\dot{x}}{y}\right) = \frac{mdX}{X}\left(\frac{\dot{x}}{y}\right)$; donc $y d\dot{x} - \dot{x}dy = \frac{mdX}{X} y\dot{x}$; donc $dy = \gamma y dX - \frac{my dX}{X}$ & $d\dot{y} = \gamma\dot{y}dX + \lambda y\dot{x}dX - \frac{m\dot{y}dX}{X}$. Substituons ces valeurs dans notre équation fluxio-différencielle, & elle deviendra $gp\gamma\dot{x} + gq\varphi\dot{x} + 2\gamma y\dot{y} + \lambda y^2\dot{x} - \frac{2my\dot{y}}{X} = 0$, ou $g\left(\frac{p\gamma + q\varphi}{2\gamma - \frac{2m}{X}}\dot{x} + \frac{\lambda}{2\gamma - \frac{2m}{X}} y^2\dot{x} + y\dot{y}\right) = 0$. Faisons que cette équation soit la même, terme à terme, que celle-ci, $gp\dot{x} + y\dot{y} = 0$, & par-là nous aurons les deux équations suivantes, $\lambda = 0$, $\frac{p\gamma + q\varphi}{2\gamma - \frac{2m}{X}} = p$; donc $\lambda\dot{x} = 0$; donc $\gamma = M$; donc $\gamma\dot{x} = M\dot{x}$; donc $\varphi = Mx + N$. Mais φ doit être $= 0$ lorsque $x = 0$, & $= 1$ lorsque $x = X$; car au commencement du mouvement, la différence des arcs parcourus en temps proportionnels est nulle, & à la fin elle est égale à la différence totale des deux arcs; donc $N = 0$ & $M = \frac{1}{X}$; donc $\varphi = \frac{x}{X}$ & $\gamma = \frac{1}{X}$. Je substitue ces

valeurs dans la seconde équation, & elle devient $\frac{p+qx}{2-2m} = p$, ou $(1 - 2m)\, p = qx$; donc $(1 - 2m)\, \frac{\dot{x}}{x} = \frac{q\dot{x}}{p}$, & par conséquent $(1 - 2m)\, lx - (1 - 2m)\, lb = lp$; donc $b^{2m-1}\, x^{1-2m} = p$; donc $p\dot{x} = \dot{z} = b^{2m-1}\, x^{1-2m}\, \dot{x}$; donc enfin $z = e^{2m-1}\, x^{2-2m}$. Si $m = 0$, on aura $ez = x^2$, comme on le sait depuis long temps; si $m = \frac{1}{2}$, on aura $z = x$, ou en général, si nous eussions pris la FLuente autrement, $z = nx$.

EXEMPLE II.

Supposons à présent que le mouvement se fasse dans un milieu qui résiste en raison de la vîtesse, & qu'on veuille une courbe où tous les temps soient égaux, l'équation sera $(-gp \pm ny)\, \frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \dot{y}$, ou $gp\dot{x} \mp ny\dot{x} + y\dot{y} = 0$, & sa différence $gp\dot{d}x + gq\dot{x}dx \mp ny\dot{d}x \mp n\dot{x}dy + y\dot{d}y + \dot{y}dy = 0$. Substituons pour dx & $\dot{d}x$, dy & $\dot{d}y$ leurs valeurs, & nous aurons cette équation-ci

$gp\gamma\dot{x} + gq\varphi\dot{x} \mp 2n\gamma y\dot{x} + 2\gamma y\dot{y} + \lambda y^2\dot{x} = 0$,

ou $g \cdot (\frac{p\gamma + q\varphi}{2\gamma})\, \dot{x} \mp ny\dot{x} + \frac{\lambda}{2\gamma}\, y^2\dot{x} + y\dot{y} = 0$,

dont les termes, comparés avec ceux de la première, donneront $\lambda = 0$ & $\frac{p\gamma + q\varphi}{2\gamma} = p$.

Si on suit ces deux équations, comme dans l'exemple précédent, on trouvera $z = e^{-1}\, x^2$.

EXEMPLE III.

Soit la résistance $= \frac{y^2}{n}$, & qu'on veuille la Tautochrone de cette hypothèse, l'équation sera $(-gp \pm \frac{1}{n}\, y^2)\, \frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \dot{y}$, ou $gp\dot{x} \mp \frac{1}{n}\, y^2\, \dot{x} + y\dot{y} = 0$; sa différence sera $gp\dot{d}x$

$+gq\dot{x}dx \mp \frac{1}{n}y^2\,d\dot{x} \mp \frac{2}{n}y\dot{x}dy + y\,d\dot{y} + \dot{y}dy = 0$,
& après la ſubſtitution l'on aura

$gp\gamma\dot{x} + gq\varphi\dot{x} \mp \frac{3}{n}\gamma y^2\,\dot{x} + 2\gamma y\dot{y} + \lambda y^2\,\dot{x} = 0$,

ou $g\left(\frac{p\gamma + q\varphi}{2\gamma}\right)\dot{x} + \left(\frac{\mp\frac{3}{n}\gamma + \lambda}{2\gamma}\right)y^2\,\dot{x} + y\dot{y} = 0$;

& en comparant $\frac{\mp\frac{3}{n}\gamma + \lambda}{2\gamma} = \mp\frac{1}{n}$ & $\frac{p\gamma + q\varphi}{2\gamma} = p$,
donc 1.° $\mp\frac{1}{n}\gamma\dot{x} + \lambda\dot{x} = 0$, donc $\mp\frac{1}{n}\varphi + \gamma = M$,
ou $\pm\frac{1}{n}\dot{x} = \frac{\gamma\dot{x}}{\varphi \pm nM}$, donc $\pm\frac{1}{n}x = l(\varphi \pm nM)$
$+ lN$, & par conſéquent $N\varphi \pm nNM = C^{\pm\frac{1}{n}x}$;
& en rempliſſant les conditions que φ ſoit $= 0$ au commencement & $= 1$ à la fin, on aura $\pm nNM = 1$
& $N \pm nMN = C^{\pm\frac{1}{n}X}$, d'où l'on tirera
$M = \pm\left(\frac{1}{nC^{\pm\frac{1}{n}X} - n}\right)$ & $N = C^{\pm\frac{1}{n}X} - 1$;

donc $\varphi = \frac{C^{\pm\frac{1}{n}x} - 1}{C^{\pm\frac{1}{n}X} - 1}$ & $\gamma = \frac{\pm\frac{1}{n}C^{\pm\frac{1}{n}x}}{C^{\pm\frac{1}{n}X} - 1}$. Donc

2.° $\frac{\pm\frac{1}{n}C^{\pm\frac{1}{n}x}\dot{x}}{C^{\pm\frac{1}{n}x} - 1} = \frac{q\dot{x}}{p}$, donc $l(C^{\pm\frac{1}{n}x} - 1)$
$= lp + lm$, & par conſéquent $mp = C^{\pm\frac{1}{n}x} - 1$,
donc $mp\dot{x} = m\dot{z} = C^{\pm\frac{1}{n}x}\dot{x} - \dot{x}$, donc $mz = \pm$
$nC^{\pm\frac{1}{n}x} - x \mp n$; & ſi l'on veut avoir une équation

ſans quantité exponentielle, il n'y aura qu'à faire $\pm nC^{\pm\frac{1}{n}z} = mz \pm n + x$ & $\pm nC^{\pm\frac{1}{n}z} = \frac{\pm mn\dot{z} \pm n\dot{x}}{\dot{x}}$, & on tirera $\pm mn\dot{z} = mz\dot{x} + x\dot{x}$.

EXEMPLE IV.

Soit la réſiſtance $= \frac{y^2 + my}{n}$, & trouvons encore la Tautochrone de cette hypothèſe, qui eſt celle de la nature, quoiqu'apparemment cette courbe ne puiſſe être d'aucun uſage, attendu que ſi les oſcillations de gauche à droite ſont iſochrones, celles de droite à gauche ne le ſeront pas. Dans ce cas-ci, nous aurons $(-gp \pm \frac{1}{n}y^2 \pm \frac{m}{n}y)\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \dot{y}$, ou $gp\dot{x} \mp \frac{1}{n}y^2\dot{x} \mp \frac{m}{n}y\dot{x} + y\dot{y} = 0$. Prenons la différence $gpd\dot{x} + gq\dot{x}dx \mp \frac{1}{n}y^2d\dot{x} \mp \frac{2}{n}y\dot{x}dy \mp \frac{m}{n}yd\dot{x} \mp \frac{m}{n}\dot{x}dy + yd\dot{y} + \dot{y}dy = 0$. Subſtituons, & elle deviendra $gp\gamma\dot{x} + gq\varphi\dot{x} \mp \frac{3}{n}\gamma y^2\dot{x} \mp \frac{2m}{n}\gamma y\dot{x} + 2\gamma y\dot{y} + \lambda y^2\dot{x} = 0$, ou $g(\frac{p\gamma + q\varphi}{2\gamma})\dot{x} + (\frac{\mp\frac{3}{n}\gamma + \lambda}{2\gamma})y^2\dot{x} \mp \frac{m}{n}y\dot{x} + y\dot{y} = 0$. Comparons, & nous trouverons les mêmes équations que dans l'hypothèſe précédente, ce qui prouve que ſa Tautochrone l'eſt auſſi de celle-ci.

PREMIÈRE REMARQUE.

Soit en général la force le long des petits côtés de la courbe $= f$, la réſiſtance $= \rho$, le temps $= T$, & $dT = SdX$, & on aura $(-f \pm \rho)\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \dot{y}$, ou $f\dot{x} \mp \rho\dot{x} + y\dot{y} = 0$, & $dy = \gamma y - \frac{S}{T}y$; mais il arrivera très-ſouvent que les deux équations fluxionnelles, qui dans les

Fig. 1

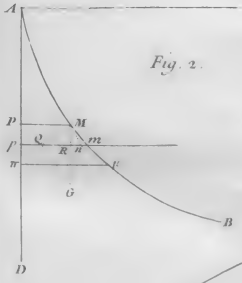


Fig. 2

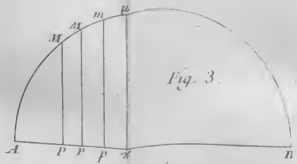


Fig. 3

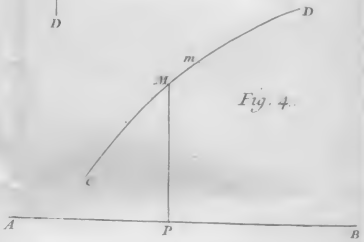


Fig. 4

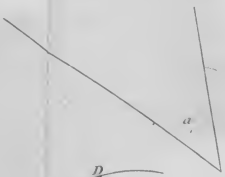


Fig. 5

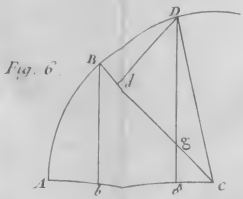


Fig. 6

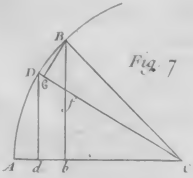
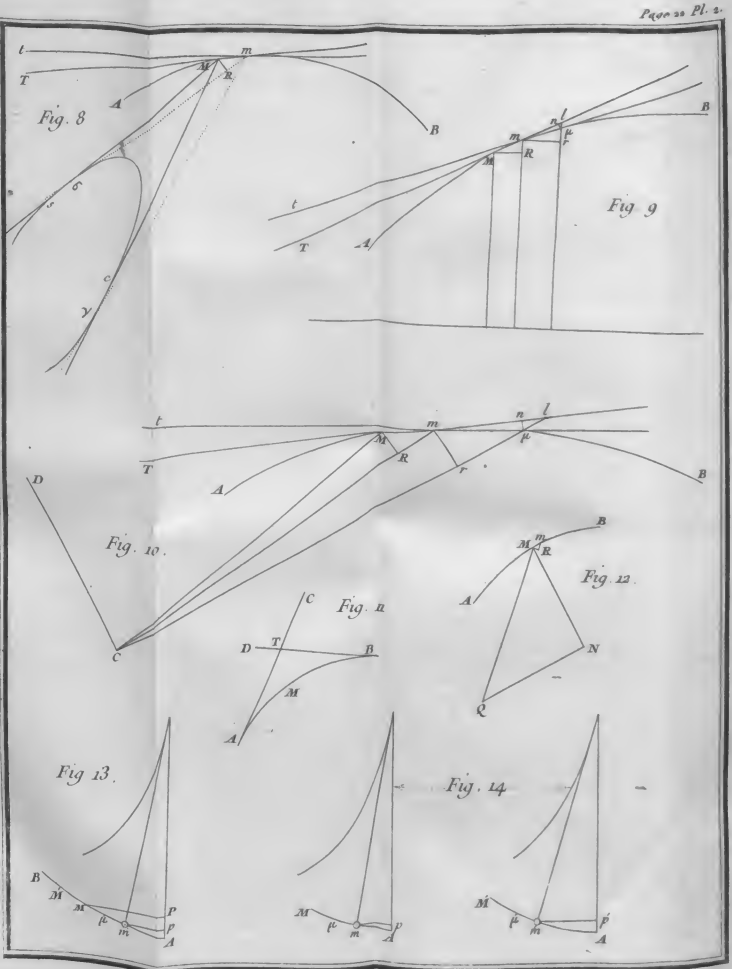


Fig. 7


t
T
m
M
R
A
B
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10.
Fig. 11
Fig. 12
Fig. 13.
Fig. 14
C
D
N
Q
P
p
r
n
l
μ

exemples précédens ont toûjours été comparables, ne le seront pas; alors il faudra, par le moyen de ces deux équations, faire disparoître les y, & ensuite, T ou z étant donné, tâcher de déterminer l'autre par les méthodes ordinaires, & en remplissant les deux conditions de φ.

Seconde Remarque.

Il est évident que si au lieu de l'équation des forces on avoit toute autre équation entre le paramètre A de la courbe AB, l'abscisse totale X, l'abscisse partiale x & l'ordonnée y, en termes finis ou en fluxions, la méthode précédente pourroit également servir à trouver non seulement ce que deviendroit $FL\left(\frac{\dot{x}}{y}\right)$, mais toute autre fonction donnée de ces lignes (comme $FL\,(y\dot{x})$ ou $FL\,(\dot{x}+\dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}$ ou, &c.) lorsque x deviendroit $= X$, ou réciproquement à faire que cette fonction devînt une quantité donnée, x devenant $= X$, & qu'ainsi il peut y avoir une infinité de problèmes qui dépendent de cette méthode fluxio-différencielle.

LE CALCUL INTÉGRAL.

PREMIÉRE MÉTHODE.

Définitions & Propoſitions fondamentales.

THÉOREME I.

19 Nov. 1738. SOIT F une fonction quelconque de p, de x, de y, de z, *&c.* & ſoit la dimenſion de $F = e$, prenez la différence de cette fonction en faiſant varier toutes les lignes qui la compoſent, vous aurez $dF = Adp + Bdx + Cdy + Ddz + \&c.$ Je dis que $Ap + Bx + Cy + Dz + \&c. = eF$.

DÉMONSTRATION.

F & $\acute{F}$ étoient deux fonctions pareilles, la première des lignes p, x, y, z, *&c.* la ſeconde des lignes infiniment peu, plus ou moins grandes p', x', y', z', &c. ou $p + dp$, $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, &c. on a pris la différence de ces deux fonctions, & on a eu

$\acute{F} - F$ ou $dF = Adp + Bdx + Cdy + Ddz +$ &c.

Nous pouvons ſuppoſer que les fonctions $\acute{F}$, F étoient ſemblables, nous aurons par la propriété des fonctions ſemblables $\acute{F} : F :: p'^{e} : p^{e}$ ou $\acute{F} - F : F :: p'^{e} - p^{e} : p^{e}$ ou $dF : F :: edp : p$; donc $dF = eF\frac{dp}{p}$: par l'hypothèſe, $x' : x :: p' : p$, ou $dx : x :: dp : p$; donc $dx = \frac{xdp}{p}$, par la même raiſon $dy = \frac{ydp}{p}$, $dz = \frac{zdp}{p}$, &c.

En ſubſtituant pour dF, dx, dy, dz, &c. ces valeurs $\frac{eFdp}{p} = Adp + Bx\frac{dp}{p} + Cy\frac{dp}{p} + Dz\frac{dp}{p} +$ &c.

ou

ou $eF = Ap + Bx + Cy + Dz +$ &c. *C. Q. F. D.*

Outre le grand usage que nous ferons de ce théorème dans la suite, voici un corollaire que j'en tirai dès que je l'eus trouvé.

COROLLAIRE.

Soit l'élément $y\,dx$, & que y soit une fonction quelconque de a & de x, dont la dimension soit $= e - 1$ (s'il entroit d'autres lignes constantes dans la fonction y, on les exprimeroit par ma, na, &c.) : je suppose que F est l'intégrale de l'élément $y\,dx$; avant de prendre la différence de F, l'on pouvoit diviser cette fonction par a^e, & faire ensuite varier a de même que x, on auroit eu $\frac{y\,dx}{a^e} + f\,da = d\left(\frac{F}{a^e}\right)$, f est une fonction de a & de x qui est inconnue ; mais par le théoreme on aura $\frac{yx}{a^e} + fa = 0$, donc $f = \frac{-xy}{a^{e+1}}$; on auroit donc eu $\frac{y}{a^e}\,dx + \frac{-xy}{a^{e+1}}\,da = d\left(\frac{F}{a^e}\right)$; donc $\int \frac{y}{a^e}\,dx = \int \frac{-xy}{a^{e+1}}\,da$, donc $\int y\,dx = -a^e x \int \frac{y}{a^{e+1}}\,da$.

AVERTISSEMENT.

Comme nous allons avoir à différencier un grand nombre de fonctions indéterminées, voici une manière d'exprimer les fonctions qui naîtront de ces différenciations, laquelle nous sera d'un grand secours.

Soit μ une fonction de plusieurs quantités p, x, y, z, &c. pour désigner le coëfficient de dx dans la différence de μ, j'écrirai $\frac{d\mu}{dx}$; pour désigner celui de dy, j'écrirai $\frac{d\mu}{dy}$, &c.

Par la même raison, pour désigner le coëfficient de dx dans la différence de $\frac{d\mu}{dx}$, j'écrirai $\frac{dd\mu}{dx^2}$; pour désigner

celui de dy, j'écrirai $\frac{ddμ}{dxdy}$ ou $\frac{ddμ}{dydx}$; car, comme nous le démontrerons bien-tôt, ces deux expreſſions ne ſont qu'une même choſe, & j'en uſerai toûjours de même.

THÉORÉME II.

Soit toûjours $μ$ une fonction de p, de x, de y, de z, &c. le coëfficient de dx dans la différence de $\int μ\,dx$ eſt $μ$; mais quel eſt, par exemple, celui de dy?

Je dis que $\frac{d\int μ\,dx}{dy} = \int \frac{dμ}{dy}\,dx$.

DÉMONSTRATION.

Car en général $d\int μ\,dx = \int μ'\,dx' - \int μ\,dx = \int(μ'\,dx' - μ\,dx) = \int d(μ\,dx) =$ (en ne faiſant varier que y) $\int \frac{dμ}{dy}\,dy\,dx$; donc $\frac{d\int μ\,dx}{dy} = \int \frac{dμ}{dy}\,dx$. C. Q. F. D.

THÉORÉME III.

Je ſuppoſe que $A\,dx$ & $B\,dy$ ſoient deux termes de la différence d'une même fonction $φ$ de p, de x, de y, de z, &c. & je dis que $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$.

DÉMONSTRATION.

On aura $\int A\,dx + a = φ$, $\int B\,dy + b = φ$ (a eſt une fonction de p, y, z, &c. & b eſt une fonction de p, x, z, &c.); donc $\int A\,dx + a = \int B\,dy + b$. Je différencie cette dernière équation en faiſant varier x; j'aurai $A = \int \frac{dB}{dx}\,dy + \frac{db}{dx}$. Je différencie derechef en faiſant varier y; j'aurai $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

Si on avoit exprimé A par $\frac{dφ}{dx}$ & B par $\frac{dφ}{dy}$, on auroit

ou $\frac{ddφ}{dxdy} = \frac{ddφ}{dydx}$, ce que nous avions promis de démontrer.

THÉORÈME IV.

Je suppose que Mdx, $AMdy$ & $BMdz$ soient trois termes de la différence d'une même fonction F, de p, de x, de y, de z, de u, &c.

je dis que $A\frac{dB}{dx} - B\frac{dA}{dx} + \frac{dA}{dz} - \frac{dB}{dy} = 0$.

DÉMONSTRATION.

Par le théorème précédent on aura $\frac{dM}{dy} = A\frac{dM}{dx} + M\frac{dA}{dx}$, $\frac{dM}{dz} = B\frac{dM}{dx} + M\frac{dB}{dx}$, & $A\frac{dM}{dz} + M\frac{dA}{dz} = B\frac{dM}{dy} + M\frac{dB}{dy}$.

En égalant les deux valeurs de $\frac{dM}{dz}$, on aura

$M(A\frac{dB}{dx} + \frac{dA}{dz} - \frac{dB}{dy}) + B(A\frac{dM}{dx} - \frac{dM}{dy}) = 0$;

& en substituant $-M\frac{dA}{dx}$ au lieu de $A\frac{dM}{dx} - \frac{dM}{dy}$, on aura $A\frac{dB}{dx} - B\frac{dA}{dx} + \frac{dA}{dz} - \frac{dB}{dy} = 0$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE.

Si Mdx, $AMdy$, $BMdz$, $CMdu$ sont quatre termes de la différence de F,

on aura $A\frac{dB}{dx} - B\frac{dA}{dx} + \frac{dA}{dz} - \frac{dB}{dy} = 0$,

$A\frac{dC}{dx} - C\frac{dA}{dx} + \frac{dA}{du} - \frac{dC}{dy} = 0$,

& $B\frac{dC}{dx} - C\frac{dB}{dx} + \frac{dB}{du} - \frac{dC}{dz} = 0$;

l'on trouvera de même les conditions pour cinq termes de la différence de F, pour six, &c.

Les théorèmes précédens (excepté le théorème II, qui n'eſt de moi que par la manière générale de le propoſer & de le démontrer), les démonſtrations de ces théorèmes, leurs corollaires, & les problèmes ſuivans, étoient nouveaux & n'étoient connus d'aucuns Géomètres au 19 Novembre 1738, lorſque je les publiois à Paris par écrit & verbalement, d'où on les envoyoit à M.rs Bernoulli, à M. Euler, &c.

LE CALCUL DES ÉQUATIONS
AUX PREMIÉRES DIFFÉRENCES.

PROBLÉME I.

Soit $dx + \alpha dy = 0$, l'équation que l'on propose d'intégrer, α étant une fonction de dimension nulle de x & de y; la question se réduit à trouver une fonction φ de x & de y, dont la différence divisée par le coëfficient de dx soit $dx + \alpha dy$. Si on n'eût pas divisé par la fonction qui multiplioit dx, on auroit eu $\mu dx + \alpha\mu dy = d\varphi$; μ est une fonction de x & de y qui est inconnue.

Je suppose que la dimension de φ étoit $= e$, j'aurai $\mu x + \alpha\mu y = e\varphi$;

donc $\frac{\frac{1}{e}d\varphi}{\varphi} = \frac{1}{x+\alpha y}dx + \frac{\alpha}{x+\alpha y}dy$.

Lorsqu'on aura la fonction φ, on la fera $= ap^e$, & le nombre a servira à remplir une des conditions du problème auquel appartiendra l'équation proposée.

Si e étoit $= 0$, α seroit $= \frac{-x}{y}$, & dans ce cas, toute fonction de dimension nulle de x & de y seroit $= \varphi$.

PROBLÉME II.

Soit $dx + \alpha dy = 0$, l'équation que l'on propose d'intégrer, α étant une fonction de dimension nulle de x, de y & de p; la question se réduit à trouver une fonction φ de p, de x & de y, dont la différence, en faisant p constant, divisée par le coëfficient de dx, soit $dx + \alpha dy$. Si l'on n'eût pas fait $dp = 0$, on auroit eu $dx + \alpha dy + \pi dp = 0$; π est une fonction de dimension nulle de p, de x & de y, qui est inconnue; & si l'on n'eût pas divisé par la fonction qui

multiplioit dx, on auroit eu $\mu dx + \alpha\mu dy + \pi\mu dp = d\varphi$; μ est une fonction de p, de x & de y, qui est aussi inconnue.

Je suppose que la dimension de φ étoit $= e$, j'aurai

$$\mu x + \alpha\mu y + \pi\mu p = e\varphi;$$

$$\text{donc } \frac{\frac{1}{e}d\varphi}{\varphi} = \frac{1}{x+y\alpha+p\pi}dx + \frac{\alpha}{x+y\alpha+p\pi}dy + \frac{\pi}{x+y\alpha+p\pi}dp.$$

Il ne s'agit donc plus que d'avoir la fonction π, & nous savons *(Théorème IV)* que cette fonction doit être telle que $\alpha\frac{d\pi}{dx} - \pi\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\alpha}{dp} - \frac{d\pi}{dy} = 0$.

Si l'on suppose que la dimension de φ étoit $= 0$ (ce qui se peut toûjours, sans rien changer à la fonction donnée α; car de quelque dimension que fût φ, l'on pouvoit, avant d'en prendre la différence, multiplier ou diviser cette fonction par une puissance de p qui l'auroit rendue de dimension nulle, & on auroit toûjours eu le même α) on aura $\pi = \frac{-x-y\alpha}{p}$. Mais parmi toutes les valeurs possibles de π, celle-là est la seule qui ne peut nous servir, & il faut nécessairement en trouver quelqu'autre valeur.

Pour cet effet, considérons plus particulièrement que nous n'avons encore fait de quelle manière on peut concevoir qu'on est arrivé de la fonction φ à l'équation $dx + \alpha dy = 0$; on avoit $\varphi =$ fonction de p, de x & de y.

On a différencié en faisant tout varier, & on a eu $Adx + Bdy + Cdp = d\varphi$; on a réduit les trois fonctions A, B, C au même dénominateur, & on a eu $\frac{I}{D}(Edx + Fdy + Gdp) = d\varphi$; on a divisé les fonctions E, F, G par leur plus grand facteur commun, & on a eu $\frac{H}{D}(Idx + Kdy + Ldp) = d\varphi$; on a encore divisé les fonctions I & K par leur plus grand facteur commun, & on a eu $\frac{H}{D}(MQdx + NQdy + Ldp) = d\varphi$; on

a fait $d\varphi = 0$, & on a eu $dx + \frac{N}{M}dy + \frac{L}{QM}dp = 0$; enfin on a fait $dp = 0$, & on a eu $dx + \frac{N}{M}dy = 0$; donc $\alpha = \frac{N}{M}$, & $\pi = \frac{L}{QM}$.

Je fubſtitue ces valeurs de α & de π dans l'équation $\alpha\frac{d\pi}{dx} - \pi\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\alpha}{dp} - \frac{d\pi}{dy} = 0$; j'aurai

$$NQ\frac{dL}{dx} - NL\frac{dQ}{dx} - QL\frac{dN}{dx} + Q^2\left(M\frac{dN}{dp} - N\frac{dM}{dp}\right) - MQ\frac{dL}{dy} + ML\frac{dQ}{dy} + QL\frac{dM}{dy} = 0.$$

La fonction α étant donnée, on aura les fonctions N & M; ſi de plus la fonction Q étoit donnée, on auroit très-aiſément la fonction L par la méthode des indéterminées; l'on prendroit pour L une fonction de p, x, y, de même dimenſion que QM, la plus générale qu'il ſeroit poſſible, l'on ſubſtitueroit cette valeur de L dans l'équation entre M, N, L, Q, & l'on détermineroit les coëfficiens de L par des équations du premier degré, en ſatisfaiſant à cette équation. Mais comme la fonction Q eſt inconnue de même que L, l'on fera 1.° $Q = 1$; on aura

$$N\frac{dL}{dx} - L\frac{dN}{dx} + M\frac{dN}{dp} - N\frac{dM}{dp} - M\frac{dL}{dy} + L\frac{dM}{dy} = 0.$$

2.° $Q = p$, on aura

$$N\frac{dL}{dx} - L\frac{dN}{dx} + p\left(M\frac{dN}{dp} - N\frac{dM}{dp}\right) - M\frac{dL}{dy} + L\frac{dM}{dy} = 0.$$

3.° S'il n'entre aucun radical dans N ni dans M, l'on fera $Q = ap + bx + cy$.

4.° $Q = ap^2 + bpx + cpy + dx^2 + exy + fy^2$.

5.° $Q =$, *&c.* & l'on déterminera les coëfficiens de L comme ſi ceux de Q étoient donnés; enſuite l'on verra quels doivent être les coëfficiens de Q, pour qu'il n'y ait pas de contradiction dans ceux de L.

S'il entre des radicaux dans les fonctions N, M (après avoir essayé les hypothèses de $Q = 1$ & de $Q = p$, qui sont très-générales) l'on fera entrer ces mêmes radicaux dans les valeurs successives de Q & de L, comme autant de lignes, & de la manière la plus générale qu'il sera possible.

Ayant π, on aura $\frac{1}{c} l\varphi = \int \frac{1}{x + y\alpha + p\pi} dx + yp$,

$$\frac{1}{c} l\varphi = \int \frac{\alpha}{x + y\alpha + p\pi} dy + pc,$$

$$\frac{1}{c} l\varphi = \int \frac{\pi}{x + y\alpha + p\pi} dp + xy.$$

Par yp, j'entends une fonction de y & de p, par pc une une fonction de p & de x, & par xy une fonction de x & de y: ma manière est d'employer des signes parlans, autant que cela se peut.

Ces trois fonctions doivent être telles que les trois valeurs de $\frac{1}{c} l\varphi$ ne soient qu'une même chose.

Soit, par exemple, l'équation $dx + \frac{ap + bx + cy}{\alpha p + \mathcal{C}x + \gamma y} dy = 0$; je suppose $Q = 1$; j'aurai $N = ap + bx + cy$, $M = \alpha p + \mathcal{C}x + \gamma y$, $L = Ap + Bx + Cy$, $\frac{dN}{dx} = b$, $\frac{dN}{dp} = a$, $\frac{dM}{dy} = \gamma$, $\frac{dM}{dp} = \alpha$, $\frac{dL}{dx} = B$, $\frac{dL}{dy} = C$; & en substituant dans l'équation

$$N\frac{dL}{dx} - L\frac{dN}{dx} + M\frac{dN}{dp} - N\frac{dM}{dp} - M\frac{dL}{dy} + L\frac{dM}{dy} = 0,$$

j'aurai $(aB - \alpha C - bA + \gamma A)\, p + (-b\alpha + \mathcal{C}a - \mathcal{C}C + \gamma B)\, x + (cB - c\alpha + a\gamma - bC)\, y = 0$; donc $aB - \alpha C - (b - \gamma) A = 0$, $-\mathcal{C}C + \gamma B = b\alpha - a\mathcal{C}$, $cB - bC = c\alpha - a\gamma$; donc $A = \frac{-a(b\alpha - a\mathcal{C})}{c\mathcal{C} - b\gamma}$, $B = \frac{\mathcal{C}(c\alpha - a\gamma) - b(b\alpha - a\mathcal{C})}{c\mathcal{C} - b\gamma}$, $C = \frac{\gamma(c\alpha - a\gamma) - c(b\alpha - a\mathcal{C})}{c\mathcal{C} - b\gamma}$;

donc

donc $\pi = \frac{-a(b\alpha - a\zeta)p + [\zeta.(c\alpha - a\gamma) - b.(b\alpha - a\zeta)]x + [\gamma.(c\alpha - a\gamma) - c.(b\alpha - a\zeta)]y}{(c\zeta - b\gamma)(ap + \zeta x + \gamma y)}$.

Soit l'équation $dx + \frac{ap^2 + bpx + cpy + dx^2 + exy}{\alpha p^2 + \zeta px + \gamma py - dxy - ey^2} dy = 0$, je suppose $Q = p$; j'aurai $N = ap^2 + bpx + cpy + dx^2 + exy$, $M = \alpha p^2 + \zeta px + \gamma py - dxy - ey^2$, $L = Ap^3 + Bp^2x + Cp^2y + Dpx^2 + Epxy + Fpy^2 + Gx^3 + Hx^2y + Ixy^2 + Ky^3$; $\frac{dN}{dx} = bp + 2dx + ey$, $\frac{dN}{dp} = 2ap + bx + cy$, $\frac{dM}{dy} = \gamma p - dx - 2ey$, $\frac{dM}{dp} = 2\alpha p + \zeta x + \gamma y$, $\frac{dL}{dx} = Bp^2 + 2Dpx + Epy + 3Gx^2 + 2Hxy + Iy^2$, $\frac{dL}{dy} = Cp^2 + Epx + 2Fpy + Hx^2 + 2Ixy + 3Ky^2$; & en substituant ces valeurs dans l'équation $N\frac{dL}{dx} - L\frac{dN}{dx} + pM\frac{dN}{dp} - pN\frac{dM}{dp} - M\frac{dL}{dy} + L\frac{dM}{dy} = 0$, j'aurai $(aB - bA + 2a\alpha - 2a\alpha - \alpha C + \gamma A)p^4 + (2aD + bB - bB - 3dA + 2a\zeta + b\alpha - 2b\alpha - \zeta a - \alpha E - \zeta C + \gamma B - dA)p^3x + (aE + cB - bC - eA + 2a\gamma + c\alpha - 2c\alpha - a\gamma - 2\alpha F - \gamma C + \gamma C - 3eA)p^3y + (3aG + 2bD + dB - bD - 2dB + b\zeta - 2d\alpha - b\zeta - \alpha H - \zeta E + \gamma D - dB)p^2x^2 + (2aH + bE + 2cD + eB - bE - 2dC - eB - 2aD + b\gamma + c\zeta - 2e\alpha - c\zeta - b\gamma - 2\alpha I - 2\zeta F - \gamma E + dC + \gamma E - dC - 2eB)p^2xy + (aI + CE - bF - eC - 2ae + c\gamma - c\gamma - 3\alpha K - 2\gamma F + eC + \gamma F - 2eC)p^2y^2 + (3bG + 2dD - bG - 2dD - d\zeta = \zeta H + \gamma G - dD)px^3$.

$+ (2bH + 3cG + dE + 2eD - bH - 2dE - eD - bd - e\zeta - d\gamma - 2\zeta I - \gamma H + dE + \gamma H - dE - 2eD)\, px^2y + (bI + 2cH + eE - bI - 2dF - eE - be - cd - c\gamma - 3\zeta K - 2\gamma I + 2dF + eE + \gamma I - dF - 2eE)\, pxy^2 + (cI - bK - eF - ce - 3\gamma K + 2eF + \gamma K - 2eF)\, py^3 + (3dG - 2dG - dG)\, x^4 + (2dH + 3eG - 2dH - eG + dH - dH - 2eG)\, x^3y + (dI + 2eH - 2dI - eH + 2dI + eH - dI - 2eH)\, x^2y^2 + (eI - 2dK - eI + 3dK + 2eI - dK - 2eI)\, xy^3 - (eK + 3eK - 2eK)\, y^4 = 0.$

Donc $aB - (b - \gamma)A - aC = 0$, $2aD + \gamma B - 3dA - aE - \zeta C = b\alpha - a\zeta$, $aE + cB - bC - 3eA - 2aF = c\alpha - a\gamma$, $3aG + (b + \gamma).D - 2dB - aH - \zeta E = 2d\alpha$, $aH + cD - eB - dC - aI - \zeta F = e\alpha + ad$, $aI + cE - (b + \gamma).F - 2eC - 3aK = 2ae$, $(2b + \gamma).G - dD - \zeta H = d\zeta$, $bH + 3cG - dE - 2\zeta I = d\gamma + e\zeta + bd$, $- \gamma I + 2cH - eE - dF - 3\zeta K = e\gamma + cd + be$, $CI - (b + 2\gamma).K - eF = ce$; & au moyen de ces équations, lorſque les coëfficiens a, b, c, d, e, α, ζ, γ, ſeront donnés, l'on déterminera les coëfficiens A, B, C, D, E, F, G, H, I, K; par conſéquent on aura π.

REMARQUE I.

Nous avons vû que l'on pouvoit toûjours prendre

$\pi = \frac{-x-y\alpha}{p}$, & avoir $dx + \alpha dy + \frac{-x-y\alpha}{p} dp = 0$; par conséquent, au lieu de l'équation proposée $dx + \alpha dy = 0$, l'on pourra se proposer celle-ci, $dx + \frac{-x-y\alpha}{p} dp = 0$ à intégrer, ou celle-ci, $dy + \frac{-x-y\alpha}{p\alpha} dp = 0$.

REMARQUE II.

Lorsqu'il entre des radicaux dans α, & que l'on veut avoir une équation où il n'y ait pas de radicaux, au lieu de transformer cette équation-ci, $dx + \alpha dy = 0$, l'on pourra transformer celle-ci, $dx + \alpha dy + \frac{-x-y\alpha}{p} dp = 0$. L'on égalera le radical que l'on voudra faire disparoître, à une fonction rationelle & homogène de p, de x, de y, & d'une nouvelle ligne z, & l'on choisira cette fonction telle que l'on puisse avoir p ou x ou y par une équation du premier degré. Je suppose que ce soit p que l'on ait ainsi; en différenciant & faisant varier x, y, z, on aura dp; on substituera pour p & dp leurs valeurs, & à la place de l'équation entre p, x, y, dp, dx, dy, on en aura une entre x, y, z, dx, dy, dz, dans laquelle il y aura un radical de moins, & où l'on sera maître de faire dx ou dy ou dz égal à 0, comme on l'étoit dans l'autre de faire dx ou dy ou dp égal à 0: lorsqu'on aura intégré cette équation, l'on chassera z, & on aura la vraie intégrale entre p, x, y.

REMARQUE III.

Lorsqu'on a l'élément ydx, y étant une fonction de a & de x, dont la dimension est $= e - 1$, dans laquelle il entre des radicaux, & que l'on veut faire disparoître ces radicaux, c'est-à-dire, avoir à la place de l'élément ydx, un autre élément à intégrer, dans lequel il n'y ait aucun radical, au lieu de transformer l'élément ydx,

comme l'on tâche de faire, l'on pourra transformer l'équation $\frac{y}{a^c} dx + \frac{-xy}{a^{c+1}} da = d\left(\frac{F}{a^c}\right)$.

PROBLÉME III.

Soit $dx + \alpha dy + \zeta dz = 0$, l'équation que l'on propose d'intégrer, α & ζ étant des fonctions de dimension nulle de x, de y & de z; je suppose que les fonctions α & ζ sont telles que $\alpha \frac{d\zeta}{dx} - \zeta \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\zeta}{dy} = 0$, sans quoi le problème seroit absurde.

La question se réduit à trouver une fonction φ de x, de y & de z, dont la différence, divisée par le coëfficient de dx, soit $dx + \alpha dy + \zeta dz$. Si l'on n'avoit pas divisé par la fonction qui multiplioit dx, on auroit eu $\mu dx + \alpha\mu dy + \zeta\mu dz = d\varphi$.

μ est une fonction de x, de y & de z, qui est inconnue.

Je suppose que la dimension de φ étoit $= e$, on aura $\mu x + \alpha\mu y + \zeta\mu z = e\varphi$; donc

$$\frac{x}{e}\frac{d\varphi}{\varphi} = \frac{1}{x+\alpha y+\zeta z} dx + \frac{\alpha}{x+\alpha y+\zeta z} dy + \frac{\zeta}{x+\alpha y+\zeta z} dz.$$

Lorsqu'on aura la fonction φ, on la fera $= ap^e$, & le problème sera résolu.

Si e étoit $= 0$, on auroit $\zeta = \frac{-x-y\alpha}{z}$; dans ce cas, il faudroit trouver une autre valeur de ζ qui satisfît à l'équation $\alpha \frac{d\zeta}{dx} - \&c. = 0$, & lorsqu'on auroit φ, on feroit cette fonction $= az^e$.

PROBLÉME IV.

Soit $dx + \alpha dy + \zeta dz = 0$, l'équation que l'on propose d'intégrer, α & ζ étant des fonctions de dimension nulle de x, de y, de z & de p; je suppose toûjours que les fonctions

α & ζ sont telles que $\alpha \frac{d\zeta}{dx} - \zeta \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\zeta}{dy} = 0$, sans quoi elles ne pourroient pas appartenir à la même intégrale.

La question se réduit à trouver une fonction φ de p, de x, de y & de z, dont la différence, en faisant $dp = 0$, divisée par le coëfficient de dx, soit $dx + \alpha dy + \zeta dz$. Si l'on n'avoit pas fait $dp = 0$, on auroit eu $dx + \alpha dy + \zeta dz + \pi dp = 0$.

π est une fonction de dimension nulle de p, de x, de y & de z, qui est inconnue, mais qui doit être telle que $\alpha \frac{d\pi}{dx} - \pi \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\alpha}{dp} - \frac{d\pi}{dy} = 0$, & $\zeta \frac{d\pi}{dx} - \pi \frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\zeta}{dp} - \frac{d\pi}{dz} = 0$; & si l'on n'avoit pas divisé par la fonction qui multiplioit dx, on auroit eu $\mu dx + \alpha\mu dy + \zeta\mu dz + \pi\mu dp = d\varphi$.

Je suppose que la dimension de φ étoit $= e$, j'aurai $\mu x + \alpha\mu y + \zeta\mu z + \pi\mu p = e\varphi$; donc $\frac{\frac{1}{e} d\varphi}{\varphi} = \frac{1}{x + \alpha y + \zeta z + \pi p} dx + \frac{\alpha}{x + \alpha y + \zeta z + \pi p} dy + \frac{\zeta}{x + \alpha y + \zeta z + \pi p} dz + \frac{\pi}{x + \alpha y + \zeta z + \pi p} dp$. Tout se réduit donc à trouver, par le moyen des deux équations entre α, ζ & π, une valeur de π autre que $\frac{-x - \alpha y - \zeta z}{p}$.

Soit $\alpha = \frac{N}{M}$, $\zeta = \frac{P}{M}$, on aura $\pi = \frac{L}{QM}$, & il ne s'agira que d'avoir Q, qui fort souvent sera $= 1$ ou $= p$; car ayant Q, on aura L par la méthode des indéterminées, comme dans le problème II.

CALCUL DES ÉQUATIONS
AUX SECONDES DIFFÉRENCES.

PROBLÉME I.

SOIT $ddx + \alpha ddy + A = 0$, l'équation que l'on propose d'intégrer, α & A étant des fonctions de x, de y, de dx & de dy, dont la dimension est, savoir, celle de $\alpha = 0$, & celle de $A = 1$.

La question se réduit à trouver une fonction φ de x, de y, de dx & de dy, dont la différence, en faisant différence de $x = dx$, différence de $y = dy$, divisée par le coëfficient de ddx, soit $ddx + \alpha ddy + A$.

Si au lieu de faire la différence de $x = dx$, celle de $y = dy$, on avoit fait la différence de $x = \partial x$ & celle de $y = \partial y$, on auroit eu $ddx + \alpha ddy + \zeta \partial x + \gamma \partial y = 0$.

ζ & γ sont des fonctions de x, de y, de dx & de dy, qui sont inconnues, mais qui doivent être telles que $\zeta dx + \gamma dy = A$; & si l'on n'avoit pas divisé par la fonction qui multiplioit ddx, on auroit eu $\mu ddx + \alpha\mu ddy + \zeta\mu \partial x + \gamma\mu \partial y = d\varphi$.

μ est une fonction de x, de y, de dx & de dy qui est aussi inconnue.

Je suppose que φ étoit une fonction infiniment petite d'un ordre $= e$, & que sa dimension en x & y étoit $= f$, j'aurai $\mu dx + \alpha\mu dy = e\varphi$, & $\zeta\mu x + \gamma\mu y = f\varphi$; donc $\frac{f}{e}(dx + \alpha dy) = \zeta x + \gamma y$, donc $\zeta = \frac{-\frac{f}{e} dy\,(dx + \alpha dy) + yA}{y dx - x dy}$, $\gamma = \frac{\frac{f}{e} dx\,(dx + \alpha dy) - xA}{y dx - x dy}$;

donc $\frac{\frac{1}{e} d\varphi}{\varphi} = \frac{1}{dx + \alpha dy} ddx + \frac{\alpha}{dx + \alpha dy} ddy + \frac{-\frac{f}{e} dy\,(dx + \alpha dy) + yA}{(y dx - x dy)(dx + \alpha dy)} \partial x + \frac{\frac{f}{e} dx\,(dx + \alpha dy) - xA}{(y dx - x dy)(dx + \alpha dy)} \partial y$;

& les fonctions données α & A, pour pouvoir appartenir à la même fonction φ, devront être telles que $\frac{d\left(\frac{1}{dx+\alpha dy}\right)}{\partial x} = \frac{d\left[\frac{-\frac{f}{e}dy\,(dx+\alpha dy)+yA}{(ydx-xdy).(dx+\alpha dy)}\right]}{ddx}$, ou, ce qui revient au même, telles que $\frac{f}{e}(dx+\alpha dy)^2 = (xdy-ydx)\left(dx\frac{d\alpha}{\partial x}+dy\frac{d\alpha}{\partial y}\right)+(dx+\alpha dy)\left(x\frac{dA}{ddx}+y\frac{dA}{ddy}\right)-A\left[x.\left(1+dy\frac{d\alpha}{ddx}\right)+y.\left(\alpha+dy\frac{d\alpha}{ddy}\right)\right]$.

Lorsqu'on aura la fonction φ, on la fera $= ap^f\,dq^e$, & le nombre a servira à remplir une des conditions du problème auquel appartiendra l'équation proposée.

Examinons présentement les différens cas particuliers qui peuvent arriver.

Il peut se faire que e étoit $= 0$, f ne l'étant pas; on aura $\alpha = \frac{-dx}{dy}$, & l'équation proposée sera $ddx + \frac{-dx}{dy}ddy + A = 0$; on aura $\frac{\frac{1}{f}d\varphi}{\varphi} = \frac{dy}{yA-(ydx-xdy)\mathcal{C}}ddx + \frac{-dx}{yA-(ydx-xdy)\mathcal{C}}ddy + \frac{\mathcal{C}dy}{yA-(ydx-xdy)\mathcal{C}}\partial x + \frac{A-\mathcal{C}dx}{yA-(ydx-xdy)\mathcal{C}}\partial y$, & la fonction $\mathcal{C}$ devra être telle que $-dx\frac{d\mathcal{C}}{\partial x}-dy\frac{d\mathcal{C}}{\partial y}+\mathcal{C}^2+A\frac{d\mathcal{C}}{ddx}-\mathcal{C}\frac{dA}{ddx}+\frac{dA}{\partial x}=0$.

Ayant $\mathcal{C}$, on aura φ, & on fera cette fonction $= ap^f$. Le cas de $f = 0$, e ne l'étant pas, est compris dans le cas général.

Il peut se faire que e & f étoient tous les deux en même temps $= 0$; on aura $\mathcal{C} = \frac{yA}{ydx-xdy}$, $\gamma = \frac{-xA}{ydx-xdy}$, donc $\mu ddx + \frac{-\mu dx}{dy}ddy + \mu.\frac{yA}{ydx-xdy}\partial x + \mu.\frac{-xA}{ydx-xdy}\partial y = d\varphi$.

& la fonction μ devra être telle que

$$\frac{d\mu}{\partial x} = \mu d\,\frac{\left(\frac{yA}{ydx - xdy}\right)}{ddx} + \left(\frac{yA}{ydx - xdy}\right)\frac{d\mu}{ddx}.$$

Ayant μ, on aura φ, & l'on fera cette fonction $= a$. Enfin il peut se faire qu'on ait fait dy constant, & que l'équation proposée soit $ddx + A = 0$; dans ce cas, toute fonction finie de dimension nulle qui satisfera à l'équation $\frac{f}{c}(dx + \alpha dy)^{\alpha} = \&c.$ pourra être prise pour α; & comme $\frac{-dx}{dy}$ satisfait généralement à cette équation, au lieu de l'équation $ddx + A = 0$, on pourra toûjours prendre celle-ci, $ddx + \frac{-dx}{dy}ddy + A = 0$; mais si l'on pouvoit trouver quelqu'autre valeur de α, lorsqu'on auroit φ, l'on feroit cette fonction $= ap^{f}dy^{c}$.

PROBLÉME II.

Soit $ddx + \alpha ddy + A = 0$, l'équation que l'on propose d'intégrer, α & A étant des fonctions de x, de y, de dx, de dy & de p, dont la dimension est, savoir, celle de $\alpha = 0$, & celle de $A = 1$.

La question se réduit à trouver une fonction φ de p, de x, de y, de dx & de dy, dont la différence, en faisant différence de $x = dx$, différence de $y = dy$, & différence de $p = 0$, divisée par le coëfficient de ddx, soit $ddx + \alpha ddy + A$.

Si au lieu de faire la différence de $x = dx$, celle de $y = dy$, & celle de $p = 0$, on eût fait la différence de $x = \partial x$, celle de $y = \partial y$, & celle de $p = dp$, on auroit eu $ddx + \alpha ddy + \zeta\partial x + \gamma\partial y + \pi dp = 0$.

ζ, γ & π sont des fonctions de p, de x, de y, de dx & de dy, qui sont inconnues; mais les fonctions ζ, γ doivent être telles que $\zeta dx + \gamma dy = A$; & si on n'avoit

pas

pas divisé par la fonction qui multiplioit ddx, on auroit eu $\mu ddx + \alpha\mu ddy + \mathcal{C}\mu\partial x + \gamma\mu\partial y + \pi\mu dp = d\varphi$.

Je suppose que la dimension de φ en dx & dy étoit $= e$, & qu'en p, x, y, elle étoit $= f$; j'aurai $\mu dx + \alpha\mu dy = e\varphi$, & $\mathcal{C}\mu x + \gamma\mu y + \pi\mu p = f\varphi$; donc $\frac{f}{e}(dx + \alpha dy) = \mathcal{C}x + \gamma y + \pi p$, &

$$\frac{\frac{1}{e}d\varphi}{\varphi} = \frac{1}{dx+\alpha dy}ddx + \frac{\alpha}{dx+\alpha dy}ddy + \frac{\mathcal{C}}{dx+\alpha dy}\partial x + \frac{A-\mathcal{C}dx}{dy(dx+\alpha dy)}\partial y + \frac{\frac{f}{e}dy(dx+\alpha dy) - yA + (ydx - xdy)\mathcal{C}}{pdy(dx+\alpha dy)}dp.$$

J'ai substitué dans cette équation pour γ sa valeur $\frac{A-dx\mathcal{C}}{dy}$, je fais $\frac{d\left(\frac{1}{dx+\alpha dy}\right)}{\partial x} = \frac{d\left(\frac{\mathcal{C}}{dx+\alpha dy}\right)}{ddx}$, & $\frac{d\left(\frac{1}{dx+\alpha dy}\right)}{\partial y} = \frac{d\left(\frac{A-dx\mathcal{C}}{dy(dx+\alpha dy)}\right)}{ddx}$, ou $-dy\frac{d\alpha}{\partial x} = (dx+\alpha dy)\frac{d\mathcal{C}}{ddx} - \mathcal{C}(1+dy\frac{d\alpha}{ddx})$ & $-dy^2\frac{d\alpha}{\partial y} = (dx+\alpha dy)\frac{dA}{ddx} - A(1+dy\frac{d\alpha}{ddx}) - \mathcal{C}(dx+\alpha dy) - dx(dx+\alpha dy)\frac{d\mathcal{C}}{ddx} + dx\mathcal{C}(1+dy\frac{d\alpha}{ddx})$; d'où je tire $\mathcal{C} = \frac{dy(dx\frac{d\alpha}{\partial x} + dy\frac{d\alpha}{\partial y}) + (dx+\alpha dy)\frac{dA}{ddx} - (1+dy\frac{d\alpha}{ddx})A}{dx+\alpha dy}$;

& $\frac{d\mathcal{C}}{ddx} = \frac{\left\{\begin{array}{l} dy^2\left[(1+dy\frac{d\alpha}{ddx})\cdot\frac{d\alpha}{\partial y} - (\alpha + dy\frac{d\alpha}{ddy})\cdot\frac{d\alpha}{\partial x}\right] + \\ (dx+\alpha dy)(1+dy\frac{d\alpha}{ddx})\frac{dA}{ddx} - (1+dy\frac{d\alpha}{ddx})^2 A \end{array}\right\}}{(dx+\alpha dy)^2}$.

Si on prend la différence de la valeur de $\mathcal{C}$, en faisant varier dx, on aura deux expressions de $\frac{d\mathcal{C}}{ddx}$, qui étant égalées ensemble, donneront $-2dy\left[(1+dy\frac{d\alpha}{ddx})\cdot\frac{d\alpha}{\partial y} - \right.$

$$(\alpha + dy\,\frac{d\alpha}{ddy})\cdot\frac{d\alpha}{\partial x}] + dy\,(dx + \alpha dy)\,(dx\,\frac{dd\alpha}{\partial x ddx} + dy\,\frac{dd\alpha}{\partial y ddx}) + (d\cdot + \alpha dy)^2\,\frac{dd A}{ddx^2} - 2\,(dx + \alpha dy)\,(1 + dy\,\frac{d\alpha}{ddx})\,\frac{dA}{ddx} - [dy\,\frac{dd\alpha}{ddx^2}\cdot(dx + \alpha dy) - 2\cdot(1 + dy\,\frac{d\alpha}{ddx})^2]\,A = 0.$$

En substituant la valeur de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}dx + \gamma dy = A$, on aura

$$\gamma = \frac{-dx\,(dx\,\frac{d\alpha}{\partial x} + dy\,\frac{d\alpha}{\partial y}) + (dx + \alpha dy)\,\frac{dA}{ddy} - (\alpha + dy\,\frac{d\alpha}{ddy})\,A}{dx + \alpha dy},$$

& en mettant les valeurs de $\mathcal{C}$ & de γ dans $\frac{f}{e}(dx + \alpha dy) = \mathcal{C}x + \gamma y + \pi p$, on aura

$$\pi = \frac{\left\{\begin{array}{l}(ydx - xdy)\,(dx\,\frac{d\alpha}{\partial x} + dy\,\frac{d\alpha}{\partial y}) - (dx + \alpha dy)\,(x\,\frac{dA}{ddx} + y\,\frac{dA}{ddy}) \\ + A\,[x\cdot(1 + dy\,\frac{d\alpha}{ddx}) + y\cdot(\alpha + dy\,\frac{d\alpha}{ddy})] + \frac{f}{e}(dx + \alpha dy)^2\end{array}\right\}}{p\,(dx + \alpha dy)};$$

donc

$$\frac{\frac{1}{e}d\varphi}{\varphi} = \frac{1}{dx + \alpha dy}\,ddx + \frac{\alpha}{dx + \alpha dy}\,ddy + \frac{dy\,(dx\,\frac{d\alpha}{\partial x} + dy\,\frac{d\alpha}{\partial y}) + (dx + \alpha dy)\,\frac{dA}{ddx} - (1 + dy\,\frac{d\alpha}{ddx})\,A}{(dx + \alpha dy)^2}\,\partial x + \frac{-dx\,(dx\,\frac{d\alpha}{\partial x} + dy\,\frac{d\alpha}{\partial y}) + (dx + \alpha dy)\,\frac{dA}{ddy} - (\alpha + dy\,\frac{d\alpha}{ddy})\,A}{(dx + \alpha dy)^2}\,\partial y + \frac{\left\{\begin{array}{l}(ydx - xdy)\,(dx\,\frac{d\alpha}{\partial x} + dy\,\frac{d\alpha}{\partial y}) - (dx + \alpha dy)\,(x\,\frac{dA}{ddx} + y\,\frac{dA}{ddy}) \\ + [x\cdot(1 + dy\,\frac{d\alpha}{ddx}) + y\cdot(\alpha + dy\,\frac{d\alpha}{ddy})]\,A + \frac{f}{e}(dx + \alpha dy)^2\end{array}\right\}}{p\,(dx + \alpha dy)^2}\,dp.$$

Lorsque par la méthode des quadratures on aura φ, on fera cette fonction $= ap^f dq^e$, & le nombre a servira à remplir l'une des conditions du problème auquel appartiendra l'équation proposée.

Je suppose que la fonction α soit donnée, & qu'elle ne soit pas $= \frac{-dx}{dy}$, sans quoi il faudroit, par le moyen de

l'équation entre α & A, trouver une autre valeur de α, & faire enſuite $\varphi = ap^f dy^e$.

PROBLÉME III.

Soit $ddx + \alpha ddy + \zeta ddz + A = 0$, l'équation qu'il faut intégrer, α & ζ étant des fonctions de dimenſion nulle des quantités x, y, z, dx, dy, dz, & A étant une fonction de ces mêmes quantités dont la dimenſion eſt $= 1$; la queſtion ſe réduit à trouver une fonction φ de x, y, z, dx, dy, dz, dont la différence, en faiſant différence de $x = dx$, différence de $y = dy$, & différence de $z = dz$, diviſée par le coëfficient de ddx, ſoit $ddx + \alpha ddy + \zeta ddz + A$.

Si au lieu de faire la différence de $x = dx$, celle de $y = dy$, & celle de $z = dz$, on eût fait la différence de $x = \partial x$, celle de $y = \partial y$, & celle de $z = \partial z$, on auroit eu $ddx + \alpha ddy + \zeta ddz + \gamma \partial x + \delta \partial y + \varepsilon \partial z = 0$. γ, δ & ε ſont des fonctions de x, y, z, dx, dy, dz, qui doivent être telles que $\gamma dx + \delta dy + \varepsilon dz = A$; & ſi on n'eût pas diviſé par la fonction qui multiplioit ddx, on auroit eu $\mu ddx + \alpha \mu ddy + \zeta \mu ddz + \gamma \mu \partial x + \delta \mu \partial y + \varepsilon \mu \partial z = d\varphi$. μ eſt une fonction de x, y, z, dx, dy, dz, qui eſt inconnue: je ſuppoſe que la dimenſion de φ en dx, dy, dz étoit $= e$, & qu'en x, y, z elle étoit $= f$, j'aurai $\mu dx + \alpha \mu dy + \zeta \mu dz = e\varphi$, & $\gamma \mu x + \delta \mu y + \varepsilon \mu z = f\varphi$; donc $f(dx + \alpha dy + \zeta dz) = e(\gamma x + \delta y + \varepsilon z)$, & $\frac{\frac{1}{e} d\varphi}{\varphi} = \frac{ddx + \alpha ddy + \zeta ddz + \gamma \partial x + \delta \partial y + \varepsilon \partial z}{dx + \alpha dy + \zeta dz}$. Je ſubſtitue dans cette équation pour ε ſa valeur $\frac{A - dx\gamma - dy\delta}{dz}$, & pour avoir γ, je fais $\frac{d\left(\frac{1}{dx + \alpha dy + \zeta dz}\right)}{\partial x} = \frac{d\left(\frac{\gamma}{dx + \alpha dy + \zeta dz}\right)}{ddx}$, $\frac{d\left(\frac{1}{dx + \alpha dy + \zeta dz}\right)}{\partial y} = \frac{d\left(\frac{\delta}{dx + \alpha dy + \zeta dz}\right)}{ddx}$,

$$\& d\zeta \cdot \frac{d\left(\frac{1}{dx+\alpha dy+\mathfrak{C}d\zeta}\right)}{\partial\zeta} = \frac{d\left(\frac{A-dx\gamma-dy\delta}{dx+\alpha dy+\mathfrak{C}d\zeta}\right)}{ddx}$$

$$= \frac{d\left(\frac{A}{dx+\alpha dy+\mathfrak{C}d\zeta}\right)}{ddx} - dx \cdot \frac{d\left(\frac{\gamma}{dx+\alpha dy+\mathfrak{C}dx}\right)}{ddx}$$

$$- \frac{\gamma}{dx+\alpha dy+\mathfrak{C}d\zeta} - dy \cdot \frac{d\left(\frac{\delta}{dx+\alpha dy+\mathfrak{C}d\zeta}\right)}{ddx}$$

j'aurai

$$\frac{\gamma}{dx+\alpha dy+\mathfrak{C}d\zeta} = \frac{d\left(\frac{A}{dx+\alpha dy+\mathfrak{C}d\zeta}\right)}{ddx} - dx \cdot \frac{d\left(\frac{1}{dx+\alpha dy+\mathfrak{C}d\zeta}\right)}{\partial x}$$

$$- dy \cdot \frac{d\left(\frac{1}{dx+\alpha dy+\mathfrak{C}d\zeta}\right)}{\partial y} - d\zeta \cdot \frac{d\left(\frac{1}{dx+\alpha dy+\mathfrak{C}d\zeta}\right)}{\partial\zeta},$$

ou

$$\gamma = \frac{\left\{\begin{array}{l}(dx+\alpha dy+\mathfrak{C}d\zeta)\frac{dA}{ddx} - A\left(1+dy\frac{d\alpha}{ddx}+d\zeta\frac{d\mathfrak{C}}{ddx}\right)\\ +dx\left(dy\frac{d\alpha}{\partial x}+d\zeta\frac{d\mathfrak{C}}{\partial x}\right)+dy\left(dy\frac{d\alpha}{\partial y}+d\zeta\frac{d\mathfrak{C}}{\partial y}\right)\\ +d\zeta\left(dy\frac{d\alpha}{\partial\zeta}+d\zeta\frac{d\mathfrak{C}}{\partial\zeta}\right)\end{array}\right\}}{dx+\alpha dy+\mathfrak{C}d\zeta}.$$

Pour avoir δ, je fais

$$\frac{d\left(\frac{\alpha}{dx+\alpha dy+\mathfrak{C}d\zeta}\right)}{\partial x} = \frac{d\left(\frac{\gamma}{dx+\alpha dy+\mathfrak{C}d\zeta}\right)}{ddy},$$

$$\frac{d\left(\frac{\alpha}{dx+\alpha dy+\mathfrak{C}d\zeta}\right)}{\partial y} = \frac{d\left(\frac{\delta}{dx+\alpha dy+\mathfrak{C}d\zeta}\right)}{ddy}, \&$$

$$d\zeta \cdot \frac{d\left(\frac{\alpha}{dx+\alpha dy+\mathfrak{C}d\zeta}\right)}{\partial\zeta} = \frac{d\left(\frac{A-dx\gamma-dy\delta}{dx+\alpha dy+\mathfrak{C}d\zeta}\right)}{ddy};$$

j'aurai

$$\delta = \frac{\left\{\begin{array}{l}(dx+\alpha dy+\mathfrak{C}d\zeta)\frac{dA}{ddy} - A\left(\alpha+dy\frac{d\alpha}{ddy}+d\zeta\frac{d\mathfrak{C}}{ddy}\right)+\alpha\cdot\\ \left[dx\cdot\left(dy\frac{d\alpha}{\partial x}+d\zeta\frac{d\mathfrak{C}}{\partial x}\right)+dy\cdot\left(dy\frac{d\alpha}{\partial y}+d\zeta\frac{d\mathfrak{C}}{\partial y}\right)+d\zeta\cdot\left(dy\frac{d\alpha}{\partial\zeta}+\right.\right.\\ \left.\left.d\zeta\frac{d\mathfrak{C}}{\partial\zeta}\right)\right]-(dx+\alpha dy+\mathfrak{C}d\zeta)\left(dx\frac{d\alpha}{\partial x}+dy\frac{d\alpha}{\partial y}+d\zeta\frac{d\alpha}{\partial\zeta}\right)\end{array}\right\}}{dx+\alpha dy+\mathfrak{C}d\zeta};$$

& par analogie,

$$\varepsilon = \frac{\left\{\begin{array}{l}(dx+\alpha dy+\zeta dz)\,\frac{dA}{ddz} - A\,(dy\,\frac{d\alpha}{ddz}+\zeta+dz\,\frac{d\zeta}{ddz})+\zeta\,.\\ [dx\,.\,(dy\,\frac{d\alpha}{\partial x}+dz\,\frac{d\zeta}{\partial x})+dy\,.\,(dy\,\frac{d\alpha}{\partial y}+dz\,\frac{d\zeta}{\partial y})+dz\,.\,(dy\,\frac{d\alpha}{\partial z}+\\ dz\,\frac{d\zeta}{\partial z})] - (dx+\alpha dy+\zeta dz)\,(dx\,\frac{d\zeta}{\partial x}+dy\,\frac{d\zeta}{\partial y}+dz\,\frac{d\zeta}{\partial z})\end{array}\right\}}{dx+\alpha dy+\zeta dz}.$$

Je substitue les valeurs de γ, δ, ε dans $\frac{f}{e}(dx+\alpha dy+\zeta dz) = \gamma x+\delta y+\varepsilon z$; j'aurai

$$\frac{f}{e}(dx+\alpha dy+\zeta dz)^2 = (x+y\alpha+z\zeta)\,[dx\,.\,(dy\,\tfrac{d\alpha}{\partial x}+dz\,\tfrac{d\zeta}{\partial x})+dy\,.\,(dy\,\tfrac{d\alpha}{\partial y}+dz\,\tfrac{d\alpha}{\partial y})+dz\,.\,(dy\,\tfrac{d\alpha}{\partial z}+dz\,\tfrac{d\zeta}{\partial z})] - (dx+\alpha dy+\zeta dz)\,[y\,.\,(dx\,\tfrac{d\alpha}{\partial x}+dy\,\tfrac{d\alpha}{\partial y}+dz\,\tfrac{d\alpha}{\partial z})+z\,.\,(dx\,\tfrac{d\zeta}{\partial x}+dy\,\tfrac{d\zeta}{\partial y}+dz\,\tfrac{d\zeta}{\partial z})]+(dx+\alpha dy+\zeta dz)\,(x\,\tfrac{dA}{ddx}+y\,\tfrac{dA}{ddy}+z\,\tfrac{dA}{ddz}) - A\,[x\,.\,(1+dz\,\tfrac{d\zeta}{ddx}+dy\,\tfrac{d\alpha}{ddx})+y\,.\,(\alpha+dy\,\tfrac{d\alpha}{ddy}+dz\,\tfrac{d\zeta}{ddy})+z\,.\,(dy\,\tfrac{d\alpha}{ddz}+\zeta+dz\,\tfrac{d\zeta}{ddz})]$$, & cette équation contiendra les conditions entre α, ζ & A: on sait d'ailleurs que les fonctions α, ζ, doivent être telles que

$$\alpha\,\frac{d\zeta}{ddx} - \zeta\,\frac{d\alpha}{ddx}+\frac{d\alpha}{ddz} - \frac{d\zeta}{ddy} = 0.$$

Les fonctions γ, δ, ε étant connues, on aura φ par les quadratures, & on fera cette fonction $= ap^f\,dq^e$.

On peut avoir fait dy constant, & par conséquent la fonction α peut n'être pas donnée; dans ce cas, il faudra trouver pour α une fonction de x, de y, de z, de dx, de dy & de dz, qui satisfasse aux deux équations précédentes entre

α, $\mathcal{C}$ & A; & comme $\frac{-dx-dz\mathcal{C}}{dy}$ satisfait généralement à ces deux équations, il s'ensuit que l'équation proposée étant $ddx + \mathcal{C}ddz + A = 0$, on peut toûjours prendre $ddx + \frac{-dx-dz\mathcal{C}}{dy}ddy + \mathcal{C}ddz + A = 0$. Mais cette valeur de α est de toutes celles qui sont possibles, la seule qui ne puisse nous servir; ainsi, soit que α ne fût pas donnée, soit que l'étant, elle fût $= \frac{-dx-dz\mathcal{C}}{dy}$, il faudroit en trouver quelqu'autre valeur qui satisfit également aux deux équations entre α, $\mathcal{C}$ & A; & lorsqu'on auroit la fonction φ, on la feroit $= ap^f dy^e$. Mais voyons si on ne pourroit pas résoudre de quelqu'autre manière l'équation $ddx + \frac{-dx-dz\mathcal{C}}{dy}ddy + \mathcal{C}ddz + A = 0$.

Si on avoit fait la différence de $x = \partial x$, celle de $y = \partial y$, & celle de $z = \partial z$, on auroit eu $ddx + \frac{-dx-dz\mathcal{C}}{dy}ddy + \mathcal{C}ddz + \gamma\partial x + \delta\partial y + \varepsilon\partial z = 0$.

Les fonctions γ, δ, ε doivent être telles que $\gamma dx + \delta dy + \varepsilon dz = A$; & si on n'avoit pas divisé par la fonction qui multiplioit ddx, on auroit eu $\mu ddx + \mu.\frac{-dx-dz\mathcal{C}}{dy}ddy + \mathcal{C}\mu ddz + \gamma\mu\partial x + \delta\mu\partial y + \varepsilon\mu\partial z = d\varphi$.

Je suppose que la dimension de φ en x, y, z étoit $= f$, j'aurai $\gamma\mu x + \delta\mu y + \varepsilon\mu z = f\varphi$; donc

$$\frac{\frac{1}{f}d\varphi}{\varphi} = \frac{ddx + \frac{-dx-dz\mathcal{C}}{dy}ddy + \mathcal{C}ddz + \gamma\partial x + \delta\partial y + \varepsilon\partial z}{\gamma x + \delta y + \varepsilon z}.$$

Il s'agit d'avoir les fonctions γ, δ & ε; pour cet effet, je prends $dy\,\delta = A - dx\gamma - dz\varepsilon$,

$$dy\,\frac{d\delta}{ddx} = \frac{dA}{ddx} - \gamma - dx\,\frac{d\gamma}{ddx} - dz\,\frac{d\varepsilon}{ddx},$$

$dy\,\frac{d\mathcal{S}}{ddz} = \frac{dA}{ddz} - dx\mathcal{C}\,\frac{d\gamma}{ddx} + dx\gamma\,\frac{d\mathcal{C}}{ddx} - dx\,\frac{d\mathcal{C}}{\partial x} - \varepsilon - dz\mathcal{C}\,\frac{d\varepsilon}{ddx} + dz\varepsilon\,\frac{d\mathcal{C}}{ddx} - dz\,\frac{d\mathcal{C}}{\partial z}$, &

je substitue ces valeurs dans l'équation

$dy\mathcal{C}\,\frac{d\mathcal{S}}{ddx} - dy\mathcal{S}\,\frac{d\mathcal{C}}{ddx} + dy\,\frac{d\mathcal{C}}{\partial y} - dy\,\frac{d\mathcal{S}}{ddz} = 0$;

j'aurai $\varepsilon = -dx\,\frac{d\mathcal{C}}{\partial x} - dy\,\frac{d\mathcal{C}}{\partial y} - dz\,\frac{d\mathcal{C}}{\partial z} + A\,\frac{d\mathcal{C}}{ddx} - \mathcal{C}\,\frac{dA}{ddx} + \frac{dA}{ddz} + \mathcal{C}\gamma$.

Soit, pour abréger, $-dx\,\frac{d\mathcal{C}}{\partial x} - dy\,\frac{d\mathcal{C}}{\partial y} - dz\,\frac{d\mathcal{C}}{\partial z} + A\,\frac{d\mathcal{C}}{ddx} - \mathcal{C}\,\frac{dA}{ddx} + \frac{dA}{ddz} = B$, on aura $\varepsilon = B + \mathcal{C}\gamma$, $\frac{d\varepsilon}{ddx} = \frac{dB}{ddx} + \mathcal{C}\,\frac{d\gamma}{ddx} + \gamma\,\frac{d\mathcal{C}}{ddx}$, $\frac{d\varepsilon}{ddz} = \frac{dB}{ddz} + \gamma\,\frac{d\mathcal{C}}{ddz} + \mathcal{C}^2\,\frac{d\gamma}{ddx} - \mathcal{C}\gamma\,\frac{d\mathcal{C}}{ddx} + \mathcal{C}\,\frac{d\mathcal{C}}{\partial x}$.

Je substitue ces valeurs dans l'équation

$\mathcal{C}\,\frac{d\varepsilon}{ddx} - \varepsilon\,\frac{d\mathcal{C}}{ddx} + \frac{d\mathcal{C}}{\partial z} - \frac{d\varepsilon}{ddz} = 0$;

j'aurai $\gamma = \dfrac{B\,\frac{d\mathcal{C}}{ddx} - \mathcal{C}\,\frac{dB}{ddx} + \frac{dB}{ddz} + \mathcal{C}\,\frac{d\mathcal{C}}{\partial x} - \frac{d\mathcal{C}}{\partial z}}{\mathcal{C}\,\frac{d\mathcal{C}}{ddx} - \frac{d\mathcal{C}}{ddz}}$,

& par conséquent

$\varepsilon = \dfrac{2\left(\mathcal{C}\,\frac{d\mathcal{C}}{ddx} - \frac{d\mathcal{C}}{ddz}\right)B - \mathcal{C}^2\,\frac{dB}{ddx} + \mathcal{C}\,\frac{dB}{ddz} + \mathcal{C}^2\,\frac{d\mathcal{C}}{\partial x} - \mathcal{C}\,\frac{d\mathcal{C}}{\partial z}}{\mathcal{C}\,\frac{d\mathcal{C}}{ddx} - \frac{d\mathcal{C}}{ddz}}$;

& en substituant pour γ & ε leurs valeurs dans $dy\mathcal{S} = A - dx\gamma - dz\varepsilon$, j'aurai $\mathcal{S} =$ &c.

Les fonctions γ, $\mathcal{S}$ & ε étant connues, on aura φ par les quadratures, & on fera cette fonction $= ap^f$.

Il peut se faire que f étoit $= 0$, auquel cas on aura

$\mu ddx + \mu . \frac{-dx - dz\zeta}{dy} ddy + \zeta \mu ddz + \gamma \mu dx +$
$\delta \mu dy + \epsilon \mu dz = d\varphi$, & il n'y aura que la fonction μ d'inconnue, laquelle devra être telle que $\frac{d\mu}{ddz} = \zeta \frac{d\mu}{ddx} + \mu \frac{d\zeta}{ddx}$,
$\frac{d\mu}{\partial x} = \gamma \frac{d\mu}{ddx} + \mu \frac{d\gamma}{ddx}$ & $\frac{d\mu}{\partial y} = \delta \frac{d\mu}{ddx} + \mu \frac{d\delta}{ddx}$.

Ayant μ, on aura φ, & on fera cette fonction $= a$.

LE

LE CALCUL DES ÉQUATIONS

AUX TROISIÉMES DIFFÉRENCES.

PROBLÉME I.

SOIT $dddx + \alpha ddy + A = 0$, l'équation qu'il faut intégrer, α étant une fonction de dimension nulle des quantités x, y, dx, dy, ddx & ddy, & A étant une fonction de ces mêmes quantités, dont la dimension est $= 1$.

La question se réduit à trouver une fonction φ de x, y, dx, dy, ddx & ddy, dont la différence, en faisant différence de $x = dx$, différence de $y = dy$, différence de $dx = ddx$, & différence de $dy = ddy$, divisée par le coëfficient de $dddx$, soit $dddx + \alpha ddy + A$.

Si au lieu de faire la différence de $x = dx$, celle de $y = dy$, celle de $dx = ddx$, & celle de $dy = ddy$, on eût fait la différence de $x = \partial x$, celle de $y = \partial y$, celle de $dx = \partial dx$, & celle de $dy = \partial dy$, on auroit eu $dddx + \alpha ddy + \zeta \partial dx + \gamma \partial dy + \delta \partial x + \varepsilon \partial y = 0$.

ζ, γ, δ, ε sont des fonctions de x, y, dx, dy, ddx & ddy, qui doivent être telles que $\zeta ddx + \gamma ddy + \delta dx + \varepsilon dy = A$; & si on n'eût pas divisé par la fonction qui multiplioit $dddx$, on auroit eu $\mu dddx + \alpha \mu ddy + \zeta \mu \partial dx + \gamma \mu \partial dy + \delta \mu \partial x + \varepsilon \mu \partial y = d\varphi$.

μ est une fonction de x, y, dx, dy, ddx & ddy, qui est inconnue.

Si avant de prendre la différence de φ au lieu de ddx & de ddy, on eût mis dans cette fonction $\frac{dx\,dr}{x}$ & $\frac{dx\,ds}{x}$, & si après en avoir pris la différence au lieu de dr & de ds, on eût remis dans cette différence $\frac{x\,ddx}{dx}$ & $\frac{x\,ddy}{dx}$, on auroit

eu $\mu d\left(\frac{dx\,dr}{x}\right) + \alpha\mu d\left(\frac{dx\,ds}{x}\right) + \zeta\mu\partial dx +$
$\gamma\mu\partial dy + \delta\mu\partial x + \varepsilon\mu\partial y = d\varphi.$

Mais $d\left(\frac{dx\,dr}{x}\right) = \frac{dx}{x}ddr + \frac{ddx}{dx}\partial dx - \frac{ddx}{x}\partial x$
& $d\left(\frac{dx\,ds}{x}\right) = \frac{dx}{x}dds + \frac{ddy}{dx}\partial dx + \frac{-ddy}{x}\partial x;$
on auroit donc eu $\mu\frac{dx}{x}ddr + \alpha\mu\frac{dx}{x}dds +$
$\left(\zeta\mu + \frac{\mu ddx}{dx} + \alpha\frac{\mu ddy}{dx}\right)\partial dx + \gamma\mu\partial dy +$
$\left(\delta\mu - \frac{\mu ddx}{x} - \alpha\frac{\mu ddy}{x}\right)\partial x + \varepsilon\mu\partial y = d\varphi.$

Je ſuppoſe préſentement que la dimenſion de φ en dx, dy, dr & ds, étoit $= e$, & qu'en x & y elle étoit $= f$; j'aurai $2\mu ddx + 2\alpha\mu ddy + \zeta\mu dx + \gamma\mu dy = e\varphi$, & $\delta\mu x + \varepsilon\mu y - \mu ddx - \alpha\mu ddy = f\varphi$; donc $f(2ddx + 2\alpha ddy + \zeta dx + \gamma dy) =$
$e(\delta x + \varepsilon y - ddx - \alpha ddy)$,
& $\frac{\frac{1}{e}d\varphi}{\varphi} = \frac{dddx + \alpha dddy + \zeta\partial dx + \gamma\partial dy + \delta\partial x + \varepsilon\partial y}{2ddx + 2\alpha ddy + \zeta dx + \gamma dy}.$

Il s'agit maintenant d'avoir les fonctions ζ, γ, δ & ε; pour cet effet je prends $dy\varepsilon = A - ddx\zeta - ddy\gamma - dx\delta$,
$dy\frac{d\varepsilon}{dddx} = \frac{dA}{dddx} - \zeta - ddx\frac{d\zeta}{dddx} - ddy\frac{d\gamma}{dddx} - dx\frac{d\delta}{dddx}$,
$dy\frac{d\varepsilon}{dddy} = \frac{dA}{dddy} - ddx\alpha\frac{d\zeta}{dddx} + ddx\zeta\frac{d\alpha}{dddx} -$
$ddx\frac{d\alpha}{\partial dx} - \gamma - ddy\alpha\frac{d\gamma}{dddx} + ddy\gamma\frac{d\alpha}{dddx} -$
$ddy\frac{d\alpha}{\partial dy} - dx\alpha\frac{d\delta}{dddx} + dx\delta\frac{d\alpha}{dddx} - dx\frac{d\alpha}{\partial x}$, &
je ſubſtitue ces valeurs dans l'équation
$dy\alpha\frac{d\varepsilon}{dddx} - dy\varepsilon\frac{d\alpha}{dddx} + dy\frac{d\alpha}{\partial dy} - dy\frac{d\varepsilon}{dddy} = 0;$

j'aurai $\gamma = -dx\frac{d\alpha}{\partial x} - dy\frac{d\alpha}{\partial y} - ddx\frac{\frac{d\alpha}{\partial dx}}{\partial dx} - ddy\frac{d\alpha}{\partial dy} + A\frac{d\alpha}{dddx} - \alpha\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{dddy} + \alpha\mathcal{C}$,

ou $\gamma = -\tilde{d}\alpha + A\frac{d\alpha}{dddx} - \alpha\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{dddy} + \alpha\mathcal{C}$.

(Par $\tilde{d}\alpha$ j'entends la différence de α prise à l'ordinaire en faisant tout varier, excepté ddx & ddy.

Soit, pour abréger, $-\tilde{d}\alpha + A\frac{d\alpha}{dddx} - \alpha\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{dddy} = B$,

on aura $\gamma = B + \alpha\mathcal{C}$, $\frac{d\gamma}{dddx} = \frac{dB}{dddx} + \alpha\frac{d\mathcal{C}}{dddx} + \mathcal{C}\frac{d\alpha}{dddx}$;

$\frac{d\gamma}{dddy} = \frac{dB}{dddy} + \mathcal{C}\frac{d\alpha}{dddy} + \alpha^2\frac{d\mathcal{C}}{dddx} - \alpha\mathcal{C}\frac{d\alpha}{dddx} + \alpha\frac{d\alpha}{\partial dx}$;

& en substituant ces valeurs dans l'équation

$\alpha\frac{d\gamma}{dddx} - \gamma\frac{d\alpha}{dddx} + \frac{d\alpha}{\partial dy} - \frac{d\gamma}{dddy} = 0$, on aura

$\mathcal{C} = \frac{B\frac{d\alpha}{dddx} - \alpha\frac{dB}{dddx} + \frac{dB}{dddy} + \alpha\frac{d\alpha}{\partial dx} - \frac{d\alpha}{\partial dy}}{\alpha\frac{d\alpha}{dddx} - \frac{d\alpha}{dddy}}$, & par conséquent $\gamma = \frac{(2\alpha\frac{d\alpha}{dddx} - \frac{d\alpha}{dddy})B - \alpha^2\frac{dB}{dddx} + \alpha\frac{dB}{dddy} + \alpha^2\frac{d\alpha}{\partial dx} - \alpha\frac{d\alpha}{\partial dy}}{\alpha\frac{d\alpha}{dddx} - \frac{d\alpha}{dddy}}$.

Les fonctions $\mathcal{C}$, γ étant connues, pour avoir δ, je prends

$dy\frac{d\mathfrak{e}}{\partial dx} = \frac{dA}{\partial dx} - ddx\frac{d\mathcal{C}}{\partial dx} - ddy\mathcal{C}\frac{d\gamma}{dddx} + ddy\gamma\frac{d\mathcal{C}}{dddx} - ddy\frac{d\mathcal{C}}{\partial dy} - \delta - dx\mathcal{C}\frac{d\delta}{dddx} + dx\delta\frac{d\mathcal{C}}{dddx} - dx\frac{d\mathcal{C}}{\partial x}$,

& je substitue pour $dy\mathfrak{e}$, $dy\frac{d\mathfrak{e}}{dddx}$ & $dy\frac{d\mathfrak{e}}{\partial dx}$ leurs valeurs dans l'équation $dy\mathcal{C}\frac{d\mathfrak{e}}{dddx} - dy\mathfrak{e}\frac{d\mathcal{C}}{dddx} + dy\frac{d\mathcal{C}}{\partial dy} - dy\frac{d\mathfrak{e}}{\partial dx} = 0$:

j'aurai $\delta = -dx\frac{d\mathcal{C}}{\partial x} - dy\frac{d\mathcal{C}}{\partial y} - ddx\frac{d\mathcal{C}}{\partial dx} - ddy\frac{d\mathcal{C}}{\partial dy} + A\frac{d\mathcal{C}}{dddx} - \mathcal{C}\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{\partial dx} + \mathcal{C}^2$, ou

$$\delta = -\tilde{d}\mathcal{C} + A\frac{d\mathcal{C}}{dddx} - \mathcal{C}\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{\partial dx} + \mathcal{C}^2.$$

Pour avoir ε, je prends $dx\delta = A - \mathcal{C}ddx - \gamma ddy - dy\varepsilon$,

$$dx\frac{d\delta}{dddx} = \frac{dA}{dddx} - \mathcal{C} - ddx\frac{d\mathcal{C}}{dddx} - ddy\frac{d\gamma}{dddx} - dy\frac{d\varepsilon}{dddx},$$

$$dx\frac{d\delta}{\partial dy} = \frac{dA}{\partial dy} + ddx\mathcal{C}\frac{d\gamma}{dddx} - ddx\gamma\frac{d\mathcal{C}}{dddx} - ddx\frac{d\gamma}{\partial dx}$$
$$- ddy\frac{d\gamma}{\partial dy} - \varepsilon - dy\gamma\frac{d\varepsilon}{dddx} + dy\varepsilon\frac{d\gamma}{dddx} - dy\frac{d\gamma}{\partial y},$$

& je substitue ces valeurs dans l'équation

$$dx\gamma\frac{d\delta}{dddx} - dx\delta\frac{d\gamma}{dddx} + dx\frac{d\gamma}{\partial x} - dx\frac{d\delta}{\partial dy} = 0;$$

j'aurai $\varepsilon = -\tilde{d}\gamma + A\frac{d\gamma}{dddx} - \gamma\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{\partial dy} + \mathcal{C}\gamma.$

Les fonctions $\mathcal{C}$, γ, δ & ε étant connues, on mettra leurs valeurs dans $f(2ddx + 2\alpha ddy + \mathcal{C}dx + \gamma dy) = e(\delta x + \varepsilon y - ddx - \alpha ddy)$, & on aura les conditions entre α & A, pour qu'il soit possible que ces deux fonctions appartiennent à une même fonction φ: on substituera aussi ces fonctions dans

$$\frac{\frac{x}{e}d\varphi}{\varphi} = \frac{dddx + \alpha dddy + \mathcal{C}\partial dx + \gamma\partial dy + \delta\partial x + \varepsilon\partial y}{2ddx + 2\alpha ddy + \mathcal{C}dx + \gamma dy};$$

& on aura φ par le moyen de cette équation; on fera cette fonction $= ap^f dq^e$, & le problème sera résolu.

Voilà en général de quelle manière il faudroit s'y prendre pour retrouver la fonction qui auroit produit $dddx + \alpha dddy + A$. Il nous reste à parcourir les différens cas qui peuvent arriver.

PREMIER CAS. $\alpha =$ ni $\frac{-dx}{dy}$ ni $\frac{-ddx}{ddy}$.

Ce cas-ci & les suivans se divisent en plusieurs autres.

1.° Il peut se faire que ni e ni f ne fussent $= 0$, & ce sera le cas général que nous venons de résoudre, pourvû que

$\alpha \frac{d\alpha}{dddx} - \frac{d\alpha}{dddy}$ & par conſéquent $B \frac{d\alpha}{dddx} - \alpha \frac{dB}{dddx} + \frac{dB}{dddy} + \alpha \frac{d\alpha}{\partial dx} - \frac{d\alpha}{\partial dy}$ ne ſoient pas $= 0$; car dans ce cas il faudroit trouver la valeur de $\mathcal{C}$ par le moyen de l'équation $\alpha \frac{d\mathcal{C}}{dddx} - \mathcal{C} \frac{d\alpha}{dddx} + \frac{d\alpha}{\partial dx} - \frac{d\mathcal{C}}{dddy} = 0$.

2.° Il peut ſe faire que e ſût $= 0$, f ne l'étant pas; on aura $\mathcal{C} = \frac{-dyB - 2(ddx + \alpha ddy)}{dx + \alpha dy}$, $\gamma = \frac{dxB - 2\alpha(ddx + \alpha ddy)}{dx + \alpha dy}$,

$\delta = -\tilde{d}\mathcal{C} + A \frac{d\mathcal{C}}{dddx} - \mathcal{C} \frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{\partial dx} + \mathcal{C}^2$,

$\varepsilon = -\tilde{d}\gamma + A \frac{dy}{dddx} - \gamma \frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{\partial dy} + \mathcal{C}\gamma$,

& $\frac{\int d\varphi}{\varphi} = \frac{dddx + \alpha dddy + \mathcal{C}\partial dx + \gamma \partial dy + \delta \partial x + \varepsilon \partial y}{\delta x + \varepsilon y - ddx - \alpha ddy}$,

on ſera $\varphi = ap^f$.

3.° Il peut ſe faire que f étoit $= 0$, e ne l'étant pas; on aura $\mathcal{C}$ & γ ainſi que dans le cas général, enſuite δ & ε par le moyen des équations $\delta x + \varepsilon y - ddx - \alpha ddy = 0$, $\mathcal{C} ddx + \gamma ddy + \delta dx + \varepsilon dy = A$, & on ſera $\varphi = adq^e$.

4.° Il peut ſe faire que les nombres e & f étoient tous les deux en même temps $= 0$; on aura

$\mathcal{C} = \frac{-dyB - 2(ddx + \alpha ddy)}{dx + \alpha dy}$, $\gamma = \frac{dxB - 2\alpha(ddx + \alpha ddy)}{dx + \alpha dy}$,

$\delta = \frac{\left\{\begin{matrix} -dy\,(dx + \alpha dy)\,(ddx + \alpha ddy) + y\,(dx + \alpha dy) \\ A - y\,(dxddy - dyddx)\,B + 2y\,(ddx + \alpha ddy)^2 \end{matrix}\right\}}{(ydx - xdy)\,(dx + \alpha dy)}$,

$\varepsilon = \frac{\left\{\begin{matrix} dx\,(dx + \alpha dy)\,(ddx + \alpha ddy) - x\,(dx + \alpha dy) \\ A + x\,(dxddy - dyddx)\,B - 2x\,(ddx + \alpha ddy)^2 \end{matrix}\right\}}{(ydx - xdy)\,(dx + \alpha dy)}$,

& $\mu dddx + \alpha\mu dddy + \mathcal{C}\mu\partial dx + \gamma\mu\partial dy + \delta\mu\partial x + \varepsilon\mu\partial y = d\varphi$. On tâchera de trouver une fonction μ telle que $\frac{d\mu}{dddy} = \frac{d(\alpha\mu)}{dddx}$, $\frac{d\mu}{\partial dz} = \frac{d\cdot(\mathcal{C}\mu)}{dddx}$ &

$\frac{d\mu}{\partial x} = \frac{d(\delta\mu)}{dddx}$, & lorſqu'on aura φ, on ſera cette fonction $= a$.

DEUXIÈME CAS. $\alpha = \frac{-dx}{dy}$.

On aura $\gamma = \frac{-(dx\,ddy - dy\,ddx) + dy\left(dx\frac{dA}{dddx} + dy\frac{dA'}{dddy}\right) - dx\,dy\,\mathfrak{C}}{dy^2}$,

$$\delta dx + \varepsilon dy = \frac{\left\{\begin{matrix} dy^2 A - dy\,ddy\left(dx\frac{dA}{dddx} + dy\frac{dA}{dddy}\right) + ddy \\ (dx\,ddy - dy\,ddx) + dy\,(dx\,ddy - dy\,ddx)\,\mathfrak{C} \end{matrix}\right\}}{dy^2},$$

$$\mu \cdot \frac{-3(dx\,ddy - dy\,ddx) + dy\left(dx\frac{dA}{dddx} + dy\frac{dA}{dddy}\right)}{dy} = e\varphi,$$

$$\mu \cdot \frac{x dy\delta + y dy\varepsilon + dx\,ddy - dy\,ddx}{dy} = f\varphi.$$

1.° Il peut ſe faire que ni e ni f n'étoient $= 0$.

Soit, pour abréger, $-3(dx\,ddy - dy\,ddx) + dy\left(dx\frac{dA}{dddx} + dy\frac{dA}{dddy}\right) = F$, & $dy^2 A - dy\,ddy\left(dx\frac{dA}{dddx} + dy\frac{dA}{dddy}\right) + ddy\,(dx\,ddy - dy\,ddx) = C$, on aura

$$\frac{\frac{x}{e}d\varphi}{\varphi} = \frac{dy}{F}dddx + \frac{-dx}{F}dddy + \frac{dy\,\mathfrak{C}}{F}\partial dx + \frac{dy\,\gamma}{F}\partial dy + \frac{dy\,\delta}{F}\partial x + \frac{C + dy\,(dx\,ddy - dy\,ddx)\,\mathfrak{C} - dx\,dy^2\delta}{dy^2 F}\partial y.$$

Pour avoir $\mathfrak{C}$, je fais $\frac{d\left(\frac{1}{F}\right)}{\partial dx} = \frac{d\left(\frac{\mathfrak{C}}{F}\right)}{dddx}$, $\frac{d\left(\frac{1}{F}\right)}{\partial x} = \frac{d\left(\frac{\delta}{F}\right)}{dddx}$,

$$\& \; dy^3 \cdot \frac{d\left(\frac{1}{F}\right)}{\partial y} = \frac{d\left(\frac{C + dy\,(dx\,ddy - dy\,ddx)\,\mathfrak{C} - dx\,dy^2\delta}{F}\right)}{dddx} =$$

$$\frac{d\left(\frac{C}{F}\right)}{dddx} + dy\,(dx\,ddy - dy\,ddx)\cdot\frac{d\left(\frac{\mathfrak{C}}{F}\right)}{dddx} - \frac{dy^2\mathfrak{C}}{F} - dx\,dy^2\cdot\frac{d\left(\frac{\delta}{F}\right)}{dddx}.$$

j'aurai $\mathcal{C} = \frac{dy^2(dx\frac{dF}{\partial x} + dy\frac{dF}{\partial y}) - dy\,(dxddy - dyddx)\frac{dF}{\partial dx} + F\frac{dC}{dddx} - C\frac{dF}{dddx}}{dy^2 F}$.

Les fonctions $\mathcal{C}$, γ, étant connues, on aura

$\delta = -\tilde{d}\mathcal{C} + A\frac{d\mathcal{C}}{dddx} - \mathcal{C}\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{\partial dx} + \mathcal{C}^2$,

$\varepsilon = -\tilde{d}\gamma + A\frac{d\gamma}{dddx} - \gamma\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{\partial dy} + \mathcal{C}\gamma$;

& en substituant les valeurs de ces fonctions dans l'équation $\frac{f}{e}F = xdy\delta + ydy\varepsilon + dxddy - dyddx$, on aura les conditions de A, pour que l'équation $dddx + \frac{-dx}{dy}dddy + A = 0$, soit possible.

2.° Il peut se faire que e fût $= 0$, f ne l'étant pas; on aura $dx\frac{dA}{dddx} + dy\frac{dA}{dddy} = 3\left(\frac{dxddy - dyddx}{dy}\right)$,

$\gamma = \frac{2(dxddy - dyddx) - dxdy\mathcal{C}}{dy^2}$, $\delta dx + \varepsilon dy = \frac{dy^2 A - 2ddy\,(dxddy - dyddx) + dy\,(dxddy - dyddx)\mathcal{C}}{dy^2}$,

$\mu dddx + \frac{-\mu dx}{dy}dddy + \mathcal{C}\mu\partial dx + \gamma\mu\partial dy + \delta\mu\partial x + \varepsilon\mu\partial y = d\varphi$, $\mu.\frac{xdy\delta + ydy\varepsilon + dxddy - dyddx}{dy} = f\varphi$.

La fonction $\mathcal{C}$ devra être telle que $dx\frac{d\mathcal{C}}{dddx} + dy\frac{d\mathcal{C}}{dddy} + 1 = 0$.

$\mathcal{C}$ devra, par exemple, être $= \frac{dxddy - 2dyddx}{dxdy}$.

Les fonctions $\mathcal{C}$ & γ étant données, on aura

$\delta = -\tilde{d}\mathcal{C} + A\frac{d\mathcal{C}}{dddx} - \mathcal{C}\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{\partial dx} + \mathcal{C}^2$,

$\varepsilon = -\tilde{d}\gamma + A\frac{d\gamma}{dddx} - \gamma\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{\partial dy} + \mathcal{C}\gamma$ &

$\frac{\frac{1}{f}d\varphi}{\varphi} = \frac{dydddx - dxdddy + dy\mathcal{C}\partial dx + dy\gamma\partial dy + dy\delta\partial x + dy\varepsilon\partial y}{xdy\delta + ydy\varepsilon + dxddy - dyddx}$.

Lorsqu'on aura la fonction φ, on la fera $= ap^f$.

3.° Il peut se faire que f fût $= 0$, e ne l'étant pas; on aura δ & ε par le moyen des équations

$$x\delta + y\varepsilon = -\left(\frac{dxddy - dyddx}{dy}\right),$$

$$\delta dx + \varepsilon dy = \frac{\left\{\begin{array}{l} dy^2A - dyddy\left(dx\dfrac{dA}{dddx} + dy\dfrac{dA}{dddy}\right) + ddy \\ (dxddy - dyddx) + dy\,(dxddy - dyddx)\mathfrak{C} \end{array}\right\}}{dy^2};$$

& on aura $\mathfrak{C}$, ainsi que dans le cas 1.°

4.° Il peut se faire que les nombres e & f étoient tous les deux en même temps $= 0$, on aura $dx\frac{dA}{dddx} + dy\frac{dA}{dddy} = 3\left(\frac{dxddy - dyddx}{dy}\right)$, $\gamma = \frac{2(dxddy - dyddx) - dxdy\mathfrak{C}}{dy^2}$,

$$\delta = \frac{ydy\,(dxddy - dyddx)\mathfrak{C} + ydy^2A - (2yddy - dy^2)(dxddy - dyddx)}{dy^2\,(ydx - xdy)},$$

$$\varepsilon = \frac{-xdy\,(dxddy - dyddx)\mathfrak{C} - xdy^2A + (2xddy - dxdy)(dxddy - dyddx)}{dy^2\,(ydx - xdy)};$$

& $\mu dddx + \frac{-\mu dx}{dy}dddy + \mathfrak{C}\mu\partial dx + \gamma\mu\partial y + \delta\mu\partial x + \varepsilon\mu\partial y = d\Phi$.

La fonction $\mathfrak{C}$ devra, ainsi que dans le cas 2.°, être telle que $dx\frac{d\mathfrak{C}}{dddx} + dy\frac{d\mathfrak{C}}{dddy} + 1 = 0$.

Les fonctions $\mathfrak{C}$, γ, δ, ε étant données, on tâchera de trouver une fonction μ de x, de y, de dx, de dy & de $\frac{dyddx - dxddy}{dy}$, qui soit telle que $\frac{d\mu}{\partial dx} = \frac{d(\mathfrak{C}\mu)}{dddx}$ & $\frac{d\mu}{\partial x} = \frac{d(\delta\mu)}{dddx}$.

Ayant μ, on aura Φ, & on fera cette fonction $= a$.

TROISIÈME CAS. $a = \frac{-ddx}{ddy}$.

On aura $\gamma = \frac{-ddx\mathfrak{C} - A + ddx\frac{dA}{dddx} + ddy\frac{dA}{dddy}}{ddy}$;

δdx

$$\delta dx + \varepsilon dy = 2A - ddx\,\frac{dA}{dddx} - ddy\,\frac{dA}{dddy};$$

$$\mu.\,\frac{(dxddy - dyddx)\mathcal{C} + dy\left(-A + ddx\,\frac{dA}{dddx} + ddy\,\frac{dA}{dddy}\right)}{ddy} = e\varphi,$$

$$\mu(\delta x + \varepsilon y) = f\varphi, \text{ \& } \mu\,dddx + \frac{-\mu ddx}{ddy}\,dddy + \mathcal{C}\mu\partial dx + \gamma\mu\partial dy + \delta\mu\partial x + \varepsilon\mu\partial y = d\varphi.$$

Soit $-A + ddx\,\frac{dA}{dddx} + ddy\,\frac{dA}{dddy} = B$, on aura $\mathcal{C}ddx + \gamma ddy = B$, $\delta dx + \varepsilon dy = A - B$, $\mu(\mathcal{C}dx + \gamma dy) = e\varphi$, $\mu(\delta x + \varepsilon y) = f\varphi$, \& $\mu\,dddx + \frac{-\mu ddx}{ddy}\,dddy + \mathcal{C}\mu\partial dx + \gamma\mu\partial dy + \delta\mu\partial x + \varepsilon\mu\partial y = d\varphi$; donc

$$\frac{\frac{1}{e}d\varphi}{\varphi} = \frac{dddx + \frac{-ddx}{ddy}\,dddy + \mathcal{C}\partial dx + \gamma\partial dy + \delta\partial x + \varepsilon\partial y}{\mathcal{C}dx + \gamma dy};$$

1.° Je suppose que ni e ni f n'étoient $= 0$; en substituant pour γ sa valeur $\frac{-\mathcal{C}ddx + B}{ddy}$ dans $\mathcal{C}\frac{d\gamma}{dddx} - \gamma\frac{d\mathcal{C}}{dddx} + \frac{d\mathcal{C}}{\partial dy} - \frac{d\gamma}{\partial dx} = 0$, on trouvera que $\mathcal{C}$ doit être telle que $ddx\,\frac{d\mathcal{C}}{\partial dx} + ddy\,\frac{d\mathcal{C}}{\partial dy} - \mathcal{C}^2 + \mathcal{C}\frac{dB}{dddx} - B\frac{d\mathcal{C}}{dddx} - \frac{dB}{\partial dx} = 0$. On voit de plus que la dimension de $\mathcal{C}$ en ddx \& ddy doit être $= 1$, en dx \& $dy = -1$, en x \& $y = 0$. Lorsqu'on aura $\mathcal{C}$ \& γ, il sera facile d'avoir δ \& ε, \& en substituant les valeurs de toutes ces fonctions dans $f(\mathcal{C}dx + \gamma dy) = e(\delta x + \varepsilon y)$, on aura les conditions de A.

2.° Je suppose que e étoit $= 0$, f ne l'étant pas; on aura $\mathcal{C} = \frac{-dyB}{dxddy - dyddx}$, $\gamma = \frac{dxB}{dxddy - dyddx}$, \&

$$\frac{\frac{1}{f}d\varphi}{\varphi} = \frac{dddx + \frac{-ddx}{ddy}dddy + \mathcal{C}\partial dx + \gamma\partial dy + \delta\partial x + \varepsilon\partial y}{\delta x + \varepsilon y}.$$

On connoît les valeurs de δ & de ε en $\mathcal{C}$ & γ.

3.° $f = 0$, e ne l'étant pas : ce cas-là est compris dans le premier.

4.° e & $f = 0$, on aura $\mathcal{C}$, γ, δ & ε, & la fonction μ devra être telle que $\frac{d\mu}{\partial dx} = \frac{d(\mathcal{C}\mu)}{dddx}$ & $\frac{d\mu}{\partial x} = \frac{d(\delta\mu)}{dddx}$.

QUATRIÈME CAS.

φ, fonction dont la dimension en ddx & $ddy = e$, en dx & $dy = f$, en x & $y = g$.

Le cas de $e = 0$, est celui qui précède ; on aura $dddx + \alpha dddy + A = 0$, $dddx + \alpha dddy + \mathcal{C}\partial dx + \gamma\partial dy + \delta\partial x + \varepsilon\partial y = 0$, $\mathcal{C}ddx + \gamma ddy + \delta dx + \varepsilon dy = A$, $\mu dddx + \alpha\mu dddy + \mathcal{C}\mu\partial dx + \gamma\mu\partial dy + \delta\mu\partial x + \varepsilon\mu\partial y = d\varphi$, $\mu(ddx + \alpha ddy) = e\varphi$, $\mu(\mathcal{C}dx + \gamma dy) = f\varphi$ & $\mu(\delta x + \varepsilon y) = g\varphi$;

donc $\frac{\frac{1}{e}d\varphi}{\varphi} = \frac{dddx + \alpha dddy + \mathcal{C}\partial dx + \gamma\partial dy + \delta\partial x + \varepsilon\partial y}{ddx + \alpha ddy}$.

Je substitue dans cette équation pour γ sa valeur $\frac{A - \mathcal{C}ddx - \delta dx - \varepsilon dy}{ddy}$; & je fais $\frac{d\left(\frac{1}{ddx + \alpha ddy}\right)}{\partial dx} = \frac{d\left(\frac{\mathcal{C}}{ddx + \alpha ddy}\right)}{dddx}$, $ddy \cdot \frac{d\left(\frac{1}{ddx + \alpha ddy}\right)}{\partial dy} = \frac{d\left(\frac{A - ddx\mathcal{C} - dx\delta - dy\varepsilon}{ddx + \alpha ddy}\right)}{dddx} = \frac{d\left(\frac{A}{ddx + \alpha ddy}\right)}{dddx} -$

$$ddx.\frac{d\left(\frac{\mathfrak{C}}{ddx+\alpha ddy}\right)}{dddx}-\frac{\mathfrak{C}}{ddx+\alpha ddy}-dx.\frac{d\left(\frac{\mathfrak{H}}{ddx+\alpha ddy}\right)}{dddx}$$

$$-dy.\frac{d\left(\frac{\varepsilon}{ddx+\alpha ddy}\right)}{dddx},\ \frac{d\left(\frac{1}{ddx+\alpha ddy}\right)}{\partial x}=\frac{d\left(\frac{\mathfrak{H}}{ddx+\alpha ddy}\right)}{dddx}$$

$$\&\ \frac{d\left(\frac{1}{ddx+\alpha ddy}\right)}{\partial y}=\frac{d\left(\frac{\varepsilon}{ddx+\alpha ddy}\right)}{dddx};\ \text{d'où je tire}$$

$$\mathfrak{C}=\frac{(ddx+\alpha ddy)\frac{dA}{dddx}-(1+ddy\frac{d\alpha}{dddx})A+ddy\partial\alpha}{ddx+\alpha ddy};$$

J'aurai de même

$$\gamma=\frac{(ddx+\alpha ddy)\frac{dA}{dddy}-(\alpha+ddy\frac{d\alpha}{dddy})A-dddx\partial\alpha}{ddx+\alpha ddy}.$$

Les fonctions $\mathfrak{C}$, γ, étant connues, on fubſtituera dans l'équation $\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\varphi}{\varphi}=$ &c. pour ε ſa valeur $\frac{A-\mathfrak{C}ddx-\gamma ddy-\mathfrak{H}dx}{dy}$; & en faiſant $\frac{d\left(\frac{\mathfrak{C}}{ddx+\alpha ddy}\right)}{\partial x}=\frac{d\left(\frac{\mathfrak{H}}{ddx+\alpha ddy}\right)}{\partial dx}$ &

$$dy.\frac{d\left(\frac{\mathfrak{C}}{ddx+\alpha ddy}\right)}{\partial y}=\frac{d\left(\frac{A-\mathfrak{C}ddx-\gamma ddy-\mathfrak{H}dx}{ddx+\alpha ddy}\right)}{\partial dx}$$

$$=\frac{d\left(\frac{A}{ddx+\alpha ddy}\right)}{\partial dx}-ddx.\frac{d\left(\frac{\mathfrak{C}}{ddx+\alpha ddy}\right)}{\partial dx}-$$

$$ddy.\frac{d\left(\frac{\gamma}{ddx+\alpha ddy}\right)}{\partial dx}-dx.\frac{d\left(\frac{\mathfrak{H}}{ddx+\alpha ddy}\right)}{\partial dx}-\frac{\mathfrak{H}}{ddx+\alpha ddy},$$

on aura $\mathfrak{H}=$ &c. & par conſéquent $\varepsilon=$ &c.

Les fonctions $\mathfrak{C}$, γ, $\mathfrak{H}$ & ε étant connues, on mettra leurs valeurs dans $f(ddx+\alpha ddy)=e(\mathfrak{C}dx+\gamma dy)$ & dans $g(ddx+\alpha ddy)=e(\mathfrak{H}x+\varepsilon y)$, & on aura les conditions des fonctions α & A.

CINQUIÈME CAS.

dy constante, ou ddy & $dddy = 0$.

L'équation à intégrer sera $dddx + B = 0$, B étant une fonction de x, de y, de dx, de dy, & de ddx.

Je réduis la question à trouver l'équation $dddx + \alpha dddy + A = 0$, que l'on auroit eue si on n'eût pas fait dy constante.

α & A sont des fonctions des quantités x, y, dx, dy, ddx & ddy, qui sont inconnues. A doit être telle que ddy devenant $= 0$, elle devienne $= B$, & les fonctions α & A doivent avoir entr'elles les conditions nécessaires pour pouvoir appartenir à une même fonction φ. L'on voit donc que ce problème-ci est très-indéterminé, mais qu'il suffira d'en avoir une seule solution générale.

A l'article 2.° du second cas, où $\alpha = \frac{-dx}{dy}$, nous avons trouvé $dx \frac{dA}{dddx} + dy \frac{dA}{dddy} = 3 \left(\frac{dxddy - dyddx}{dy}\right)$; ainsi, si nous voulons résoudre notre problème par ce cas-ci, il faut que nous trouvions une fonction A qui satisfasse à l'équation précédente, & qui devienne $= B$, ddy devenant $= 0$.

Je mets $\frac{dyddx - dxddy}{dy}$ au lieu de ddx dans B, je suppose que B devienne C, & je fais $A = C + \frac{3\,ddy}{dy^2}(dxddy - dyddx)$; j'aurai $dddx + \frac{-dx}{dy} dddy + C + \frac{3\,ddy}{dy^2}(dxddy - dyddx) = 0$.

Il est évident, 1.° que cette équation deviendra l'équation proposée, ddy & $dddy$ devenant $= 0$.

2.° $dx \frac{dC}{dddx} + dy \frac{dC}{dddy}$ étant $= 0$,

on aura $dx \cdot \frac{d\left[C + \frac{3ddy}{dy^2} \cdot (dxddy - dyddx)\right]}{dddx} +$

$dy \cdot \frac{d\left[C + \frac{3ddy}{dy^2} \cdot (dxddy - dyddx)\right]}{dddy} = 3\left(\frac{dxddy - dyddx}{dy}\right)$;

donc le problème eſt réſolu.

PROBLÉME II.

Soit $dddx + \alpha dddy + A = 0$, l'équation que l'on propoſe d'intégrer, α étant une fonction de dimenſion nulle des quantités p, x, y, dx, dy, ddx & ddy, & A étant une fonction de ces mêmes quantités, dont la dimenſion eſt $= 1$.

La queſtion ſe réduit à trouver une fonction φ des quantités p, x, y, dx, dy, ddx & ddy, dont la différence, en faiſant différence de $x = dx$, différence de $y = dy$, différence de $dx = ddx$, différence de $dy = ddy$, & différence de $p = 0$, diviſée par le coëfficient de $dddx$, ſoit $dddx + \alpha dddy + A$.

Si au lieu de faire la différence de $x = dx$, celle de $y = dy$, celle de $dx = ddx$, celle de $dy = ddy$, & celle de $p = 0$, on eût fait la différence de $x = \partial x$, celle de $y = \partial y$, celle de $dx = \partial dx$, celle de $dy = \partial ddy$, & celle de $p = dp$, on auroit eu $dddx + \alpha dddy + \beta\partial dx + \gamma\partial dy + \delta\partial x + \varepsilon\partial y + \pi dp = 0$.

β, γ, δ & ε ſont des fonctions des quantités p, x, y, dx, dy, ddx & ddy, qui doivent être telles que $\beta ddx + \gamma ddy + \delta dx + \varepsilon dy = A$. π eſt une fonction de ces mêmes quantités, qui eſt inconnue; & ſi on n'eût pas diviſé par la fonction qui multiplioit $dddx$, on auroit eu $\mu dddx + \alpha\mu dddy + \beta\mu\partial dx + \gamma\mu\partial dy + \delta\mu dx + \varepsilon\mu dy + \pi\mu dp = d\varphi$.

μ eſt une fonction des quantités p, x, y, dx, dy, ddx & ddy, qui eſt inconnue.

Si avant de prendre la différence de φ, au lieu de ddx & de ddy, on eût mis dans cette fonction $\frac{dx\,dr}{x}$ & $\frac{dx\,ds}{x}$, & si après en avoir pris la différence, au lieu de dr & de ds, on eût remis dans cette différence $\frac{x\,ddx}{dx}$ & $\frac{x\,ddy}{dx}$, on auroit eu $\mu d(\frac{dx\,dr}{x}) + \alpha\mu d(\frac{dx\,ds}{x}) + \mathcal{C}\mu\partial dx + \gamma\mu\partial dy + \delta\mu\partial x + \varepsilon\mu\partial y + \pi\mu dp = d\varphi$.

Mais $d(\frac{dx\,dr}{x}) = \frac{dx}{x}ddr + \frac{ddx}{dx}\partial dx' - \frac{ddx}{x}\partial x$, & $d(\frac{dx\,ds}{x}) = \frac{dx}{x}dds + \frac{ddy}{dx}\partial dx - \frac{ddy}{x}\partial x$; on auroit donc eu $\mu\frac{dx}{x}ddr + \alpha\mu\frac{dx}{x}dds + (\mathcal{C}\mu + \frac{\mu\,ddx}{dx} + \alpha\mu\frac{ddy}{dx})\partial dx + \gamma\mu\partial dy + (\delta\mu - \frac{\mu\,ddx}{x} - \alpha\mu\frac{ddy}{x})\partial x + \varepsilon\mu\partial y + \pi\mu dp = d\varphi$.

Je suppose présentement que φ étoit une fonction infiniment petite, d'un ordre $= e$, & que sa dimension en p, x, y, étoit $= f$; j'aurai
$2\mu ddx + 2\alpha\mu ddy + \mathcal{C}\mu dx + \gamma\mu dy = e\varphi$, & $\delta\mu x + \varepsilon\mu y + \pi\mu p - \mu ddx - \alpha\mu ddy = f\varphi$; donc $f(2ddx + 2\alpha ddy + \mathcal{C}dx + \gamma dy) = e(\delta x + \varepsilon y + \pi p - ddx - \alpha ddy)$, & $\frac{-d\varphi}{\varphi} = \frac{dddx + \alpha dddy + \mathcal{C}\partial dx + \gamma\partial dy + \delta\partial x + \varepsilon dy + \pi dp}{2ddx + 2\alpha ddy + \mathcal{C}dx + \gamma dy}$.

Il s'agit d'avoir les fonctions $\mathcal{C}$, γ, δ, ε & π. Par les mêmes calculs que dans le problème précédent, on aura $\gamma = -\tilde{d}\alpha + A\frac{d\alpha}{dddx} - \alpha\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{dddy} + \alpha\mathcal{C}$; & en substituant pour γ, $\frac{d\gamma}{dddx}$ & $\frac{d\gamma}{dddy}$ leurs valeurs dans

l'équation $\alpha \frac{dy}{dddx} - \gamma \frac{d\alpha}{dddx} + \frac{d\alpha}{\partial dy} - \frac{d\gamma}{dddy} = 0$, on aura $\mathfrak{C}$ & enſuite γ.

Les fonctions $\mathfrak{C}$ & γ étant connues, on aura $\mathfrak{d} = -\tilde{d}\mathfrak{C} + A\frac{d\mathfrak{C}}{dddx} - \mathfrak{C}\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{\partial dx} + \mathfrak{C}^2$, $\varepsilon = -\tilde{d}\gamma + A\frac{d\gamma}{dddx} - \gamma\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{\partial dy} + \mathfrak{C}\gamma$.

(Le ſigne $\tilde{d}$ ſignifie ici la différence de la fonction qu'il précède, priſe à l'ordinaire, en faiſant tout varier, excepté p, ddx & ddy).

On ſubſtituera les valeurs de toutes ces fonctions dans $f(2ddx + 2\alpha ddy + \mathfrak{C}dx + \gamma dy) = e(\mathfrak{d}x + \varepsilon y + \pi dp - ddx - \alpha ddy)$, & on aura π.

Les fonctions $\mathfrak{C}$, γ, $\mathfrak{d}$, ε & π étant connues, on aura φ par les quadratures, & on fera cette fonction $= ap^f dq^e$.

Il peut arriver pluſieurs cas dans ce problème-ci, mais nous ne nous arrêterons point à les examiner; l'analyſe que nous avons faite de ceux du problème précédent, ſervira d'exemple pour celui-ci & pour les ſuivans.

Si on a fait dy conſtante, & que l'équation propoſée ſoit $dddx + B = 0$, B étant une fonction de p, x, y, dx, dy & ddx, dont la dimenſion $= 1$, en ſubſtituant, de même que dans le problème précédent, $\frac{dyddx - dxddy}{dy}$ au lieu de ddx dans B, & en faiſant enſuite $\alpha = \frac{-dx}{dy}$, $A = C + \frac{3ddy}{dy^2}(dxddy - dyddx)$ (C eſt ce que devient B) on aura $dddx + \frac{-dx}{dy}dddy + C + \frac{3ddy}{dy^2}(dxddy - dyddx) = 0$, qui eſt une des équations qu'on auroit pû avoir ſi on n'avoit pas fait dy conſtante.

PROBLÉME III.

Soit $dddx + \alpha ddd y + \zeta ddd z + A = 0$, l'équation qu'il faut intégrer, α, ζ étant des fonctions de dimenſion nulle des quantités $x, y, z, dx, dy, dz, ddx, ddy$ & ddz, telles que $\alpha \frac{d\zeta}{dddx} - \zeta \frac{d\alpha}{dddx} + \frac{d\alpha}{dddz} - \frac{d\zeta}{dddy} = 0$, & A étant une fonction de ces mêmes quantités, dont la dimenſion eſt $= 1$.

La queſtion ſe réduit à trouver une fonction φ de $x, y, z, dx, dy, dz, ddx, ddy$ & ddz, dont la différence, en faiſant différence de $x = dx$, différence de $y = dy$, différence de $z = dz$, différence de $dx = ddx$, différence de $dy = ddy$, & différence de $dz = ddz$, diviſée par le coëfficient de $dddx$, ſoit $dddx + \alpha ddd y + \zeta ddd z + A$.

Si au lieu de faire la différence de $x = dx$, celle de $y = dy$, celle de $z = dz$, celle de $dx = ddx$, celle de $dy = ddy$, & celle de $dz = ddz$, on eût fait la différence de $x = \partial x$, celle de $y = \partial y$, celle de $z = \partial z$, celle de $dx = \partial dx$, celle de $dy = \partial dy$, & celle de $dz = \partial dz$, on auroit eu $dddx + \alpha ddd y + \zeta ddd z + \gamma \partial dx + \delta \partial dy + \varepsilon \partial dz + \zeta \partial x + \eta \partial y + \theta \partial z = 0$.

$\gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta$ & θ ſont des fonctions de dimenſion nulle de $x, y, z, dx, dy, dz, ddx, ddy$ & ddz, qui doivent être telles que $\gamma ddx + \delta ddy + \varepsilon ddz + \zeta dx + \eta dy + \theta dz = A$; & ſi on n'eût pas diviſé par la fonction qui multiplioit $dddx$, on auroit eu $\mu dddx + \alpha \mu ddd y + \zeta \mu ddd z + \gamma \mu \partial dx + \delta \mu \partial dy + \varepsilon \mu \partial dz + \zeta \mu dx + \eta \mu dy + \theta \mu dz = d\varphi$.

μ eſt une fonction des quantités $x, y, z, dx, dy, dz, ddx, ddy$ & ddz, qui eſt inconnue.

Si avant de prendre la différence de φ au lieu de ddx, de

de ddy & de ddz, on eût mis dans cette fonction $\frac{dxdr}{x}$, $\frac{dxds}{x}$ & $\frac{dxdt}{x}$; & si après en avoir pris la différence, au lieu de dr, de ds & de dt, on eût remis dans cette différence $\frac{xddx}{dx}$, $\frac{xddy}{dx}$ & $\frac{xddz}{dx}$, on auroit eu $\mu d(\frac{dxdr}{x}) + \alpha\mu d(\frac{dxds}{x}) + \varsigma\mu d(\frac{dxdt}{x}) + \gamma\mu\partial dx + \delta\mu\partial dy + \varepsilon\mu\partial dz + \zeta\mu dx + \eta\mu dy + \theta\mu dz = d\phi$; mais $d(\frac{dxdr}{x}) = \frac{dx}{x} ddr + \frac{ddx}{dx}\partial dx - \frac{ddx}{x}\partial x$, $d(\frac{dxds}{x}) = \frac{dx}{x} dds + \frac{ddy}{dx}\partial dx - \frac{ddy}{x}\partial x$, & $d(\frac{dxdt}{x}) = \frac{dx}{x} ddt + \frac{ddz}{dx}\partial dx - \frac{ddz}{x}\partial x$. On auroit donc eu $\mu\frac{dx}{x} ddr + \alpha\mu\frac{dx}{x} dds + \varsigma\mu\frac{dx}{x} ddt + (\gamma\mu + \frac{\mu ddx}{dx} + \alpha\mu\frac{ddy}{dx} + \varsigma\mu\frac{ddz}{dx})\partial dx + \delta\mu\partial dy + \varepsilon\mu\partial dz + (\zeta\mu - \mu\frac{ddx}{x} - \alpha\mu\frac{ddy}{x} - \varsigma\mu\frac{ddz}{x})\partial x + \eta\mu dy + \theta\mu dz = d\phi$.

Je suppose présentement que la dimension de ϕ en dx, dy, dz, dr, ds & dt étoit $= e$, & qu'en x, y, z elle étoit $= f$; j'aurai $2\mu ddx + 2\alpha\mu ddy + 2\varsigma\mu ddz + \gamma\mu dx + \delta\mu dy + \varepsilon\mu dz = e\phi$, & $\zeta\mu x + \eta\mu y + \theta\mu z - \mu ddx - \alpha\mu ddy - \varsigma\mu ddz = f\phi$; donc $f(2ddx + 2\alpha ddy + 2\varsigma ddz + \gamma dx + \delta dy + \varepsilon dz) = e(\zeta x + \eta y + \theta z - ddx - \alpha ddy - \varsigma ddz$, & $\frac{\frac{x}{e}d\phi}{\phi} = \frac{dddx + \alpha dddy + \varsigma dddz + \gamma\partial dx + \delta\partial dy + \varepsilon\partial dz + \zeta\partial x + \eta\partial y + \theta\partial z}{2ddx + 2\alpha ddy + 2\varsigma ddz + \gamma dx + \delta dy + \varepsilon dz}$.

Il s'agit d'avoir les fonctions γ, δ, ε, ζ, η & θ. Je prends $dz\theta = A - ddx\gamma - ddy\delta - ddz\varepsilon - dx\zeta - dy\eta$, $dz\frac{d\theta}{dddx} = \frac{dA}{dddx} - \gamma - ddx\frac{d\gamma}{dddx} - ddy\frac{d\delta}{dddx} - ddz\frac{d\varepsilon}{dddx} - dx\frac{d\zeta}{dddx} - dy\frac{d\eta}{dddx}$, $dz\frac{d\theta}{dddy} = \frac{dA}{dddy} - ddx\alpha\frac{d\gamma}{dddx} + ddx\gamma\frac{d\alpha}{dddx} - ddx\frac{d\alpha}{\partial dx} - \delta - ddy\alpha\frac{d\delta}{dddx} + ddy\delta\frac{d\alpha}{dddx} - ddy\frac{d\alpha}{\partial dy} - ddz\alpha\frac{d\varepsilon}{dddx} + ddz\varepsilon\frac{d\alpha}{dddx} - ddz\frac{d\alpha}{\partial dz} - dx\alpha\frac{d\zeta}{dddx} + dx\zeta\frac{d\alpha}{dddx} - dx\frac{d\alpha}{\partial x} - dy\alpha\frac{d\eta}{dddx} + dy\eta\frac{d\alpha}{dddx} - dy\frac{d\alpha}{\partial y}$, $dz\frac{d\theta}{dddz} = \frac{dA}{dddz} - ddx\mathcal{C}\frac{d\gamma}{dddx} + ddx\gamma\frac{d\mathcal{C}}{dddx} - ddx\frac{d\mathcal{C}}{\partial dx} - ddy\mathcal{C}\frac{d\delta}{dddx} + ddy\delta\frac{d\mathcal{C}}{dddx} - ddy\frac{d\mathcal{C}}{\partial dy} - \varepsilon - ddz\mathcal{C}\frac{d\varepsilon}{dddx} + ddz\varepsilon\frac{d\mathcal{C}}{dddx} - ddz\frac{d\mathcal{C}}{\partial dz} - dx\mathcal{C}\frac{d\zeta}{dddx} + dx\zeta\frac{d\mathcal{C}}{dddx} - dx\frac{d\mathcal{C}}{\partial x} - dy\mathcal{C}\frac{d\eta}{ddax} + dy\eta\frac{d\mathcal{C}}{dddx} - dy\frac{d\mathcal{C}}{\partial y}$, & je fubſtitue ces valeurs dans les équations $dz\alpha\frac{d\theta}{dddx} - dz\theta\frac{d\alpha}{dddx} + dz\frac{d\alpha}{\partial z} - dz\frac{d\theta}{dddy} = 0$, & $dz\mathcal{C}\frac{d\theta}{dddx} - dz\theta\frac{d\mathcal{C}}{dddx} + dz\frac{d\mathcal{C}}{\partial z} - dz\frac{d\theta}{dddz} = 0$; j'aurai $\delta = -dx\frac{d\alpha}{\partial x} - dy\frac{d\alpha}{\partial y} - dz\frac{d\alpha}{\partial z} - ddx\frac{d\alpha}{\partial dx} - ddy\frac{d\alpha}{\partial dy} - ddz\frac{d\alpha}{\partial dz} + A\frac{d\alpha}{dddx} - \alpha\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{dddy} + \alpha\gamma$, & $\varepsilon = -dx\frac{d\mathcal{C}}{\partial x} - dy\frac{d\mathcal{C}}{\partial y} - dz\frac{d\mathcal{C}}{\partial z} - ddx\frac{d\mathcal{C}}{\partial dx} - ddy\frac{d\mathcal{C}}{\partial dy} - ddz\frac{d\mathcal{C}}{\partial dz} + A\frac{d\mathcal{C}}{dddx} - \mathcal{C}\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{dddz} + \mathcal{C}\gamma$,

ou $\delta = -\tilde{d}\alpha + A\frac{d\alpha}{dddx} - \alpha\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{dddy} + \alpha\gamma$,

& $\varepsilon = -\tilde{d}\mathcal{C} + A\frac{d\mathcal{C}}{dddx} - \mathcal{C}\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{dddz} + \mathcal{C}\gamma$.

Soit, pour simplifier, $-\tilde{d}\alpha + A\frac{d\alpha}{dddx} - \alpha\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{dddy} = B$, & $-\tilde{d}\mathcal{C} + A\frac{d\mathcal{C}}{dddx} - \mathcal{C}\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{dddz} = C$, on aura $\delta = B + \alpha\gamma$, $\varepsilon = C + \mathcal{C}\gamma$;

$\frac{d\delta}{dddx} = \frac{d\mathcal{C}}{dddx} + \alpha\frac{d\gamma}{dddx} + \gamma\frac{d\alpha}{dddx}$, $\frac{d\delta}{dddy} = \frac{dB}{dddy} + \gamma\frac{d\alpha}{dddy} + \alpha^2\frac{d\gamma}{dddx} - \alpha\gamma\frac{d\alpha}{dddx} + \alpha\frac{d\alpha}{\partial dx}$,

$\frac{d\delta}{dddz} = \frac{dB}{dddz} - \alpha\gamma\frac{d\mathcal{C}}{dddx} + \mathcal{C}\gamma\frac{d\alpha}{dddx} + \gamma\frac{d\mathcal{C}}{dddy} + \alpha\mathcal{C}\frac{d\gamma}{dddx} + \alpha\frac{d\mathcal{C}}{\partial dx}$, $\frac{d\varepsilon}{dddx} = \frac{dC}{dddx} + \mathcal{C}\frac{d\gamma}{dddx} + \gamma\frac{d\mathcal{C}}{dddx}$, $\frac{d\varepsilon}{dddy} = \frac{dC}{dddy} + \gamma\frac{d\alpha}{dddz} + \alpha\gamma\frac{d\mathcal{C}}{dddx} - \mathcal{C}\gamma\frac{d\alpha}{dddx} + \alpha\mathcal{C}\frac{d\gamma}{dddx} + \mathcal{C}\frac{d\alpha}{\partial dx}$,

$\frac{d\varepsilon}{dddz} = \frac{dC}{dddz} + \gamma\frac{d\mathcal{C}}{dddz} + \mathcal{C}^2\frac{d\gamma}{dddx} - \mathcal{C}\gamma\frac{d\mathcal{C}}{dddx} + \mathcal{C}\frac{d\mathcal{C}}{\partial dx}$; & en substituant ces valeurs dans les équations

$\alpha\frac{d\delta}{dddx} - \delta\frac{d\alpha}{dddx} + \frac{d\alpha}{\partial dy} - \frac{d\delta}{dddy} = 0$,

$\mathcal{C}\frac{d\delta}{dddx} - \delta\frac{d\mathcal{C}}{dddx} + \frac{d\mathcal{C}}{\partial dy} - \frac{d\delta}{dddz} = 0$,

$\alpha\frac{d\varepsilon}{dddx} - \varepsilon\frac{d\alpha}{dddx} + \frac{d\alpha}{\partial dz} - \frac{d\varepsilon}{dddy} = 0$, &

$\mathcal{C}\frac{d\varepsilon}{dddx} - \varepsilon\frac{d\mathcal{C}}{dddx} + \frac{d\mathcal{C}}{\partial dz} - \frac{d\varepsilon}{dddz} = 0$, on

$$\text{aura } \gamma = \frac{B\frac{d\alpha}{dddx} - \alpha\frac{dB}{dddx} + \frac{dB}{dddy} + \alpha\frac{d\alpha}{\partial dx} - \frac{d\alpha}{\partial dy}}{\alpha\frac{d\alpha}{dddx} - \frac{d\alpha}{dddy}},$$

$$\gamma = \frac{B\frac{d\mathfrak{C}}{dddx} - \mathfrak{C}\frac{dB}{dddx} + \frac{dB}{dddz} + \alpha\frac{d\mathfrak{C}}{\partial dx} - \frac{d\mathfrak{C}}{\partial dy}}{\alpha\frac{d\mathfrak{C}}{dddx} - \frac{d\mathfrak{C}}{dddy}},$$

$$\gamma = \frac{C\frac{d\mathfrak{C}}{dddx} - \mathfrak{C}\frac{dC}{dddx} + \frac{dC}{dddz} + \mathfrak{C}\frac{d\mathfrak{C}}{\partial dx} - \frac{d\mathfrak{C}}{\partial dz}}{\mathfrak{C}\frac{d\mathfrak{C}}{dddx} - \frac{d\mathfrak{C}}{dddz}},$$

$$\& \gamma = \frac{C\frac{d\alpha}{dddx} - \alpha\frac{dC}{dddx} + \frac{dC}{dddy} + \mathfrak{C}\frac{d\alpha}{\partial dx} - \frac{d\alpha}{\partial dz}}{\mathfrak{C}\frac{d\alpha}{dddx} - \frac{d\alpha}{dddz}}.$$

En substituant l'une de ces expressions de γ dans les équations $\mathfrak{d} = B + \alpha\gamma$, $\mathfrak{e} = C + \mathfrak{C}\gamma$, on aura $\mathfrak{d}$ & $\mathfrak{e}$.

Les fonctions γ, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$ étant connues, on aura ζ, η & θ de la manière suivante.

Je prends $d\zeta\frac{d\theta}{\partial dx} = \frac{dA}{\partial dx} - ddx\frac{d\gamma}{\partial dx} - ddy\gamma\frac{d\mathfrak{d}}{dddx} + ddy\mathfrak{d}\frac{d\gamma}{dddx} - ddy\frac{d\gamma}{\partial dy} - dd\zeta\gamma\frac{d\mathfrak{e}}{dddx} + dd\zeta\mathfrak{e}\frac{d\gamma}{dddx} - dd\zeta\frac{d\gamma}{\partial d\zeta} - \zeta - dx\gamma\frac{d\zeta}{dddx} + dx\zeta\frac{d\gamma}{dddx} - dx\frac{d\gamma}{\partial x} - dy\gamma\frac{d\eta}{dddx} + dy\eta\frac{d\gamma}{dddx} - dy\frac{d\gamma}{\partial y}$, $d\zeta\frac{d\theta}{\partial dy} = \frac{dA}{\partial dy} - ddx\mathfrak{d}\frac{d\gamma}{dddx} + ddx\gamma\frac{d\mathfrak{d}}{dddx} - ddx\frac{d\mathfrak{d}}{\partial dx} - ddy\frac{d\mathfrak{d}}{\partial dy} - dd\zeta\mathfrak{d}\frac{d\mathfrak{e}}{dddx} + dd\zeta\mathfrak{e}\frac{d\mathfrak{d}}{dddx} - dd\zeta\frac{d\mathfrak{d}}{\partial d\zeta} - dx\mathfrak{d}\frac{d\zeta}{dddx} + dx\zeta\frac{d\mathfrak{d}}{dddx} - dx\frac{d\mathfrak{d}}{\partial x} - \eta - dy\mathfrak{d}\frac{d\eta}{dddx} + dy\eta\frac{d\mathfrak{d}}{dddx} - dy\frac{d\mathfrak{d}}{\partial y}$, & je

substitue pour $dz\theta$, $dz\frac{d\theta}{dddx}$, $dz\frac{d\theta}{\partial dx}$ & $dz\frac{d\theta}{\partial dx}$ leurs valeurs dans les équations $dz\gamma\frac{d\theta}{dddx} - dz\theta\frac{d\gamma}{dddx} + dz\frac{d\gamma}{\partial z} - dz\frac{d\theta}{\partial dx} = 0$, $dz\delta\frac{d\theta}{dddx} - dz\theta\frac{d\delta}{dddx} + dz\frac{d\delta}{\partial z} - dz\frac{d\theta}{\partial dy} = 0$; j'aurai $\zeta = -\tilde{d}\gamma + A\frac{d\gamma}{dddx} - \gamma\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{\partial dx} + \gamma^2$, $\eta = -\tilde{d}\delta + A\frac{d\delta}{dddx} - \delta\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{\partial dy} + \gamma\delta$, & par analogie, $\theta = -\tilde{d}\varepsilon + A\frac{d\varepsilon}{dddx} - \varepsilon\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{\partial dz} + \gamma\varepsilon$.

On substituera les valeurs de toutes ces fonctions dans $f(2ddx + 2\alpha ddy + 2\mathcal{C}ddz + \gamma dx + \delta dy + \varepsilon dz) = e(\zeta x + \eta y + \theta z - ddx - \alpha ddy - \mathcal{C}ddz)$, & on aura les conditions entre les fonctions α, $\mathcal{C}$ & A.

Lorsqu'on aura la fonction φ, on la fera $= ap^{\lambda}dq^{\epsilon}$, & le nombre a servira à remplir l'une des conditions du problème auquel appartiendra l'équation proposée.

On peut avoir fait dy constante, ou ddy & $dddy = 0$, & par conséquent la fonction α peut n'être pas donnée.

L'équation proposée sera $dddx + \beta dddz + B = 0$, β & B ne seront fonctions que de x, y, z, dx, dy, dz, ddx & ddz.

Je réduis la question à trouver l'équation $dddx + \alpha dddy + \mathcal{C}dddz + A = 0$, que l'on auroit eue en cas qu'on n'eût fait aucune première différence constante.

α, $\mathcal{C}$ & A sont des fonctions de x, y, z, dx, dy, dz, ddx, ddy & ddz, qui doivent pouvoir appartenir à une même fonction φ, & être en même temps telles que ddy devenant $= 0$, $\mathcal{C}$ devienne $= \beta$, & A devienne $= B$.

Ce problème paroît très-indéterminé; mais on voit que de toutes les solutions qui sont possibles, il suffit d'en avoir

une seule qui soit générale. Pour y parvenir, je parcours les différens cas de l'équation générale $dddx + \alpha ddy + \zeta dz + A = 0$, & je tâche d'en trouver un où les conditions entre les fonctions α, ζ & A soient données par des expressions les plus simples qu'il est possible.

Ayant ces conditions, je cherche pour a, ζ & A des fonctions qui y soient soûmises, & qui soient en même temps telles que ddy devenant $= 0$, ζ devienne $= \beta$, & A devienne $= B$.

Nous avons trouvé $\delta = -\tilde{d}\alpha + A\frac{d\alpha}{dddx} - \alpha\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{ddy} + \alpha\gamma$, & $\varepsilon = -\tilde{d}\zeta + A\frac{d\zeta}{dddx} - \zeta\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{ddz} + \zeta\gamma$. Je substitue ces valeurs de δ & de ε dans $\mu(2ddx + 2ddy\alpha + 2ddz\zeta + dx\gamma + dy\delta + dz\varepsilon) = e\phi$; j'aurai $\mu(2ddx + 2ddy\alpha + 2ddz\zeta + dx\gamma - dy\tilde{d}\alpha + dyA\frac{d\alpha}{dddx} - dy\alpha\frac{dA}{dddx} + dy\frac{dA}{dddy} + dy\alpha\gamma - dz\tilde{d}\zeta + dzA\frac{d\zeta}{dddx} - dz\zeta\frac{dA}{dddx} + dz\frac{dA}{dddz} + dz\zeta\gamma) = e\phi$. Je fais $dx + dy\alpha + dz\zeta = 0$, j'aurai $\alpha = \frac{-dx - dz\zeta}{dy}$, $\tilde{d}\alpha = \frac{dxddy - dyddx + (dzddy - dyddz)\zeta - dydz\tilde{d}\zeta}{dy^2}$ & $\frac{d\alpha}{dddx} = \frac{-dz\frac{d\zeta}{dddx}}{dy}$;

donc $\mu \cdot \frac{\left\{\begin{array}{l} 3(dyddx - dxddy + dyddz\zeta - dzddy\zeta) \\ + dy(dx\frac{dA}{dddx} + dy\frac{dA}{dddy} + dz\frac{dA}{dddz}) \end{array}\right\}}{dy} = e\phi$.

Je suppose que ϕ soit une fonction finie, ou que c soit $= 0$, j'aurai $dx\frac{dA}{dddx} + dy\frac{dA}{dddy} + dz\frac{dA}{dddz} =$

$3\left(\frac{dx\,ddy - dy\,ddx + dz\,ddy\mathcal{C} - dy\,ddz\mathcal{C}}{dy}\right)$. Je ſubſtitue auſſi pour α $\frac{d\alpha}{dddx}$ & $\frac{d\alpha}{dddz}$ leurs valeurs $\frac{-dx - dz\mathcal{C}}{dy}$, $\frac{-dz\frac{d\mathcal{C}}{dddx}}{dy}$ & $\frac{-dz\frac{d\mathcal{C}}{dddz}}{dy}$ dans l'équation $\alpha\frac{d\mathcal{C}}{dddx} - \mathcal{C}\frac{d\alpha}{dddx} + \frac{d\alpha}{dddz} - \frac{d\mathcal{C}}{dddy} = 0$; j'aurai $dx\frac{d\mathcal{C}}{dddx} + dy\frac{d\mathcal{C}}{dddy} + dz\frac{d\mathcal{C}}{dddz} = 0$.

Afin donc de réſoudre notre problème par le cas que nous venons de déterminer, 1.° il faut faire $\alpha = \frac{-dx - dz\mathcal{C}}{dy}$; 2.° trouver une fonction $\mathcal{C}$ telle que $dx\frac{d\mathcal{C}}{dddx} + dy\frac{d\mathcal{C}}{dddy} + dz\frac{d\mathcal{C}}{dddz} = 0$, & qui devienne $= \beta$, ddy devenant $= 0$; 3.° trouver une fonction A qui devienne $= B$, lorſque ddy deviendra $= 0$, & qui ſoit en même temps telle que $dx\frac{dA}{dddx} + dy\frac{dA}{dddy} + dz\frac{dA}{dddz} = 3\left(\frac{dx\,ddy - ddy\,dx + dz\,ddy\mathcal{C} - dy\,ddz\mathcal{C}}{dy}\right)$.

Subſtituez $\frac{dy\,ddx - dx\,ddy}{dy}$ & $\frac{dy\,ddz - dz\,ddy}{dy}$ au lieu de ddx & de ddz dans β, & vous aurez $\mathcal{C}$. Subſtituez de même $\frac{dy\,ddx - dx\,ddy}{dy}$ & $\frac{dy\,ddz - dz\,ddy}{dy}$ au lieu de ddx & de ddz dans B, vous aurez D; & faites $A = D + \frac{3\,ddy}{dy^2}(dx\,ddy - dy\,ddx + dz\,ddy\mathcal{C} - dy\,ddz\mathcal{C})$, le problème ſera réſolu. Car, 1.° il eſt évident que $\mathcal{C}$ & A deviendront β & B, lorſque ddy deviendra $= 0$. 2.° On aura $dx\frac{d\mathcal{C}}{dddx} + dy\frac{d\mathcal{C}}{dddy} + dz\frac{d\mathcal{C}}{dddz} = 0$, & $dx\frac{dA}{dddx} + dy\frac{dA}{dddy} + dz\frac{dA}{dddz} =$

$3\left(\frac{dx\,ddy - dy\,ddx + dz\,ddy\zeta - dy\,ddz\zeta}{dy}\right)$. On peut donc toûjours, au lieu de l'équation $dddx + \beta\,ddd z + B = 0$, que je suppose qu'on ait eue en faisant dy constante, prendre $dddx + \frac{-dx - dz\zeta}{dy}\,ddy + \zeta\,ddd z + D + \frac{3\,ddy}{dy^2}(dx\,ddy - dy\,ddx + dz\,ddy\zeta - dy\,ddz\zeta) = 0$, ζ & D étant ce que deviennent β & B en y mettant $\frac{dy\,ddx - dx\,ddy}{dy}$ & $\frac{dy\,ddz - dz\,ddy}{dy}$ au lieu de ddx & de ddz. J'ai cherché la solution générale de ce problème; la voici en peu de mots.

PROBLÉME.

Étant donnée une équation différencielle d'un ordre quelconque, à laquelle je suppose qu'on soit arrivé en faisant constante la première différence de l'une des variables qui la composent, trouver l'équation qu'on auroit eue, en cas qu'on n'eût fait aucune première différence constante.

SOLUTION.

Soient x, y, z, u, &c. les variables de l'équation, & supposons qu'on ait fait dy constante; substituez dans cette équation pour ddx, ddz, ddu, &c. $dddx$, $dddz$, $dddu$, &c. $ddddx$, $ddddz$, $ddddu$, &c. &c. les valeurs suivantes $dy.d\left(\frac{dx}{dy}\right)$, $dy.d\left(\frac{dz}{dy}\right)$, $dy.d\left(\frac{du}{dy}\right)$, &c. $dy^2.d\left(\frac{ddx}{dy^2}\right)$, $dy^2.d\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$, $dy^2.d\left(\frac{ddu}{dy^2}\right)$, &c. $dy^3.d\left(\frac{dddx}{dy^3}\right)$, $dy^3.d\left(\frac{dddz}{dy^3}\right)$, $dy^3.d\left(\frac{dddu}{dy^3}\right)$, &c. &c. & le problème sera résolu.

Lorsque vous aurez $\frac{dy\,ddx - dx\,ddy}{dy}$ à substituer au lieu de ddx, vous le substituerez premièrement dans $dy^2.d\left(\frac{ddx}{dy^2}\right)$, &

& vous aurez $dy^2 . d\left(\frac{dy\,ddx - dx\,ddy}{dy^3}\right)$, ou $\frac{dy^2\,dddx - dx\,dy\,dddy - 3\,dy\,ddx\,ddy + 3\,dx\,ddy^2}{dy^4}$ à substituer au lieu de $dddx$; vous le substituerez premièrement dans $dy^3 . d\left(\frac{dddx}{dy^3}\right)$, & vous aurez $dy^3 . d\left(\frac{dy^2\,dddx - dx\,dy\,dddy - 3\,dy\,ddx\,ddy + 3\,dx\,ddy^2}{dy^5}\right)$, ou $\frac{\left\{\begin{array}{l} dy^3\,ddddx - dx\,dy^2\,ddddy - 6\,dy^2\,ddy\,dddx + 10\,dx\,dy\,ddy\,dddy \\ - 4\,dy^2\,ddx\,dddy + 15\,dy\,ddx\,ddy^2 - 15\,dx\,ddy^3 \end{array}\right\}}{dy^6}$ à substituer au lieu de $ddddx$, &c. & ainsi des autres.

Si au lieu d'une équation l'on avoit une expression quelconque à transformer, il est aisé de voir que la règle seroit la même, une équation n'étant qu'une certaine expression égalée à zéro; & elle est fondée sur ce que si l'on suppose $dx = a\,dy$, $dz = b\,dy$, $du = c\,dy$, &c. (a, b, c, &c. étant des fonctions de quantités constantes & des variables x, y, z, u, &c.) toute expression analytique de ces quantités, & de leurs premières, secondes, troisièmes, quatrièmes, &c. différences, infiniment petite d'un ordre quelconque e, doit toûjours pouvoir se réduire à $A\,dy^e$, A n'étant fonction que de quantités finies, soit que pour avoir cette expression l'on ait fait dy constante, soit qu'on n'ait fait aucune différence constante.

Ayant fait dy constante, & les équations $dx = a\,dy$, $dz = b\,dy$, $du = c\,dy$, &c. étant supposées, on aura $ddx = \bar{a}\,dy^2$, $ddz = \bar{b}\,dy^2$, $ddu = \bar{c}\,dy^2$, &c. $dddx = \bar{\bar{a}}\,dy^3$, $dddz = \bar{\bar{b}}\,dy^3$, $dddu = \bar{\bar{c}}\,dy^3$, &c. $ddddx = \bar{\bar{\bar{a}}}\,dy^4$, $ddddz = \bar{\bar{\bar{b}}}\,dy^4$, $ddddu = \bar{\bar{\bar{c}}}\,dy^4$, &c. &c.

Si l'on n'a fait aucune première différence constante, & que l'expression soit conforme à la règle que nous donnons ici, on aura $\frac{dx}{dy} = a$; donc $d\left(\frac{dx}{dy}\right) = \bar{a}\,dy$, ou 1.°

$dyd\left(\frac{dx}{dy}\right) = \bar{a}dy^2$, d'où l'on tirera $\frac{dyddx - dxddy}{dy \cdot dy^2} = \bar{a}$; donc $d\left(\frac{dyddx - dxddy}{dy \cdot dy^2}\right) = \overline{=}\, ady$, ou $dy^2 d\left(\frac{dyddx - dxddy}{dy \cdot dy^2}\right) = \overline{=}\, ady^3$, ou 2.° $dy^2 d\left(\frac{ddx}{dy^2}\right) = \overline{=}\, ady^3$, par conséquent on aura $\left(\frac{dy^2dddx - dxdyddy - 3dyddxddy + 3dxddy^2}{dy^5}\right) = \overline{=}\, a$; donc $d\left(\frac{dy^2dddx - dxdyddy - 3dyddxddy + 3dxddy^2}{dy^2 \cdot dy^3}\right) = \overline{\equiv}\, ady$, ou $dy^3 d\left(\frac{dy^2dddx - dxdyddy - 3dyddxddy + 3dxddy^2}{dy^2 \cdot dy^3}\right) = \overline{\equiv}\, ady^4$, ou 3.° $dy^3 d\left(\frac{dddx}{dy^3}\right) = \overline{\equiv}\, ady^4$, &c. & ainsi des autres. On réduira donc l'expression proposée à Ady^e, comme on le faisoit lorsque dy avoit été faite constante.

CALCUL DES ÉQUATIONS
AUX QUATRIÉMES DIFFÉRENCES.
PROBLÉME I.

SOIT $dddddx + \alpha ddddy + A = 0$, l'équation qu'il faut intégrer, α étant une fonction de dimension nulle des quantités x, y, dx, dy, ddx, ddy, $dddx$ & $dddy$, & A étant une fonction de ces mêmes quantités dont la dimension est $= 1$.

La question se réduit à trouver une fonction φ de x, y, dx, dy, ddx, ddy, $dddx$ & $dddy$, dont la différence, en faisant différence de $x = dx$, différence de $y = dy$, différence de $dx = ddx$, différence de $dy = ddy$, différence de $ddx = dddx$, & différence de $ddy = dddy$, divisée par le coëfficient de $ddddx$, soit $ddddx + \alpha ddddy + A$.

Si au lieu de faire la différence de $x = dx$, celle de $y = dy$, celle de $dx = ddx$, celle de $dy = ddy$, celle de $ddx = dddx$, & celle de $ddy = dddy$, on eût fait la différence de $x = \partial x$, celle de $y = \partial y$, celle de $dx = \partial dx$, celle de $dy = \partial dy$, celle de $ddx = \partial ddx$, & celle de $ddy = \partial ddy$, on auroit eu $ddddx + \alpha ddddy + \zeta \partial ddx + \gamma \partial ddy + \delta \partial dx + \varepsilon \partial dy + \zeta \partial x + \eta \partial y = 0$.

ζ, γ, δ, ε, ζ & η sont des fonctions de x, y, dx, dy, ddx, ddy, $dddx$ & $dddy$ qui doivent être telles que $\zeta dddx + \gamma ddddy + \delta dddx + \varepsilon ddy + \zeta dx + \eta dy = A$; & si l'on n'eût pas divisé par la fonction qui multiplioit $ddddx$, on auroit eu $\mu ddddx + \alpha \mu ddddy + \zeta \mu \partial ddx + \gamma \mu \partial ddy + \delta \mu \partial dx + \varepsilon \mu \partial dy + \zeta \mu dx + \eta \mu dy = d\varphi$.

μ est une fonction de x, y, dx, dy, ddx, ddy, $dddx$ & $dddy$ qui est inconnue.

Si avant de prendre la différence de φ, au lieu de $dddx$,

de $dddy$, de ddx & de ddy, on eût mis dans cette fonction $\frac{dx^2dr}{x^2}$, $\frac{dx^2ds}{x^2}$, $\frac{dx\,dt}{x}$ & $\frac{dx\,dv}{x}$, & si après en avoir pris la différence, au lieu de dr, de ds, de dt & de dv, on eût remis dans cette différence $\frac{x^2dddx}{dx^2}$, $\frac{x^2dddy}{dx^2}$, $\frac{x\,ddx}{dx}$ & $\frac{x\,ddy}{dx}$, on auroit eu $\mu . d\left(\frac{dx^2dr}{x^2}\right) + \alpha\mu . d\left(\frac{dx^2ds}{x^2}\right) + \beta\mu . d\left(\frac{dx\,dt}{x}\right) + \gamma\mu . d\left(\frac{dx\,dv}{x}\right) + \delta\mu\partial dx + \varepsilon\mu\partial dy + \zeta\mu dx + \eta\mu dy = d\varphi$; mais $d\left(\frac{dx^2dr}{x^2}\right) = \frac{dx^2}{x^2}ddr + \frac{2dddx}{dx}\partial dx - \frac{2dddx}{x}\partial x$, $d\left(\frac{dx^2ds}{x^2}\right) = \frac{dx^2}{x^2}dds + \frac{2dddy}{dx}\partial dx - \frac{2dddy}{x}\partial x$, $d\left(\frac{dx\,dt}{x}\right) = \frac{dx}{x}ddt + \frac{ddx}{dx}\partial dx - \frac{ddx}{x}\partial x$, & $d\left(\frac{dx\,dv}{x}\right) = \frac{dx}{x}ddv + \frac{ddy}{dx}\partial dx - \frac{ddy}{x}\partial x$: on auroit donc eu $\mu\frac{dx^2}{x^2}ddr + \alpha\mu\frac{dx^2}{x^2}dds + \beta\mu\frac{dx}{x}ddt + \gamma\mu\frac{dx}{x}ddv + \left(\delta\mu + 2\mu\frac{dddx}{dx} + 2\alpha\mu\frac{dddy}{dx} + \beta\mu\frac{ddx}{dx} + \gamma\mu\frac{ddy}{dx}\right)\partial dx + \varepsilon\mu\partial dy + \left(\zeta\mu - 2\mu\frac{dddx}{x} - 2\alpha\mu\frac{dddy}{x} - \beta\mu\frac{ddx}{x} - \gamma\mu\frac{ddy}{x}\right)dx + \eta\mu dy = d\varphi$.

Je suppose présentement que la dimension de φ en dx, dy, dr, ds, dt & dv étoit $= e$, & qu'en x & y elle étoit $= f$, j'aurai $3\mu dddx + 3\alpha\mu dddy + 2\beta\mu ddx + 2\gamma\mu ddy + \delta\mu dx + \varepsilon\mu dy = e\varphi$, & $\zeta\mu x + \eta\mu y - 2\mu dddx - 2\alpha\mu dddy - \beta\mu ddx - \gamma\mu ddy = f\varphi$; donc $f\left(3dddx + 3\alpha dddy + 2\beta ddx + 2\gamma ddy + \delta dx + \varepsilon dy\right) = e\left(\zeta x + \eta y - 2dddx - 2\alpha dddy - \beta ddx - \gamma ddy\right)$, & $\frac{\frac{1}{e}d\varphi}{\varphi} = \frac{dddx + \alpha dddy + \beta\partial ddx + \gamma\partial ddy + \delta\partial dx + \varepsilon\partial dy + \zeta\partial x + \eta\partial y}{3dddx + 3\alpha dddy + 2\beta ddx + 2\gamma ddy + \delta dx + \varepsilon dy}$.

Pour avoir les fonctions $\mathfrak{C}$, γ, $\mathfrak{d}$, ϵ, ζ & η, je prends

$dy\eta = A - \mathfrak{C}dddx - \gamma dddy - \mathfrak{d}ddx - \epsilon ddy - \zeta dx$,

$dy\frac{d\eta}{ddddx} = \frac{dA}{ddddx} - \mathfrak{C} - dddx\frac{d\mathfrak{C}}{ddddx} - dddy\frac{d\gamma}{ddddx} - ddx\frac{d\mathfrak{d}}{ddddx} - ddy\frac{d\epsilon}{ddddx} - dx\frac{d\zeta}{ddddx}$,

$dy\frac{d\eta}{dddddy} = \frac{dA}{dddddy} - dddx\alpha\frac{d\mathfrak{C}}{ddddx} + dddx\mathfrak{C}\frac{d\alpha}{ddddx} - dddx\frac{d\alpha}{\partial ddx} - \gamma - dddy\alpha\frac{d\gamma}{ddddx} + dddy\gamma\frac{d\alpha}{ddddx} - dddy\frac{d\alpha}{\partial ddy} - ddx\alpha\frac{d\mathfrak{d}}{ddddx} + ddx\mathfrak{d}\frac{d\alpha}{ddddx} - ddx\frac{d\alpha}{\partial dx} - ddy\alpha\frac{d\epsilon}{ddddx} + ddy\epsilon\frac{d\alpha}{ddddx} - ddy\frac{d\alpha}{\partial dy} - dx\alpha\frac{d\zeta}{ddddx} + dx\zeta\frac{d\alpha}{ddddx} - dx\frac{d\alpha}{\partial x}$,

& je substitue ces valeurs dans l'équation

$dy\alpha\frac{d\eta}{ddddx} - dy\eta\frac{d\alpha}{ddddx} + dy\frac{d\alpha}{\partial y} - dy\frac{d\eta}{dddddy} = 0$;

j'aurai $- dx\frac{d\alpha}{\partial x} - dy\frac{d\alpha}{\partial y} - ddx\frac{d\alpha}{\partial dx} - ddy\frac{d\alpha}{\partial dy} - dddx\frac{d\alpha}{\partial ddx} - dddy\frac{d\alpha}{\partial ddy} + A\frac{d\alpha}{ddddx} - \alpha\frac{dA}{ddddx} + \frac{dA}{dddddy} + \alpha\mathfrak{C} = \gamma$, ou $\gamma = -\tilde{d}\alpha + A\frac{d\alpha}{ddddx} - \alpha\frac{dA}{ddddx} + \frac{dA}{dddddy} + \alpha\mathfrak{C}$.

Soit $-\tilde{d}\alpha + A\frac{d\alpha}{ddddx} - \alpha\frac{dA}{ddddx} + \frac{dA}{dddddy} = B$, on aura $\gamma = B + \alpha\mathfrak{C}$, $\frac{d\gamma}{ddddx} = \frac{dB}{ddddx} + \alpha\frac{d\mathfrak{C}}{ddddx} + \mathfrak{C}\frac{d\alpha}{ddddx}$ & $\frac{d\gamma}{dddddy} = \frac{dB}{dddddy} + \mathfrak{C}\frac{d\alpha}{ddddy} + \alpha^2\frac{d\mathfrak{C}}{ddddx} - \alpha\mathfrak{C}\frac{d\alpha}{ddddx} + \alpha\frac{d\alpha}{\partial ddx}$; & en substituant ces valeurs dans l'équation $\alpha\frac{d\gamma}{ddddx} - \gamma\frac{d\alpha}{ddddy} + \frac{d\alpha}{\partial ddy} - \frac{d\gamma}{dddddy} = 0$,

on aura $\zeta = \frac{B\frac{d\alpha}{ddddx} - \alpha\frac{dB}{ddddx} + \frac{dB}{dddd y} + \alpha\frac{d\alpha}{\partial ddx} - \frac{d\alpha}{\partial ddy}}{\alpha\frac{d\alpha}{ddddx} - \frac{d\alpha}{dddd y}}$,

& par conſéquent

$\gamma = \frac{(2\alpha\frac{d\alpha}{ddddx} - \frac{d\alpha}{dddd y})B - \alpha^2\frac{dB}{ddddx} + \alpha\frac{dB}{dddd y} + \alpha^2\frac{d\alpha}{\partial ddx} - \alpha\frac{d\alpha}{\partial ddy}}{\alpha\frac{d\alpha}{ddddx} - \frac{d\alpha}{dddd y}}$.

Je regarde donc ces deux fonctions comme connues; & pour avoir δ, je prends $dy\frac{d\eta}{\partial ddx} = \frac{dA}{\partial ddx} - dddx\frac{d\zeta}{\partial ddx} - dddy\zeta\frac{d\gamma}{ddddx} + dddy\gamma\frac{d\zeta}{ddddx} - dddy\frac{d\zeta}{\partial ddy} - \delta - ddx\zeta\frac{d\delta}{ddddx} + dddx\delta\frac{d\zeta}{ddddx} - dddx\frac{d\zeta}{\partial dx} - ddy\zeta\frac{d\varepsilon}{ddddx} + ddy\varepsilon\frac{d\zeta}{ddddx} - ddy\frac{d\zeta}{\partial dy} - dx\zeta\frac{d\zeta}{ddddx} + dx\zeta\frac{d\zeta}{ddddx} - dx\frac{d\zeta}{\partial x}$, & je ſubſtitue pour $dy\eta$, $dy\frac{d\eta}{ddddx}$ & $dy\frac{d\eta}{\partial ddx}$, leurs valeurs dans l'équation $dy\zeta\frac{d\eta}{ddddx} - dy\eta\frac{d\zeta}{ddddx} + dy\frac{d\zeta}{\partial y} - dy\frac{d\eta}{\partial ddx} = 0$; j'aurai $\delta = -\tilde{d}\zeta + A\frac{d\zeta}{ddddx} - \zeta\frac{dA}{ddddx} + \frac{dA}{\partial ddx} + \zeta^2$.

Pour avoir ε, je prends $dy\frac{d\eta}{\partial ddy} = \frac{dA}{\partial ddy} - dddx\gamma\frac{d\zeta}{ddddx} + dddx\zeta\frac{d\gamma}{ddddx} - dddx\frac{d\gamma}{\partial ddx} - dddy\frac{d\gamma}{\partial ddy} - ddx\gamma\frac{d\delta}{ddddx} + ddx\delta\frac{d\gamma}{ddddx} - ddx\frac{d\gamma}{\partial dx} - \varepsilon - ddy\gamma\frac{d\varepsilon}{ddddx} + ddy\varepsilon\frac{d\gamma}{ddddx} - ddy\frac{d\gamma}{\partial dy} - dx\gamma\frac{d\zeta}{ddddx} + dx\zeta\frac{d\gamma}{ddddx} - dx\frac{d\gamma}{\partial x}$, & je ſubſtitue pour $dy\eta$, $dy\frac{d\eta}{ddddx}$ & $dy\frac{d\eta}{\partial ddy}$, leurs valeurs dans l'équation

$dy\gamma\frac{dn}{ddddx} - dyn\frac{d\gamma}{ddddx} + dy\frac{d\gamma}{\partial y} - dy\frac{dn}{\partial ddy} = 0$;

j'aurai $\varepsilon = -\tilde{d}\gamma + A\frac{d\gamma}{ddddx} - \gamma\frac{dA}{ddddx} + \frac{dA}{\partial ddy} + \zeta\gamma$.

Les fonctions ζ, γ, δ & ε étant connues, pour avoir ζ, je prends $dy\frac{dn}{\partial dx} = \frac{dA}{\partial dx} - dddx\delta\frac{d\zeta}{ddddx} + dddx\zeta\frac{d\delta}{ddddx} - dddx\frac{d\delta}{\partial ddx} - dddy\delta\frac{d\gamma}{ddddx} + ddd y\gamma\frac{d\delta}{ddddx} - dddy\frac{d\delta}{\partial ddy} - ddx\frac{d\delta}{\partial dx} - ddy\delta\frac{d\varepsilon}{ddddx} + ddy\varepsilon\frac{d\delta}{ddddx} - ddy\frac{d\delta}{\partial dy} - \zeta - dx\delta\frac{d\zeta}{ddddx} + dx\zeta\frac{d\delta}{ddddx} - dx\frac{d\delta}{\partial x}$, & je substitue pour $dy\dot{n}$, $dy\frac{dn}{ddddx}$ & $dy\frac{dn}{\partial dx}$, leurs valeurs dans l'équation $dy\delta\frac{dn}{ddddx} - dyn\frac{d\delta}{ddddx} + dy\frac{d\delta}{\partial y} - dy\frac{dn}{\partial dx} = 0$;

j'aurai $\zeta = -\tilde{d}\delta + A\frac{d\delta}{ddddx} - \delta\frac{dA}{ddddx} + \frac{dA}{\partial dx} + \zeta\delta$,

& par analogie,

$n = -\tilde{d}\varepsilon + A\frac{d\varepsilon}{ddddx} - \varepsilon\frac{dA}{ddddx} + \frac{dA}{\partial dy} + \zeta\varepsilon$.

Les fonctions ζ, γ, δ, ε, ζ & n étant connues, on les substituera dans $f(3dddx + 3\alpha dddy + 2\zeta ddx + 2\gamma ddy + \delta dx + \varepsilon dy) = e(\zeta x + ny - 2dddx - 2\alpha dddy - \zeta ddx - \gamma ddy)$, & on aura les conditions entre α & A. On les substituera dans $\frac{\frac{1}{e}d\varphi}{\varphi} = \frac{dddx + \alpha dddy + \zeta\partial ddx + \gamma\partial ddy + \delta\partial dx + \varepsilon\partial dy + \zeta\partial x + n\partial y}{3ddx + 3\alpha dddy + 2\zeta ddx + 2\gamma ddy + \delta dx + \varepsilon dy}$, & on aura φ par le moyen de cette équation.

Ayant φ, on fera cette fonction $= ap^f dq^e$, & le nombre a servira à remplir l'une des conditions du problème auquel appartiendra l'équation proposée.

Je ſuppoſe qu'on ait fait dy conſtante, & parmi tous les cas poſſibles de l'équation générale $dddd x + \alpha ddddy + A = 0$, je vais chercher celui dans lequel ſera l'équation qu'on aura (par la règle que nous avons donnée dans le Chapitre précédent) à la place de celle qu'on avoit eue en faiſant dy conſtante.

α ſera $= \frac{-dx}{dy}$.

On aura donc $ddddx + \frac{-dx}{dy} ddddy + A = 0$,

$'ddddx + \frac{-dx}{dy} ddddy + \mathcal{C}\partial ddx + \gamma\partial ddy +$
$\delta\partial dx + \varepsilon\partial dy + \zeta\partial x + \eta dy = 0$, $\mathcal{C}dddx +$
$\gamma dddy + \delta ddx + \varepsilon ddy + \zeta dx + \eta dy = A$,
$\mu ddddx + \frac{-\mu dx}{dy} ddddy + \mathcal{C}\mu\partial ddx + \gamma\mu\partial ddy$
$+ \delta\mu\partial dx + \varepsilon\mu\partial dy + \zeta\mu dx + \eta\mu dy = d\phi$,

$$\mu.\frac{3(dyddx - dxddy) + 2dyddx\mathcal{C} + 2dyddy\gamma + dxdy\delta + dy^2\varepsilon}{dy} = \varepsilon\phi,$$

$$\mu.\frac{xdy\zeta + ydy\eta - 2(dyddx - dxddy) - dyddx\mathcal{C} - dyddy\gamma}{dy} = f\phi,$$

$$\gamma = \frac{dyddx - dxddy + dy\left(dx\frac{dA}{ddddx} + dy\frac{dA}{dddy}\right) - dxdy\mathcal{C}}{dy^2} \text{ ou}$$

(en faiſant, pour abréger, $\frac{dyddx - dxddy + dy\left(dx\frac{dA}{ddddx} + dy\frac{dA}{dddy}\right)}{dy^2} = C$)

$$\gamma = C - \frac{dx}{dy}\mathcal{C},$$

$$\delta = -\tilde{d}\mathcal{C} + A\frac{d\mathcal{C}}{ddddx} - \mathcal{C}\frac{dA}{ddddx} + \frac{dA}{\partial ddx} + \mathcal{C}^2,$$

$$\varepsilon = -\tilde{d}\gamma + A\frac{d\gamma}{ddddx} - \gamma\frac{dA}{ddddx} + \frac{dA}{\partial ddy} + \mathcal{C}\gamma,$$

ou (en ſubſtituant pour γ, $\tilde{d}\gamma$ & $\frac{d\gamma}{ddddx}$, leurs valeurs $C - \frac{dx}{dy}\mathcal{C}$, $\tilde{d}C - \frac{dx}{dy}\tilde{d}\mathcal{C} + \frac{dxddy - dyddx}{dy^2}\mathcal{C}$

&

$$\& \frac{dC}{ddddx} - \frac{dx}{dy} \cdot \frac{d\mathcal{C}}{ddddx}), \varepsilon = -\tilde{d}C + \frac{dx}{dy}\tilde{d}\mathcal{C} +$$

$$2.\frac{dyddx - dxddy}{dy^2}\mathcal{C} + A\frac{dC}{ddddx} - C\frac{dA}{ddddx} - \frac{dx}{dy}A\frac{d\mathcal{C}}{ddddx} +$$

$$\frac{dx}{dy}\mathcal{C}\frac{dA}{ddddx} + \frac{dA}{\partial ddy} + \frac{dx\frac{dA}{ddddx} + dy\frac{dA}{dddddy}}{dy}\mathcal{C} - \frac{dx}{dy}\mathcal{C}^2.$$

Je substitue pour γ, δ & ε leurs valeurs dans

$$\mu.\frac{3(dyddx - dxddy) + 2dyddx\mathcal{C} + 2dyddy\gamma + dxdy\delta + dy^2\varepsilon}{dy} = e\varphi;$$

j'aurai $\mu.$

$$\left\{\begin{array}{l} 3(dyddx - dxddy) + 4(dyddx - dxddy)\mathcal{C} + \\ 2dyddyC + dxdy\frac{dA}{\partial ddx} - dy^2\tilde{d}C + dy^2A\frac{dC}{ddddx} - \\ dy^2C\frac{dA}{ddddx} + dy^2\frac{dA}{\partial ddy} + dy.(dx\frac{dA}{ddddx} + dy\frac{dA}{dddddy})\mathcal{C} \end{array}\right\} = e\varphi.$$

$$dy$$

Je suppose que φ étoit une fonction finie, ou que e étoit $= 0$; j'aurai

$$\mathcal{C} = \frac{\left\{\begin{array}{l} -3(dyddx - dxddy) - 2dyddyC - dxdy\frac{dA}{\partial ddx} + \\ dy^2\tilde{d}C + dy^2C\frac{dA}{ddddx} - dy^2A\frac{dC}{ddddx} - dy^2\frac{dA}{\partial ddy} \end{array}\right\}}{4(dyddx - dxddy) + dy(dx\frac{dA}{ddddx} + dy\frac{dA}{dddddy})}$$

Soit $4(dyddx - dxddy) + dy(dx\frac{dA}{ddddx} + dy\frac{dA}{dddddy}) = 0$, & par conséquent aussi $-3(dydddx - dxdddy) - 2dyddyC - dxdy\frac{dA}{\partial ddx} + dy^2\tilde{d}C + dy^2C\frac{dA}{ddddx} - dy^2A\frac{dC}{ddddx} - dy^2\frac{dA}{\partial ddy} = 0$; en mettant dans C pour $dx\frac{dA}{ddddx} + dy\frac{dA}{dddddy}$ sa valeur $4(\frac{dxddy - dyddx}{dy})$, on aura $C = 3(\frac{dxddy - dyddx}{dy^2})$, $\tilde{d}C = 3\cdot(\frac{dxdyddddy - dy^2dddddx - 2dxddy^2 + 2dyddxddy}{dy^3})$

& $\frac{dC}{ddddx} = 0$; & en substituant ces valeurs de C, dC & $\frac{dC}{dddx}$, on aura $6(dxdddy - dyddddx) - 12\,ddy\left(\frac{dxddy - dyddx}{dy}\right) - dy\left(dx\frac{dA}{\partial ddx} + dy\frac{dA}{\partial ddy}\right) + 3\,(dxddy - dyddx)\frac{dA}{dddddx} = 0$.

Soit maintenant l'équation proposée $ddddx + B = 0$, B étant une fonction de x, y, dx, dy, ddx & $dddx$, dont la dimension $= 1$.

Pour transformer cette équation, il faut, suivant la méthode que nous avons donnée, y substituer $\frac{dyddx - dxddy}{dy}$, $\frac{dy^2dddx - dxdyddddy - 3\,dyddxddy + 3\,dxddy^2}{dy^2}$ & $\frac{\left\{\begin{array}{l} dy^3ddddx - dxdy^2dddddy - 6\,dy^2ddyddddx + 10\,dxdyddyddddy \\ \quad - 4\,dy^2ddxddddy - 15\,dyddxddy^2 + 15\,dxddy^3 \end{array}\right\}}{dy^3}$ au lieu de ddx, de $dddx$ & de $ddddx$. Je suppose que B deviendra $= D$, on aura $ddddx + \frac{-dx}{dy}dddddy + D + \frac{\left\{\begin{array}{l} -6\,dy^2ddyddddx + 10\,dxdyddyddddy - \\ 4\,dy^2ddxddddy + 15\,dyddxddy^2 - 15\,dxddy^3 \end{array}\right\}}{dy^3} = 0$.

Soit $A = D + \frac{\left\{\begin{array}{l} -6\,dy^2ddyddddx + 10\,dxdyddyddddy - \\ 4\,dy^2ddxddddy + 15\,dyddxddy^2 - 15\,dxddy^3 \end{array}\right\}}{dy^3}$,

on aura $\frac{dA}{ddddx} = \frac{dB}{ddddx} + \frac{-6\,ddy}{dy}$,

$\frac{dA}{dddddy} = \frac{dB}{ddddx}\cdot\frac{-dx}{dy} + \frac{10\,dxddy - 4\,dyddx}{dy^2}$,

$\frac{dA}{\partial ddx} = \frac{dB}{\partial ddx} + \frac{-4\,dyddddy + 15\,ddy^2}{dy^2} + \frac{dB}{ddddx}\cdot\frac{-3\,ddy}{dy}$

& $\frac{dA}{\partial ddy} = \frac{dB}{\partial ddx}\cdot\frac{-dx}{dy} + \frac{dB}{ddddx}\cdot\frac{-3\,dyddx + 6\,dxddy}{dy^2} + \frac{-6\,dy^2dddx + 10\,dxdyddddy + 30\,dyddxddy - 45\,dxddy^2}{dy^3}$,

& on verra que $dx\,\frac{dA}{ddddx} + dy\,\frac{dA}{ddddx} = -4\left(\frac{dydx - dxddy}{dy}\right)$, que $3dy(dxddy - dyddx)\,\frac{dA}{ddddx} - dy^2\left(dx\,\frac{dA}{\partial ddx} + dy\,\frac{dA}{\partial ddy}\right) + 6dy(dxdddy - dydddx) - 12ddy(dxddy - dyddx) = 0$, & que par conſéquent l'équation $ddddx + \frac{-dx}{dx}dddddy + D + \frac{\left\{\begin{array}{l}-6dy^2ddyddddx + 10dxdyddyddddy - \\ 4dy^2ddxdddddy + 15dyddxddy^2 - 15dxddy^3\end{array}\right\}}{dy^3} = 0$ eſt dans le cas que nous avons déterminé.

LE CALCUL INTÉGRAL.

SECONDE MÉTHODE.

INTRODUCTION.

1748. QUELQU'ÉQUATION différencielle que l'on me propose entre le paramètre p & les variables x, y, son intégrale sera certainement un des termes de cette suite-ci :

$$Ap + Bx + Cy = 0,$$

$$Ap^2 + Bpx + Cpy + Dx^2 + Exy + Fy^2 = 0,$$

$$Ap^3 + Bp^2x + Cp^2y + Dpx^2 + Epxy + Fpy^2 + Gx^3 + Hx^2y + Ixy^2 + Ky^3 = 0,$$

$$Ap^4 + Bp^3x + Cp^3y + Dp^2x^2 + Ep^2xy + Fp^2y^2 + Gpx^3 + Hpx^2y + Ipxy^2 + Kpy^3 + Lx^4 + Mx^3y + Nx^2y^2 + Pxy^3 + Qy^4 = 0, \text{ \&c.}$$

Les coëfficiens A, B, C, D, E, F, &c. désignant des fonctions d'un nombre arbitraire n, s'il s'agit d'une équation aux premières différences; de deux nombres arbitraires n, m, s'il s'agit d'une équation aux secondes différences; de trois nombres arbitraires n, m, l, s'il s'agit d'une équation aux troisièmes différences, &c.

Prenez une des formules précédentes, celle du premier degré, ou celle du second, ou celle du troisième, &c. substituez-y, au lieu des coëfficiens indéterminés A, B, C, D, E, F, &c. des fonctions de n à votre choix, vous aurez une équation qui sera l'intégrale d'une équation aux premières différences. Pour avoir cette équation aux premières différences dont vous avez l'intégrale, différenciez cette intégrale, vous aurez deux équations; chassez-en n, & l'équation qui vous restera entre p, x, y, $\dot{x}$, $\dot{y}$, sera l'équation aux premières différences dont vous avez l'intégrale.

Je prends, par exemple, la formule $Ap + Bx + Cy = 0$, & je fais $A = 1 - n$, $B = 2$, $C = \frac{2-5n}{n}$; j'aurai cette équation-ci $(1-n)p + 2x + \frac{2-5n}{n}y = 0$, ou $n(1-n)p + 2nx + (2-5n)y = 0$, qui sera l'intégrale d'une équation aux premières différences. Pour avoir l'équation aux premières différences dont c'est-là l'intégrale, je différencie cette intégrale; j'aurai $2n\dot{x} + (2-5n)\dot{y} = 0$, & en chassant n, j'aurai l'équation aux premières différences $3p\dot{y}^2 + 10xy^2 - 10y\dot{x}\dot{y} - 2px\dot{y} - 4x\dot{x}\dot{y} + 4yx^2 = 0$, dont l'intégrale est $(1-n)p + 2x + \frac{2-5n}{n}y = 0$.

Prenez une des formules précédentes; mettez dans cette formule pour A, B, C, D, E, F, &c. des fonctions de n & de m, telles que vous voudrez, & vous aurez une équation qui sera l'intégrale d'une équation aux secondes différences. Pour avoir cette équation aux secondes différences dont vous avez l'intégrale, différenciez cette intégrale deux fois, vous aurez trois équations; chassez-en les nombres n & m, & l'équation qui vous restera entre p, x, y, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\ddot{y}$ (je suppose que vous avez fait $\dot{x}$ constant) sera l'équation aux secondes différences dont vous avez l'intégrale.

Prenez, par exemple, cette formule-ci $Ap^2 + Bpx + Cpy + Dx^2 + Exy + Fy^2 = 0$, & faites $A = 3$, $B = 2n$, $C = n - m$, $D = 0$, $E = 3 - 2m$, $F = -nm$, vous aurez cette équation-ci $3p^2 + 2npx + (n-m)py + (3-2m)xy - nmy^2 = 0$, qui sera l'intégrale d'une équation aux secondes différences. Pour avoir cette équation aux secondes différences dont c'est-là l'intégrale, différenciez-la deux fois, vous aurez $2np\dot{x} + (n-m)p\dot{y} + (3-2m)x\dot{y} + (3-2m)y\dot{x} - 2nmy\dot{y} = 0$, & $(n-m)p\ddot{y} +$

$(3 - 2m)x\ddot{y} + 2(3 - 2m)\dot{x}\dot{y} - 2nm\ddot{y}\dot{y} - 2nm\dot{y}^2 = 0$; chaſſez les nombres n & m de ces trois équations, & l'équation qui vous reſtera entre $p, x, y, \dot{x}, \dot{y}, \ddot{y}$, ſera celle dont il s'agit.

Prenez encore une des formules précédentes; mettez dans cette formule, au lieu de A, B, C, D, E, F, &c. des fonctions de n, de m & de l, & vous aurez une équation qui ſera l'intégrale d'une équation aux troiſièmes différences. Pour avoir cette équation aux troiſièmes différences dont vous avez l'intégrale, différenciez cette intégrale trois fois, vous aurez quatre équations; chaſſez-en les nombres n, m, l, & l'équation qui vous reſtera entre $p, x, y, \dot{x}, \dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y}$, ſera l'équation aux troiſièmes différences dont vous avez l'intégrale.

Pour avoir l'intégrale d'une équation différencielle donnée, il faudra donc que la formule que l'on choiſira, & que les valeurs que l'on donnera aux coëfficiens A, B, C, D, E, F, &c. de cette formule, en n ſi c'eſt une équation aux premières différences qui ſoit donnée, en n & en m ſi c'eſt une équation aux ſecondes différences, en n, en m & en l ſi c'eſt une équation aux troiſièmes différences, &c. ſoient telles que l'on arrive de cette intégrale à l'équation différencielle propoſée. De même que pour chaque intégrale il n'y a qu'une ſeule équation aux premières ou aux ſecondes ou aux troiſièmes différences, &c. dont elle ſoit l'intégrale, pour chaque équation aux premières différences il n'y a qu'une ſeule équation entre p, x, y & n qui en ſoit l'intégrale, pour chaque équation aux ſecondes différences il n'y a qu'une ſeule équation entre p, x, y, n & m qui en ſoit l'intégrale, pour chaque équation aux troiſièmes différences il n'y a qu'une ſeule équation entre p, x, y, n, m & l qui en ſoit l'intégrale, &c. Cette intégrale peut ſe préſenter ſous une infinité de formes différentes, mais ce ſera toûjours eſſentiellement la même équation.

Si vous avez l'intégrale d'une équation aux premières différences, & que vous déterminiez n, c'est-à-dire que vous fassiez, par exemple, $n = 0$, ou $n = -3$, ou $n = 5$, &c. l'équation que vous aurez ne sera pas l'intégrale de votre équation aux premières différences, mais elle sera seulement un des cas de cette intégrale; & il en est de même des intégrales des équations aux secondes différences, de celles aux troisièmes, &c. à chaque fois que l'on détermine un ou deux ou trois, &c. des nombres n, m, l, &c. l'équation que l'on a n'est plus qu'un des cas de l'intégrale.

On peut encore observer ici que pour chaque équation aux secondes différences, il y a deux intégrales aux premières différences; car après avoir différencié une fois seulement l'intégrale d'une équation aux secondes différences, je pourrai chasser le nombre m ou le nombre n, & par conséquent avoir une équation aux premières différences où il ne restera que n, & une autre où il ne restera que m, & chacune de ces deux équations sera également l'intégrale de l'équation aux secondes différences, que l'on auroit en différenciant l'intégrale deux fois, & en chassant les deux nombres n, m; que par la même raison, pour chaque équation aux troisièmes différences, il y a trois équations aux secondes qui en sont les intégrales, savoir, celle où il ne reste que le nombre l, celle où il ne reste que le nombre m, & celle enfin où il ne reste que le nombre n; mais bornons-nous quant à présent aux équations aux premières différences.

L'intégrale d'une équation aux premières différences étant donnée, au lieu d'en déduire, comme nous venons de le faire, l'équation aux premières différences dont elle est l'intégrale, je pouvois ordonner cette intégrale par rapport à n, & avoir en la résolvant, $n =$ fonction de dimension nulle de p, de x & de y, & en différenciant, avoir $\dot{x} + \alpha\dot{y} = 0$.

Résolvez l'équation que vous avez trouvée par le premier

procédé, de manière qu'à sa place vous en ayez une autre où $\dot{x}$ & $\dot{y}$ ne soient qu'à la première dimension, cette équation sera $\dot{x} + a\dot{y} = 0$, c'est-à-dire, précisément la même que par le second procédé.

Si vous n'aviez pas fait $\dot{p} = 0$, vous auriez eu $\dot{x} + a\dot{y} + \frac{-x - ya}{p}\dot{p} = 0$ par le premier & par le second procédé.

Soit donc $\dot{x} + \frac{N}{M}\dot{y} = 0$ l'équation que l'on propose d'intégrer.

Par N & par M j'entends deux fonctions, de même dimension, de p, de x & de y, qui n'ont aucun facteur commun, & dont tous les termes sont homogènes & composés de puissances positives.

S'il n'entre aucun radical dans les fonctions N, M, c'est-à-dire, si l'équation différencielle proposée est renfermée dans l'une des formules suivantes, $\dot{x} + \frac{b_1p + b_2x + b_3y}{c_1p + c_2x + c_3y}\dot{y} = 0$, $\dot{x} + \frac{b_1p^2 + b_2px + b_3py + b_4x^2 + b_5xy + b_6y^2}{c_1p^2 + c_2px + c_3py + c_4x^2 + c_5xy + c_6y^2}\dot{y} = 0$, $\dot{x} + \frac{b_1p^3 + b_2p^2x + b_3p^2y + b_4px^2 + b_5pxy + b_6py^2 + b_7x^3 + b_8x^2y + b_9xy^2 + b_{10}y^3}{c_1p^3 + c_2p^2x + c_3p^2y + c_4px^2 + c_5pxy + c_6py^2 + c_7x^3 + c_8x^2y + c_9xy^2 + c_{10}y^3}\dot{y} = 0$, &c. l'intégrale sera $n = \frac{a_1p^2 + a_2x + a_3y}{\alpha_1p^2 + \alpha_2x + \alpha_3y}$, ou $n = \frac{a_1p^2 + a_2px + a_3py + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2}{\alpha_1p^2 + \alpha_2px + \alpha_3py + \alpha_4x^2 + \alpha_5xy + \alpha_6y^2}$, ou $n = \frac{a_1p^3 + a_2p^2x + a_3p^2y + a_4px^2 + a_5pxy + a_6py^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3}{\alpha_1p^3 + \alpha_2p^2x + \alpha_3p^2y + \alpha_4px^2 + \alpha_5pxy + \alpha_6py^2 + \alpha_7x^3 + \alpha_8x^2y + \alpha_9xy^2 + \alpha_{10}y^3}$, ou $n = \frac{a_1p4 +}{\alpha_1p4 +}$, ou $n = \frac{a_1p5 +}{\alpha_1p5 +}$, &c.

S'il entre des radicaux dans les fonctions N, M, l'on fera entrer ces mêmes radicaux dans le numérateur & dans le

le dénominateur des valeurs successives de n, comme autant de lignes, & de la manière la plus générale qu'il sera possible.

Je suppose, par exemple, qu'il n'y ait qu'un seul radical dans l'équation différencielle proposée, & que ce radical soit $\sqrt{(ap^2 + bpx + cpy + dx^2 + exy + fy^2)}$; je fais $z = \sqrt{(ap^2 + bpx + cpy + dx^2 + exy + fy^2)}$, j'aurai $z^2 = ap^2 + bpx + cpy + dx^2 + exy + fy^2$, $\frac{\dot{z}}{\dot{x}} = \frac{bp + 2dx + ey}{2z}$, $\frac{\dot{z}}{\dot{y}} = \frac{cp + ex + 2fy}{2z}$, la formule de l'équation proposée sera $\dot{x} + \frac{b_1p + b_2x + b_3y + b_4z}{c_1p + c_2x + c_3y + c_4z}\dot{y} = 0$,

ou $\dot{x} + \frac{b_1p^2 + b_2px + b_3py + b_4pz + b_5x^2 + b_6xy + b_7xz + b_8y^2 + b_9yz}{c_1p^2 + c_2px + c_3py + c_4pz + c_5x^2 + c_6xy + c_7xz + c_8y^2 + c_9yz}\dot{y} = 0$, &c.

& son intégrale sera $n = \frac{a_1p + a_2x + a_3y + a_4z}{\alpha_1p + \alpha_2x + \alpha_3y + \alpha_4z}$, ou

$n = \frac{a_1p^2 + a_2px + a_3py + a_4pz + a_5x^2 + a_6xy + a_7xz + a_8y^2 + a_9yz}{\alpha_1p^2 + \alpha_2px + \alpha_3py + \alpha_4pz + \alpha_5x^2 + \alpha_6xy + \alpha_7xz + \alpha_8y^2 + \alpha_9yz}$, ou

$n = \frac{a_1p^3 + a_2p^2x + a_3p^2y + a_4p^2z + a_5px^2 + a_6pxy + a_7pxz + a_8py^2 + a_9pyz + a_{10}x^3 + a_{11}x^2y + a_{12}x^2z + a_{13}xy^2 + a_{14}xyz + a_{15}y^3 + a_{16}y^2z}{\alpha_1p^3 + \alpha_2p^2x + \alpha_3p^2y + \alpha_4p^2z + \alpha_5px^2 + \alpha_6pxy + \alpha_7pxz + \alpha_8py^2 + \alpha_9pyz + \alpha_{10}x^3 + \alpha_{11}x^2y + \alpha_{12}x^2z + \alpha_{13}xy^2 + \alpha_{14}xyz + \alpha_{15}y^3 + \alpha_{16}y^2z}$.

S'il entre plusieurs radicaux dans les fonctions N, M, je ferai pour chaque radical ce que je fais pour un seul.

Au reste, lorsque l'on me donnera l'équation $\dot{x} + \frac{N}{M}\dot{y} = 0$, & que je voudrai m'assurer que la fraction $\frac{N}{M}$ est irréductible (s'il n'entre aucun radical dans N ni dans M, & que N & M ne soient fonctions que de trois lignes p, x, y) je ferai

1.° $\frac{N}{M} = \frac{ap + bx + cy}{\alpha p + \beta x + \gamma y}$, 2.° $\frac{N}{M} = \frac{ap^2 + bpx + cpy + dx^2 + exy + fy^2}{\alpha p^2 + \beta px + \gamma py + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2}$,

3.° $\frac{N}{M} = \frac{ap^3 +}{\alpha p^3 +}$ 4.° $\frac{N}{M} = \frac{ap^4 +}{\alpha p^4 +}$, &c.

S'il entre des radicaux dans la fraction $\frac{N}{M}$, je désigne ces

radicaux par des lettres, & je les fais entrer dans le numérateur & dans le dénominateur des valeurs successives que je donne à cette fraction comme autant de lignes, & de la manière la plus générale qu'il est possible ; de cette manière, je réduirai sûrement la fraction $\frac{N}{M}$ ou je démontrerai qu'elle est irréductible.

LEMME.

Soient quatre nombres quelconques $a1$, $a2$, $a3$, $a4$, & quatre autres nombres aussi quelconques $\alpha 1$, $\alpha 2$, $\alpha 3$, $\alpha 4$; faites

$a1\alpha 2 - a1\alpha 2 = a'1$, $a1\alpha 3 - a1\alpha 3 = a^2 1$, $a1\alpha 4 - a1\alpha 4 = a^3 1$,
$a2\alpha 3 - a2\alpha 3 = a'2$, $a2\alpha 4 - a2\alpha 4 = a^2 2$,
$a3\alpha 4 - a3\alpha 4 = a'3$,

vous aurez $a^3 1\, a'2 - a^2 1\, a^2 2 + a'1\, a'3 = 0$.

COROLLAIRE.

Soient autant de nombres quelconques que l'on voudra $a1$, $a2$, $a3$, $a4$, $a5$, $a6$, $a7$, $a8$, $a9$, $a10$, *&c.* & soient autant d'autres nombres aussi quelconques $\alpha 1$, $\alpha 2$, $\alpha 3$, $\alpha 4$, $\alpha 5$, $\alpha 6$, $\alpha 7$, $\alpha 8$, $\alpha 9$, $\alpha 10$, *&c.* je fais

$a1\alpha 2 - a1\alpha 2 = a'1$, $a1\alpha 3 - a1\alpha 3 = a^2 1$, $a1\alpha 4 - a1\alpha 4 = a^3 1$,
$a2\alpha 3 - a2\alpha 3 = a'2$, $a2\alpha 4 - a2\alpha 4 = a^2 2$, $a2\alpha 5 - a2\alpha 5 = a^3 2$,
$a3\alpha 4 - a3\alpha 4 = a'3$, $a3\alpha 5 - a3\alpha 5 = a^2 3$, $a3\alpha 6 - a3\alpha 6 = a^3 3$,
$a4\alpha 5 - a4\alpha 5 = a'4$, $a4\alpha 6 - a4\alpha 6 = a^2 4$, $a4\alpha 7 - a4\alpha 7 = a^3 4$,
$a5\alpha 6 - a5\alpha 5 = a'5$, $a5\alpha 7 - a5\alpha 7 = a^2 5$, $a5\alpha 8 - a5\alpha 8 = a^3 5$,
$a6\alpha 7 - a6\alpha 7 = a'6$, $a6\alpha 8 - a6\alpha 8 = a^2 6$, $a6\alpha 9 - a6\alpha 9 = a^3 6$,
$a7\alpha 8 - a7\alpha 8 = a'7$, $a7\alpha 9 - a7\alpha 9 = a^2 7$, $a7\alpha 10 - a7\alpha 10 = a^3 7$,
$a8\alpha 9 - a8\alpha 9 = a'8$, $a8\alpha 10 - a8\alpha 10 = a^2 8$, &c.
$a9\alpha 10 - a9\alpha 10 = a'9$, &c.
&c.

$a1\,a5 - a1\,a5 = a^{4}1$, $a1\,a6 - a1\,a6 = a^{5}1$, $a1\,a7 - a1\,a7 = a^{6}1$,
$a2\,a6 - a2\,a6 = a^{4}2$, $a2\,a7 - a2\,a7 = a^{5}2$, $a2\,a8 - a2\,a8 = a^{6}2$,
$a3\,a7 - a3\,a7 = a^{4}3$, $a3\,a8 - a3\,a8 = a^{5}3$, $a3\,a9 - a3\,a9 = a^{6}3$,
$a4\,a8 - a4\,a8 = a^{4}4$, $a4\,a9 - a4\,a9 = a^{5}4$, $a4\,a10 - a4\,a10 = a^{6}4$,
$a5\,a9 - a5\,a9 = a^{4}5$, $a5\,a10 - a5\,a10 = a^{5}5$, &c.
$a6\,a10 - a6\,a10 = a^{4}6$, &c.
&c.

$a1\,a8 - a1\,a8 = a^{7}1$, $a1\,a9 - a1\,a9 = a^{8}1$, $a1\,a10 - a1\,a10 = a^{9}1$, &c.
$a2\,a9 - a2\,a9 = a^{7}2$, $a2\,a10 - a2\,a10 = a^{8}2$, &c.
$a3\,a10 - a3\,a10 = a^{7}3$, &c.
&c.

j'aurai entre les nombres

$a^{1}1$ $a^{2}1$ $a^{3}1$ $a^{4}1$ $a^{5}1$ $a^{6}1$ $a^{7}1$ $a^{8}1$ $a^{9}1$, &c.
$a^{1}2$ $a^{2}2$ $a^{3}2$ $a^{4}2$ $a^{5}2$ $a^{6}2$ $a^{7}2$ $a^{8}2$, &c.
$a^{1}3$ $a^{2}3$ $a^{3}3$ $a^{4}3$ $a^{5}3$ $a^{6}3$ $a^{7}3$, &c.
$a^{1}4$ $a^{2}4$ $a^{3}4$ $a^{4}4$ $a^{5}4$ $a^{6}4$, &c.
$a^{1}5$ $a^{2}5$ $a^{3}5$ $a^{4}5$ $a^{5}5$, &c.
$a^{1}6$ $a^{2}6$ $a^{3}6$ $a^{4}6$, &c.
$a^{1}7$ $a^{2}7$ $a^{3}7$, &c.
$a^{1}8$ $a^{2}8$, &c.
$a^{1}9$, &c.
&c.

autant d'équations que l'on pourra prendre de fois les nombres $a1$, $a2$, $a3$, $a4$, $a5$, $a6$, $a7$, $a8$, $a9$, $a10$, &c. quatre à quatre différemment. Je mets ici une Table où l'on trouvera par ordre toutes les combinaisons des nombres $a1$, $a2$, $a3$, $a4$, $a5$, $a6$, $a7$, $a8$, $a9$, $a10$, &c. pris quatre à quatre, & à côté de chaque combinaison l'équation qui lui appartient.

COMBINAISONS par ordre des nombres a1, a2, a3, *&c. pris quatre à quatre, & à côté de chaque combinaison l'équation qui lui appartient.*

1. $a1\ a2\ a3\ a4, a^{3}1\ a'2 - a^{2}1\ a^{2}2 + a'1\ a'3 = 0.$
2. $a1\ a2\ a3\ a5, a^{4}1\ a'2 - a'2\ a^{3}2 + a'1\ a^{2}3 = 0.$
3. $a1\ a2\ a4\ a5, a^{4}1\ a^{2}2 - a^{3}1\ a^{3}2 + a'1\ a'4 = 0.$
4. $a1\ a3\ a4\ a5, a^{4}1\ a'3 - a^{3}1\ a^{2}3 + a^{2}1\ a'4 = 0.$
5. $a2\ a3\ a4\ a5, a^{3}2\ a'3 - a^{2}2\ a^{2}3 + a'2\ a'4 = 0.$
6. $a1\ a2\ a3\ a6, a^{5}1\ a'2 - a^{2}1\ a^{4}2 + a'1\ a^{3}3 = 0.$
7. $a1\ a2\ a4\ a6, a^{5}1\ a^{2}2 - a^{3}1\ a^{4}2 + a'1\ a^{2}4 = 0.$
8. $a1\ a3\ a4\ a6, a^{5}1\ a'3 - a^{3}1\ a^{3}3 + a^{2}1\ a^{2}4 = 0.$
9. $a2\ a3\ a4\ a6, a^{4}2\ a'3 - a^{2}1\ a^{3}3 + a'2\ a^{2}4 = 0.$
10. $a1\ a2\ a5\ a6, a^{5}1\ a^{2}2 - a^{4}1\ a^{4}2 + a'1\ a'5 = 0.$
11. $a1\ a3\ a5\ a6, a^{5}1\ a^{2}3 - a^{4}1\ a^{3}3 + a^{2}1\ a'5 = 0.$
12. $a2\ a3\ a5\ a6, a^{4}2\ a^{2}3 - a^{3}2\ a^{3}3 + a'2\ a'5 = 0.$
13. $a1\ a4\ a5\ a6, a^{5}1\ a'4 - a^{4}1\ a^{2}4 + a^{3}1\ a'5 = 0.$
14. $a2\ a4\ a5\ a6, a^{4}2\ a'4 - a^{3}2\ a^{2}4 + a^{2}2\ a'5 = 0.$
15. $a3\ a4\ a5\ a6, a^{3}3\ a'4 - a^{2}3\ a^{2}4 + a'3\ a'5 = 0.$
16. $a1\ a2\ a3\ a7, a^{6}1\ a'2 - a^{2}1\ a^{5}2 + a'1\ a^{4}3 = 0.$
17. $a1\ a2\ a4\ a7, a^{6}1\ a^{2}2 - a^{3}1\ a^{5}2 + a'1\ a^{3}4 = 0.$
18. $a1\ a3\ a4\ a7, a^{6}1\ a'3 - a^{3}1\ a^{4}3 + a^{2}1\ a^{3}4 = 0.$
19. $a2\ a3\ a4\ a7, a^{5}2\ a'3 - a^{2}2\ a^{4}3 + a'2\ a^{3}4 = 0.$
20. $a1\ a2\ a5\ a7, a^{6}1\ a^{3}2 - a^{4}1\ a^{3}2 + a'1\ a^{2}5 = 0.$
21. $a1\ a3\ a5\ a7, a^{6}1\ a^{2}3 - a^{4}1\ a^{4}3 + a^{2}1\ a^{2}5 = 0.$
22. $a2\ a3\ a5\ a7, a^{5}2\ a^{2}3 - a^{3}2\ a^{4}3 + a'2\ a^{2}5 = 0.$
23. $a1\ a4\ a5\ a7, a^{6}1\ a'4 - a^{4}1\ a^{3}4 + a^{3}1\ a^{2}5 = 0.$
24. $a2\ a4\ a5\ a7, a^{5}2\ a'4 - a^{3}2\ a^{3}4 + a^{2}2\ a^{2}5 = 0.$
25. $a3\ a4\ a5\ a7, a^{4}3\ a'4 - a^{2}3\ a^{3}4 + a'3\ a^{2}5 = 0.$
26. $a1\ a2\ a6\ a7, a^{6}1\ a^{2}2 - a^{5}1\ a^{3}2 + a'1\ a'6 = 0.$

27. $a1\ a3\ a6\ a7, a^{6}1\ a^{3}3 - a^{5}1\ a^{4}3 + a^{2}1\ a'6 = 0.$
28. $a2\ a3\ a6\ a7, a^{5}2\ a^{3}3 - a^{4}2\ a^{4}3 + a'2\ a'6 = 0.$
29. $a1\ a4\ a6\ a7, a^{6}1\ a^{2}4 - a^{5}1\ a^{3}4 + a^{3}1\ a'6 = 0.$
30. $a2\ a4\ a6\ a7, a^{5}2\ a^{2}4 - a^{4}2\ a^{3}4 + a^{2}2\ a'6 = 0.$
31. $a3\ a4\ a6\ a7, a^{4}3\ a^{2}4 - a^{3}3\ a^{3}4 + a'3\ a'6 = 0.$
32. $a1\ a5\ a6\ a7, a^{6}1\ a'5 - a^{5}1\ a^{2}5 + a^{4}1\ a'6 = 0.$
33. $a2\ a5\ a6\ a7, a^{5}2\ a'5 - a^{4}2\ a^{2}5 + a^{3}2\ a'6 = 0.$
34. $a3\ a5\ a6\ a7, a^{4}3\ a'5 - a^{3}3\ a^{2}5 + a^{2}3\ a'6 = 0.$
35. $a4\ a5\ a6\ a7, a^{3}4\ a'5 - a^{2}4\ a^{2}5 + a'4\ a'6 = 0.$
36. $a1\ a2\ a3\ a8, a^{7}1\ a'2 - a^{2}1\ a^{6}2 + a'1\ a^{3}3 = 0.$
37. $a1\ a2\ a4\ a8, a^{7}1\ a^{2}2 - a^{3}1\ a^{6}2 + a'1\ a^{3}4 = 0.$
38. $a1\ a3\ a4\ a8, a^{7}1\ a'3 - a^{3}1\ a^{3}3 + a^{2}1\ a^{4}4 = 0.$
39. $a2\ a3\ a4\ a8, a^{6}2\ a'3 - a^{2}2\ a^{3}3 + a'1\ a^{4}4 = 0.$
40. $a1\ a2\ a5\ a8, a^{7}1\ a^{3}2 - a^{4}1\ a^{6}2 + a'1\ a^{3}5 = 0.$
41. $a1\ a3\ a5\ a8, a^{7}1\ a^{2}3 - a^{4}1\ a^{3}3 + a^{2}1\ a^{3}5 = 0.$
42. $a2\ a3\ a5\ a8, a^{6}2\ a^{2}3 - a^{3}2\ a^{3}3 + a'2\ a^{3}5 = 0.$
43. $a1\ a4\ a5\ a8, a^{7}1\ a'4 - a^{4}1\ a^{4}4 + a^{3}1\ a^{3}5 = 0.$
44. $a2\ a4\ a5\ a8, a^{6}2\ a'4 - a^{3}2\ a^{4}4 + a^{2}2\ a^{3}5 = 0.$
45. $a3\ a4\ a5\ a8, a^{5}3\ a'4 - a^{2}3\ a^{4}4 + a'3\ a^{3}5 = 0.$
46. $a1\ a2\ a6\ a8, a^{7}1\ a^{2}2 - a^{5}1\ a^{6}2 + a'1\ a^{2}6 = 0.$
47. $a1\ a3\ a6\ a8, a^{7}1\ a^{3}3 - a^{5}1\ a^{5}3 + a^{2}1\ a^{2}6 = 0.$
48. $a2\ a3\ a6\ a8, a^{6}2\ a^{3}3 - a^{4}2\ a^{5}3 + a'2\ a^{2}6 = 0.$
49. $a1\ a4\ a6\ a8, a^{7}1\ a^{2}4 - a^{5}1\ a^{4}4 + a^{3}1\ a^{2}6 = 0.$
50. $a2\ a4\ a6\ a8, a^{6}2\ a^{2}4 - a^{4}2\ a^{4}4 + a^{2}2\ a^{2}6 = 0.$
51. $a3\ a4\ a6\ a8, a^{5}3\ a^{2}4 - a^{3}3\ a^{4}4 + a'3\ a^{2}6 = 0.$
52. $a1\ a5\ a6\ a8, a^{7}1\ a'5 - a^{5}1\ a^{3}5 + a^{4}1\ a^{2}6 = 0.$
53. $a2\ a5\ a6\ a8, a^{6}2\ a'5 - a^{4}2\ a^{3}5 + a^{3}2\ a^{2}6 = 0.$
54. $a3\ a5\ a6\ a8, a^{5}3\ a'5 - a^{3}3\ a^{3}5 + a^{2}3\ a^{2}6 = 0.$
55. $a4\ a5\ a6\ a8, a^{4}4\ a'5 - a^{2}4\ a^{3}5 + a'4\ a^{2}6 = 0.$
56. $a1\ a2\ a7\ a8, a^{7}1\ a^{2}2 - a^{6}1\ a^{6}2 + a'1\ a'7 = 0.$

57. $a1\ a3\ a7\ a8, a^{1}1\ a^{4}3 - a^{1}1\ a^{5}3 + a^{3}1\ a^{1}7 = 0.$
58. $a2\ a3\ a7\ a8, a^{0}2\ a^{4}3 - a^{5}2\ a^{5}3 + a^{1}2\ a^{1}7 = 0.$
59. $a1\ a4\ a7\ a8, a^{7}1\ a^{3}4 - a^{0}1\ a^{4}4 + a^{3}1\ a^{1}7 = 0.$
60. $a2\ a4\ a7\ a8, a^{0}2\ a^{3}4 - a^{1}2\ a^{4}4 + a^{2}2\ a^{1}7 = 0.$
61. $a3\ a4\ a7\ a8, a^{1}3\ a^{1}4 - a^{4}3\ a^{4}4 + a^{1}3\ a^{1}7 = 0.$
62. $a1\ a5\ a7\ a8, a^{7}1\ a^{2}5 - a^{0}1\ a^{3}5 + a^{4}1\ a^{1}7 = 0.$
63. $a2\ a5\ a7\ a8, a^{1}2\ a^{2}5 - a^{1}2\ a^{3}5 + a^{2}2\ a^{1}7 = 0.$
64. $a3\ a5\ a7\ a8, a^{1}3\ a^{2}5 - a^{4}3\ a^{3}5 + a^{2}3\ a^{1}7 = 0.$
65. $a4\ a5\ a7\ a8, a^{4}4\ a^{2}5 - a^{1}4\ a^{3}5 + a^{4}4\ a^{1}7 = 0.$
66. $a1\ a6\ a7\ a8, a^{7}1\ a^{1}6 - a^{0}1\ a^{2}6 + a^{3}1\ a^{1}7 = 0.$
67. $a2\ a6\ a7\ a8, a^{0}2\ a^{1}6 - a^{1}2\ a^{2}6 + a^{4}2\ a^{1}7 = 0.$
68. $a3\ a6\ a7\ a8, a^{1}3\ a^{1}6 - a^{4}3\ a^{2}6 + a^{3}3\ a^{1}7 = 0.$
69. $a4\ a6\ a7\ a8, a^{4}4\ a^{1}6 - a^{1}4\ a^{2}6 + a^{3}4\ a^{1}7 = 0.$
70. $a5\ a6\ a7\ a8, a^{3}5\ a^{1}6 - a^{2}5\ a^{2}6 + a^{1}5\ a^{1}7 = 0.$
71. $a1\ a2\ a3\ a9, a^{8}1\ a^{1}2 - a^{7}1\ a^{7}2 + a^{2}1\ a^{6}3 = 0.$
72. $a1\ a2\ a4\ a9, a^{8}1\ a^{2}2 - a^{3}1\ a^{7}2 + a^{1}1\ a^{5}4 = 0.$
73. $a1\ a3\ a4\ a9, a^{8}1\ a^{1}3 - a^{3}1\ a^{6}3 + a^{2}1\ a^{5}4 = 0.$
74. $a2\ a3\ a4\ a9, a^{7}2\ a^{1}3 - a^{2}2\ a^{6}3 + a^{1}2\ a^{5}4 = 0.$
75. $a1\ a2\ a5\ a9, a^{8}1\ a^{3}2 - a^{4}1\ a^{6}2 + a^{1}1\ a^{4}5 = 0.$
76. $a1\ a3\ a5\ a9, a^{8}1\ a^{2}3 - a^{4}1\ a^{6}3 + a^{2}1\ a^{4}5 = 0.$
77. $a2\ a3\ a5\ a9, a^{7}2\ a^{2}3 - a^{3}2\ a^{6}3 + a^{1}2\ a^{4}5 = 0.$
78. $a1\ a4\ a5\ a9, a^{8}1\ a^{1}4 - a^{4}1\ a^{5}4 + a^{3}1\ a^{4}5 = 0.$
79. $a2\ a4\ a5\ a9, a^{7}2\ a^{1}4 - a^{3}2\ a^{5}4 + a^{2}2\ a^{4}5 = 0.$
80. $a3\ a4\ a5\ a9, a^{6}3\ a^{1}4 - a^{2}3\ a^{5}4 + a^{1}3\ a^{4}5 = 0.$
81. $a1\ a2\ a6\ a9, a^{8}1\ a^{4}2 - a^{5}1\ a^{7}2 + a^{1}1\ a^{3}6 = 0.$
82. $a1\ a3\ a6\ a9, a^{8}1\ a^{3}3 - a^{5}1\ a^{6}3 + a^{2}1\ a^{3}6 = 0.$
83. $a2\ a3\ a6\ a9, a^{7}2\ a^{3}3 - a^{4}2\ a^{6}3 + a^{1}2\ a^{3}6 = 0.$
84. $a1\ a4\ a6\ a9, a^{8}1\ a^{2}4 - a^{5}1\ a^{5}4 + a^{3}1\ a^{3}6 = 0.$
85. $a2\ a4\ a6\ a9, a^{7}2\ a^{2}4 - a^{4}2\ a^{5}4 + a^{2}2\ a^{3}6 = 0.$
86. $a3\ a4\ a6\ a9, a^{6}3\ a^{2}4 - a^{3}3\ a^{5}4 + a^{1}3\ a^{3}6 = 0.$

87. $a1\ a5\ a6\ a9, a^{8}1\ a'5 - a^{5}1\ a^{4}5 + a^{4}1\ a^{3}6 = 0.$
88. $a2\ a5\ a6\ a9, a^{7}2\ a'5 - a^{4}2\ a^{4}5 + a^{3}2\ a^{3}6 = 0.$
89. $a3\ a5\ a6\ a9, a^{6}3\ a'5 - a^{3}3\ a^{4}5 + a^{2}3\ a^{3}6 = 0.$
90. $a4\ a5\ a6\ a9, a^{5}4\ a'5 - a^{2}4\ a^{4}5 + a'4\ a^{3}6 = 0.$
91. $a1\ a2\ a7\ a9, a^{8}1\ a^{5}2 - a^{6}1\ a^{7}2 + a'1\ a^{2}7 = 0.$
92. $a1\ a3\ a7\ a9, a^{8}1\ a^{4}3 - a^{6}1\ a^{6}3 + a^{2}1\ a^{2}7 = 0.$
93. $a2\ a3\ a7\ a9, a^{7}2\ a^{4}3 - a^{5}2\ a^{6}3 + a'2\ a^{2}7 = 0.$
94. $a1\ a4\ a7\ a9, a^{8}1\ a^{3}4 - a^{6}1\ a^{5}4 + a^{3}1\ a^{2}7 = 0.$
95. $a2\ a4\ a7\ a9, a^{7}2\ a^{3}4 - a^{5}2\ a^{5}4 + a^{2}2\ a^{2}7 = 0.$
96. $a3\ a4\ a7\ a9, a^{6}3\ a^{3}4 - a^{4}3\ a^{5}4 + a'3\ a^{2}7 = 0.$
97. $a1\ a5\ a7\ a9, a^{8}1\ a^{2}5 - a^{6}1\ a^{4}5 + a^{4}1\ a^{2}7 = 0.$
98. $a2\ a5\ a7\ a9, a^{7}2\ a^{2}5 - a^{5}2\ a^{4}5 + a^{3}2\ a^{2}7 = 0.$
99. $a3\ a5\ a7\ a9, a^{6}3\ a^{2}5 - a^{4}3\ a^{4}5 + a^{2}3\ a^{2}7 = 0.$
100. $a4\ a5\ a7\ a9, a^{5}4\ a^{2}5 - a^{3}4\ a^{4}5 + a'4\ a^{2}7 = 0.$
101. $a1\ a6\ a7\ a9, a^{8}1\ a'6 - a^{6}1\ a^{3}6 + a^{5}1\ a^{2}7 = 0.$
102. $a2\ a6\ a7\ a9, a^{7}2\ a'6 - a^{5}2\ a^{3}6 + a^{4}2\ a^{2}7 = 0.$
103. $a3\ a6\ a7\ a9, a^{6}3\ a'6 - a^{4}3\ a^{3}6 + a^{3}3\ a^{2}7 = 0.$
104. $a4\ a6\ a7\ a9, a^{5}4\ a'6 - a^{3}4\ a^{3}6 + a^{2}4\ a^{2}7 = 0.$
105. $a5\ a6\ a7\ a9, a^{4}5\ a'6 - a^{2}5\ a^{3}6 + a'5\ a^{2}7 = 0.$
106. $a1\ a2\ a8\ a9, a^{8}1\ a^{6}2 - a^{6}1\ a^{7}2 + a'8\ a'1 - 0.$
107. $a1\ a3\ a8\ a9, a^{8}1\ a^{5}3 - a^{7}1\ a^{6}3 + a^{2}1\ a'8 = 0.$
108. $a2\ a3\ a8\ a9, a^{7}2\ a^{5}3 - a^{6}2\ a^{6}3 + a'2\ a'8 = 0.$
109. $a1\ a4\ a8\ a9, a^{8}1\ a^{4}4 - a^{7}1\ a^{5}4 + a^{3}1\ a'8 = 0.$
110. $a2\ a4\ a8\ a9, a^{7}2\ a^{4}4 - a^{6}2\ a^{5}4 + a^{2}2\ a'8 = 0.$
111. $a3\ a4\ a8\ a9, a^{6}3\ a^{4}4 - a^{5}3\ a^{5}4 + a'3\ a'8 = 0.$
112. $a1\ a5\ a8\ a9, a^{8}1\ a^{3}5 - a^{7}1\ a^{4}5 + a^{4}1\ a'8 = 0.$
113. $a2\ a5\ a8\ a9, a^{7}2\ a^{3}5 - a^{6}2\ a^{4}5 + a^{3}2\ a'8 = 0.$
114. $a3\ a5\ a8\ a9, a^{6}3\ a^{3}5 - a^{5}3\ a^{4}5 + a^{2}3\ a'8 = 0.$
115. $a4\ a5\ a8\ a9, a^{5}4\ a^{3}5 - a^{4}4\ a^{4}5 + a'4\ a'8 = 0.$
116. $a1\ a6\ a8\ a9, a^{8}1\ a^{2}6 - a^{7}1\ a^{3}6 + a^{5}1\ a'8 = 0.$

117. $a2\ a6\ a8\ a9, a^{7}2\ a^{2}6 - a^{6}2\ a^{3}6 + a^{4}2\ a^{1}8 = 0.$
118. $a3\ a7\ a8\ a9, a^{6}3\ a^{1}7 - a^{5}3\ a^{2}7 + a^{4}3\ a^{1}8 = 0.$
119. $a4\ a6\ a8\ a9, a^{5}4\ a^{2}6 - a^{4}4\ a^{3}6 + a^{2}4\ a^{1}8 = 0.$
120. $a5\ a6\ a8\ a9, a^{4}5\ a^{2}6 - a^{3}5\ a^{3}6 + a^{1}5\ a^{1}8 = 0.$
121. $a1\ a7\ a8\ a9, a^{8}1\ a^{1}7 - a^{7}1\ a^{2}7 + a^{6}1\ a^{1}8 = 0.$
122. $a2\ a7\ a8\ a9, a^{7}2\ a^{1}7 - a^{6}2\ a^{2}7 + a^{5}2\ a^{1}8 = 0.$
123. $a3\ a7\ a8\ a9, a^{6}3\ a^{1}7 - a^{5}3\ a^{2}7 + a^{4}3\ a^{1}8 = 0.$
124. $a4\ a7\ a8\ a9, a^{5}4\ a^{1}7 - a^{4}4\ a^{2}7 + a^{3}4\ a^{1}8 = 0.$
125. $a5\ a7\ a8\ a9, a^{4}5\ a^{1}7 - a^{3}5\ a^{2}7 + a^{2}5\ a^{1}8 = 0.$
126. $a6\ a7\ a8\ a9, a^{3}6\ a^{1}7 - a^{2}6\ a^{2}7 + a^{1}6\ a^{1}8 = 0.$

&c. &c. &c.

EXPOSITION.

PREMIÉRE PARTIE.

I. Soit $n = \frac{a1p + a2x + a3y}{a1p + a2x + a3y}$, en différenciant on aura $\dot{x} + \frac{(a1p + a2x + a3y)a3 - (a1p + a2x + a3y)a3}{(a1p + a2x + a3y)a2 - (a1p + a2x + a3y)a2}\dot{y} = 0$, ou $\dot{x} + \frac{a^{2}1p + a^{1}2x + 0y}{a^{1}1p + 0x + a^{1}2y}\dot{y} = 0$; par conséquent l'équation $\dot{x} + \frac{a^{2}1p + a^{1}2x}{a^{1}1p - a^{1}2y}\dot{y} = 0$, sera la formule de toutes les équations, dont l'intégrale est $n = \frac{a1p + a2x + a3y}{a1p + a2x + a3y}$.

II. Soit $n = \frac{a1p^{2} + a2px + a3py + a4x^{2} + a5xy + a6y^{2}}{a1p^{2} + a2px + a3py + a4x^{2} + a5xy + a6y^{2}}$, en différenciant on aura $\dot{x} + \frac{(a1p^{2} + a2px + a3py + a4x^{2} + a5xy + a6y^{2})(a3p + a5x + 2a6y) - (a1p^{2} + a2px + a3py + a4x^{2} + a5xy + a6y^{2})(a2p + 2a4x + a5y) - (a1p^{2} + a2px + a3py + a4x^{2} + a5xy + a6y^{2})(a3p + a5x + 2a6y)}{a3py + a4x^{2} + a5xy + a6y^{2})(a2p + 2a4x + a5y)}\dot{y} = 0$, ou

$$a^2 1 p^3 + a^1 2 p^2 x + o p^2 y - a^1 3 p x^2 - a^2 3 p x y - a^3 3 p y^2 + a^4 1 + 2 a^5 1 + a^2 2 + a^2 3 + 2 a^4 2 + a^2 3$$

ou $\dot{x} +$

$$\frac{a^1 1 p^3 + o p^2 x - a^1 2 p^2 y - a^2 2 p x^2 - a^3 2 p x y - a^1 2 p y^2 + 2 a^3 1 + a^4 1 + 2 a^2 2 + 2 a^1 3 + a^2 3 + a^3 2}{a^2 4 x^3 + o x^2 y - a^1 5 x y^2 + o y^3 + 2 a^2 4 + 2 a^1 5}$$

$$o x^3 - 2 a^1 4 x^2 y - 2 a^2 4 x y^2 - a^1 5 y^3 + a^1 4 + o \dot{y} = o$$; par conſéquent

l'équation $\dot{x} +$

$$\frac{a^2 1 p^3 + a^1 2 p^2 x + 2 a^5 1 p^2 y - a^1 3 p x^2 + 2 a^4 2 p x y + a^4 1 + a^3 2}{a^1 1 p^3 + 2 a^3 1 p^2 x - a^1 2 p^2 y + a^2 p x^2 + 2 a^1 3 p x y - a^4 1 + a^3 3 p y^2 + a^1 4 x^3 + 2 a^2 4 x^2 y + a^1 5 x y^2 + a^4 2 p y^2 - a^1 4 x^2 y - 2 a^2 4 x y^2 - a^1 5 y^3 + a^2 3}$$ $\dot{y} = o$, en ſuppoſant les

quinze premières conditions du lemme, ſera la formule de toutes les équations dont l'intégrale eſt $n = \frac{a1p^2+}{a1p^2+}$.

III. Soit $n = \frac{a1p^3 + a2p^2x + a3p^2y + a4px^2 + a5pxy + a6py^2 + a7x^3 + a8x^2y + a9xy^2 + a10y^3}{a1p^3 + a2p^2x + a3p^2y + a4px^2 + a5pxy + a6py^2 + a7x^3 + a8x^2y + a9xy^2 + a10y^3}$; en différenciant, on

aura l'équation $\dot{x} +$

$$\frac{a^2 1 p^5 + a^1 2 p^4 x + 2 a^5 1 p^4 y - a^1 3 p^3 x^2 + a^3 2 + a^7 1 + a^4 1 + 3 a^6 1 + 2 a^4 2 p^2 x y + a^3 3 p^3 y^2 - a^4 3 p^2 x^2 + 2 a^3 4 p^2 x^2 y + a^6 3 p^2 x y^2 + 2 a^8 1 + 3 a^9 1 + a^1 4 + 2 a^7 2 + a^1 5 + 3 a^8 2 + a^6 2}{2 a^4 3 p^3 x y - a^4 2 p^2 y^2 + 2 a^5 2 p^2 x^2 + a^6 2 p^2 x^2 y - 2 a^2 4 p^2 x y^2 + 2 a^7 1 + a^2 3 + a^8 1 - a^1 4 + 2 a^2 3 + 3 a^4 3 + 2 a^7 3 p^2 y^3 - a^2 5 p x^4 - 2 a^1 6 p x^3 y + a^4 5 p x^2 y^2 + 2 a^5 5 p x y^3 + a^4 6 p y^4 + a^4 4 + 2 a^5 4 - a^2 6 + 3 a^6 4 + a^8 2 p^2 y^3 + a^3 4 p x^4 + 2 a^2 5 p x^3 y - a^5 4 p x^2 y^2 - 2 a^6 4 p x y^3 - a^5 5 p y^4 + a^1 5 + a^6 3 + a^3 5 + 2 a^2 6 + a^3 6 + 3 a^1 6 + a^3 7 x^5 + 2 a^2 7 x^4 y + a^1 8 x^3 y^2 + 2 a^2 8 x^2 y^3 + a^1 9 x y^4 + 3 a^3 7 + a^1 8}$$

$$a^1 7 x^4 y - 2 a^2 7 x^3 y^2 - 3 a^3 7 x^2 y^3 - 2 a^2 8 x y^4 - a^1 9 y^5$$ $\dot{y} = o$, qui,

en supposant les deux cens dix premières conditions du lemme, sera la formule de toutes les équations dont l'intégrale est $n = \frac{a_1 p^3 + \ldots}{\alpha_1 p^3 + \ldots}$.

SECONDE PARTIE.

I. Il n'y a que la première équation différencielle $\dot{x} + \frac{b_1 p + b_2 x + b_3 y}{\mathcal{C}_1 p + \mathcal{C}_2 x + \mathcal{C}_3 y}\dot{y} = 0$, qui puisse appartenir à la première formule $\dot{x} + \frac{a'_1 p + a'_2 x}{a'_1 p - a'_2 y}\dot{y} = 0$, & dont par conséquent l'intégrale puisse être $n = \frac{a_1 p + a_2 x + a_3 y}{\alpha_1 p + \alpha_2 x + \alpha_3 y}$. Pour cela il faut que $b_3 = 0$, $\mathcal{C}_2 = 0$, & que $b_2 + \mathcal{C}_3 = 0$, c'est-à-dire, qu'elle soit $\dot{x} + \frac{b_1 p + b_2 x}{\mathcal{C}_1 p - b_2 y}\dot{y} = 0$; on aura

$a'_1 = \mathcal{C}_1$, $a'_2 = b_1$, ou $\alpha_1 a_2 - a_1 \alpha_2 = \mathcal{C}_1$, $\alpha_1 a_3 - a_1 \alpha_3 = b_1$.
$a'_2 = b_2$ $\quad \alpha_2 a_3 - a_2 \alpha_3 = b_2$

Soit, par exemple, $\mathcal{C}_1 = 1$, $b_1 = 3$, $b_2 = -5$, l'équation proposée sera $\dot{x} + \frac{3p - 5x}{p + 5y}\dot{y} = 0$, & on aura

$\alpha_1 a_2 - a_1 \alpha_2 = 1$, $\quad \alpha_1 a_3 - a_1 \alpha_3 = 3$;
$\alpha_2 a_3 - a_2 \alpha_3 = -5$

donc $\alpha_1 = \frac{1 + a_1 \alpha_2}{a_2}$. En substituant cette valeur de α_1 dans l'équation $\alpha_1 a_3 - a_1 \alpha_3 = 3$, on aura $\alpha_2 a_3 - a_2 \alpha_3 = \frac{3a_2 - a_3}{a_1}$; mais on a $\alpha_2 a_3 - a_2 \alpha_3 = -5$, donc $3a_2 - a_3 + 5a_1 = 0$. Il y a une infinité de manières de satisfaire à cette équation, parmi lesquelles on est maître de choisir. Soit $a_1 = 0$, $a_3 = 3$, on aura $a_2 = 1$, & en substituant ces valeurs, on aura $\alpha_1 = 1$, $3\alpha_2 - \alpha_3 = -5$. Soit $\alpha_2 = 0$, on aura $\alpha_3 = 5$; l'intégrale sera donc $n = \frac{x + 3y}{p + 5y}$.

II. Il n'y a que la première équation différencielle $\dot{x} + \frac{b1p + b2x + b3y}{c1p + c2x + c3y}\dot{y} = 0$, la seconde $\dot{x} + \frac{b1p^2 + b2px + b3py + b4x^2 + b5xy + b6y^2}{c1p^2 + c2px + c3py + c4x^2 + c5xy + c6y^2}\dot{y} = 0$, & la troisième $\dot{x} + \frac{b1p^3 + b2p^2x + b3p^2y + b4px^2 + b5pxy + b6py^2 + b7x^3 + b8x^2y + b9xy^2 + b10y^3}{c1p^3 + c2p^2x + c3p^2y + c4px^2 + c5pxy + c6py^2 + c7x^3 + c8x^2y + c9xy^2 + c10y^3}\dot{y} = 0$, qui puissent appartenir à la seconde formule $\dot{x} + \frac{\begin{array}{l}a^2 1p^3 + a^1 2p^2x + 2a^5 1p^2y + \\ + a^4 1\end{array}}{\begin{array}{l}a^1 1p^3 + 2a^3 1p^2x - a^1 2p^2y + \\ + a^4 1\end{array}}$

$$\frac{\begin{array}{l}a^3 2px^2 + 2a^4 2pxy + a^3 3py^2 + a^1 4x^3 + 2a^2 4x^2y + a^1 5xy^2 \\ a^1 3\end{array}}{a^2 2px^2 + 2a^1 3pxy - a^4 2py^2 - a^1 4x^2y - 2a^2 4xy^2 - a^1 5y^3 + a^2 3}\dot{y} = 0;$$

& dont par conséquent l'intégrale puisse être

$$n = \frac{a1p^2 + a2px + a3py + a4x^2 + a5xy + a6y^2}{\alpha 1p^2 + \alpha 2px + \alpha 3py + \alpha 4x^2 + \alpha 5xy + \alpha 6y^2}.$$

1.° Pour pouvoir rapporter la première équation différencielle à la seconde formule, il faut la multiplier par $c1p^2 + c2px + c3py + c4x^2 + c5xy + c6y^2$;

$$\text{on aura } \dot{x} + \frac{\begin{array}{l}b1c1p^3 + b1c2p^2x + b1c3p^2y + b1c4px^2 + b1c5pxy + \\ + b2c1 \quad + b3c1 \quad + b2c2 \quad + b2c3 \quad + \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad + b3c2\end{array}}{\begin{array}{l}\mathfrak{C}1c1p^3 + \mathfrak{C}1c2p^2x + \mathfrak{C}1c3p^2y + \mathfrak{C}1c4px^2 + \mathfrak{C}1c5pxy + \\ + \mathfrak{C}2c1 \quad + \mathfrak{C}3c1 \quad + \mathfrak{C}2c2 \quad + \mathfrak{C}2c3 \quad + \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad + \mathfrak{C}3c2\end{array}}$$

$$\frac{\begin{array}{l}b1c6py^2 + b2c4x^3 + b2c5x^2y + b2c6xy^2 + b3c6y^3 \\ b3c3 \quad + b3c4 \quad + b3c5\end{array}}{\begin{array}{l}\mathfrak{C}1c6py^2 + \mathfrak{C}2c4x^3 + \mathfrak{C}2c5x^2y + \mathfrak{C}2c6xy^2 + \mathfrak{C}3c6y^3 \\ \mathfrak{C}3c3 \quad + \mathfrak{C}3c4 \quad + \mathfrak{C}3c5\end{array}}\dot{y} = 0;$$

& en comparant, on aura

$$a^1 1 = \mathfrak{C}1c1,\ a^2 1 = b1c1,\ 2a^3 1 = \mathfrak{C}1c2 + \mathfrak{C}2c1,$$
$$a^1 2 + a^4 1 = b1c2 + b2c1,\ 2a^5 1 = b1c3 + b3c1,$$
$$-a^1 2 + a^4 1 = \mathfrak{C}1c3 + \mathfrak{C}3c1,$$
$$a^2 2 = \mathfrak{C}1c4 + \mathfrak{C}2c2,\ -a^1 3 + a^3 2 = b1c4 + b2c2,$$
$$2a^1 3 = \mathfrak{C}1c5 + \mathfrak{C}2c3 + \mathfrak{C}3c2,$$

$2a^4 2 = b1c5 + b2c3 + b3c2$, $a^3 3 = b1c6 + b3c3$, $- a^4 2 + a^2 3 = \mathfrak{G}1c6 + \mathfrak{G}3c3$,

$a'4 = b2c4$, $2a^2 4 = b2c5 + b3c4$; $a'5 = b2c6 + b3c5$; & $b3c6 = 0$, $\mathfrak{G}2c4 = 0$, $\mathfrak{G}2c5 + \mathfrak{G}3c4 = - b2c4$, $\mathfrak{G}2c6 + \mathfrak{G}3c5 = - b2c5 - b3c4$, $\mathfrak{G}3c6 = - b2c6 - b3c5$.

Des deux équations $b3c6 = 0$, $\mathfrak{G}2c4 = 0$, je conclus que $b3 = 0$, $\mathfrak{G}2 = 0$, ou que $b3 = 0$, $c4 = 0$, ou que $c6 = 0$, $\mathfrak{G}2 = 0$, ou enfin que $c6 = 0$, $c4 = 0$.

Soit $b3 = 0$, $\mathfrak{G}2 = 0$, on aura $b2 + \mathfrak{G}3 = 0$; ce qui eſt le cas de la première formule.

Soit $b3 = 0$, $c4 = 0$, on aura $c5 = 0$, $c6 = 0$; ce qui eſt le dernier de nos quatre cas.

Soit $c6 = 0$, $\mathfrak{G}2 = 0$, on aura $\mathfrak{G}3 + b2 = 0$, $c4 = 0$; ce qui revient encore au dernier cas.

Enfin ſoit $c6 = 0$, $c4 = 0$, on aura $c5 = 0$. Par conſéquent, pour rapporter la première équation à la ſeconde formule auſſi généralement qu'elle peut l'être, il ſuffiſoit de la multiplier par $c1p^2 + c2px + c3py$; nous aurons $a'1 = \mathfrak{G}1c1$,

$a'2 = \frac{1}{2}[b1c2 + (b2 - \mathfrak{G}3).c1 - \mathfrak{G}1c3]$,
$a'3 = \frac{1}{2}(\mathfrak{G}2c3 + \mathfrak{G}3c2)$,
$a'4 = 0$,
$a'5 = 0$

$a^2 1 = b1c1$,
$a^2 2 = \mathfrak{G}2c2$,
$a^2 3 = \frac{1}{2}[(b2 + 2\mathfrak{G}3).c3 + b3c2]$,
$a^2 4 = 0$

$a^3 1 = \frac{1}{2}(\mathfrak{C}_1 c_2 + \mathfrak{C}_2 c_1)$,
$a^3 2 = \frac{1}{2}[\mathfrak{C}_2 c_3 + (2 b_2 + \mathfrak{C}_3) \cdot c_2]$,
$a^3 3 = b_3 c_3$

$a^4 1 = \frac{1}{2}[b_1 c_2 + (b_2 + \mathfrak{C}_3) . c_1 + \mathfrak{C}_1 c_3]$,
$a^4 2 = \frac{1}{2}(b_2 c_3 + b_3 c_2)$

$a^5 1 = \frac{1}{2}(b_1 c_3 + b_3 c_1)$,

& en fubftituant dans les quinze conditions de la formule, nous aurons les douze équations fuivantes

$b_1 \mathfrak{C}_1 (c_2)^2 + [\mathfrak{C}_1 . (b_2 + \mathfrak{C}_3) - 3 b_1 \mathfrak{C}_2] c_1 c_2 - (\mathfrak{C}_1)^2 c_2 c_3 + \mathfrak{C}_2 . (b_2 - \mathfrak{C}_3) (c_1)^2 + \mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2 c_1 c_3 = 0.$

$(b_1)^2 (c_2)^2 + [-2 b_1 . (b_2 + \mathfrak{C}_3) + 2 b_3 \mathfrak{C}_1] c_1 c_2 + [(b_2)^2 - (\mathfrak{C}_3)^2] (c_1)^2 - (\mathfrak{C}_1)^2 (c_3)^2 + [2 \mathfrak{C}_1 . (b_2 + \mathfrak{C}_3) - 2 b_1 \mathfrak{C}_2] c_1 c_3 = 0.$

$[2 b_1 \mathfrak{C}_2 - \mathfrak{C}_1 . (2 b_2 + \mathfrak{C}_3)] (c_2)^2 + \mathfrak{C}_2 \mathfrak{C}_3 c_1 c_2 + \mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2 c_2 c_3 - (\mathfrak{C}_2)^2 c_1 c_3 = 0.$

$[b_1 \mathfrak{C}_2 - \mathfrak{C}_1 . (b_2 + \mathfrak{C}_3)] c_2 c_3 - \mathfrak{C}_2 \mathfrak{C}_3 c_1 c_3 + \mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2 (c_3)^2 + (b_1 \mathfrak{C}_3 - b_3 \mathfrak{C}_1) (c_2)^2 + [\mathfrak{C}_3 . (b_2 + \mathfrak{C}_3) - b_3 \mathfrak{C}_2] c_1 c_2 = 0.$

$- 2 \mathfrak{C}_2 \mathfrak{C}_3 c_2 c_3 + (\mathfrak{C}_2)^2 (c_3)^2 + [\mathfrak{C}_3 . (2 b_2 + \mathfrak{C}_3) - 2 b_3 \mathfrak{C}_2] (c_2)^2 = 0.$

$(b_1)^2 c_2 c_3 + [-b_1 . (b_2 + \mathfrak{C}_3) + 3 b_3 \mathfrak{C}_1] c_1 c_3 - b_1 \mathfrak{C}_1 (c_3)^2 - b_1 b_3 c_1 c_2 + b_3 . (b_2 - \mathfrak{C}_3) (c_1)^2 = 0.$

$(2 b_1 \mathfrak{C}_2 - b_2 \mathfrak{C}_1) c_2 c_3 + b_3 \mathfrak{C}_2 c_1 c_2 - b_2 \mathfrak{C}_2 c_1 c_3 - b_3 \mathfrak{C}_1 (c_2)^2 = 0.$

$b_1 \mathfrak{C}_2 (c_3)^2 + (b_1 \mathfrak{C}_3 - 2 b_3 \mathfrak{C}_1) c_2 c_3 - b_3 \mathfrak{C}_2 c_1 c_3 + b_3 \mathfrak{C}_3 c_1 c_2 = 0.$

$b_2 \mathfrak{C}_2 (c_3)^2 + (b_2 \mathfrak{C}_3 - 3 b_3 \mathfrak{C}_2) c_2 c_3 + b_3 \mathfrak{C}_3 (c_2)^2 = 0.$

$[b1 . (b2 + 6_3) - b_3 6_1] c2 c3 + (b1 6_2 - b2 6_1) (c3)^2 + b2 6_3 c1 c2 + [b_3 6_2 - b2 . (b2 + 6_3)] c1 c3 - b1 b_3 (c2)^2 = 0.$

$[b1 . (b2 + 26_3) - 2b_3 6_1] (c3)^2 - b1 b_3 c2 c3 - b2 b_3 c1 c3 + (b_3)^2 c1 c2 = 0.$

$[b2 . (b2 + 26_3) - 2b_3 6_2)] (c3)^2 - 2b2 b_3 c2 c3 + (b_3)^2 (c2)^2 = 0.$

Au moyen desquelles les nombres $b1$, $b2$, b_3, 6_1, 6_2, 6_3, étant donnés, si ces nombres sont tels que l'équation appartienne à la seconde formule, l'on déterminera les coëfficiens $c1$, $c2$, $c3$, après quoi l'on déterminera les coëfficiens $a1$, $a2$, $a3$, $a4$, $a5$, $a6$; $\alpha 1$, $\alpha 2$, $\alpha 3$, $\alpha 4$, $\alpha 5$, $\alpha 6$, de l'intégrale. Je trouve, par exemple, que si les nombres $b1$, $b2$, b_3, 6_1, 6_2, 6_3 sont tels que $(26_3 + b2) (2b2 + 6_3) - 9b_3 6_2 = 0$, l'équation sera intégrable par la seconde formule, & qu'on aura $c1 = \frac{b1 . (26_3 + b2) - 3b_3 6_1}{b_3 . (b2 - 6_3)}$, $c2 = \frac{26_3 + b2}{3b_3}$, $c3 = 1$.

Prenons pour exemple une équation qui soit dans le cas que nous venons de dire: soit cette équation

$$\dot{x} + \frac{p + 5x + 3y}{-p + 4x + 2y} \dot{y} = 0,$$

nous aurons

$$b1 = 1, b2 = 5, b_3 = 3, 6_1 = -1, 6_2 = 4, 6_3 = 2;$$

donc

$$c1 = 2, c2 = 1, c3 = 1;$$

donc

$a'1 = -2$, $a^2 1 = 2$, $a^3 1 = \frac{7}{2}$, $a^4 1 = 7$, $a^5 1 = \frac{7}{2}$;
$a'2 = 4$, $a^2 2 = 4$, $a^3 2 = 8$, $a^4 2 = 4$
$a'3 = 3$, $a^2 3 = 6$, $a^3 3 = 3$
$a'4 = 0$, $a^2 4 = 0$
$a'5 = 0$

ou $a1\,a2 - a1\,a2 = -2$, $a1\,a3 - a1\,a3 = 2$,
$a2\,a3 - a2\,a3 = 4$, $a2\,a4 - a2\,a4 = 4$,
$a3\,a4 - a3\,a4 = 3$, $a3\,a5 - a3\,a5 = 6$,
$a4\,a5 - a4\,a5 = 0$, $a4\,a6 - a4\,a6 = 0$
$a5\,a6 - a5\,a6 = 0$

$a1\,a4 - a1\,a4 = \frac{7}{2}$, $a1\,a5 - a1\,a5 = 7$,
$a2\,a5 - a2\,a5 = 8$, $a2\,a6 - a2\,a6 = 4$
$a3\,a6 - a3\,a6 = 3$

$a1\,a6 - a1\,a6 = \frac{7}{2}$

donc $a1 = \frac{-2 + a1\,a2}{a2}$; en substituant cette valeur de $a1$,

on aura $a2\,a3 - a2\,a3 = \frac{2\,a2 + 2\,a3}{a1} = 4$,

$a2\,a4 - a2\,a4 = \frac{\frac{7}{2}\,a2 + 2\,a4}{a1} = 4$,

$a2\,a5 - a2\,a5 = \frac{7\,a2 + 2\,a5}{a1} = 8$,

$a2\,a6 - a2\,a6 = \frac{\frac{7}{2}\,a2 + 2\,a6}{a1} = 4$.

Soit $a1 = 0$, $a2 = 2$, on aura $a3 = -2$, $a4 = -\frac{7}{2}$, $a5 = -7$, $a6 = -\frac{7}{2}$; en substituant ces valeurs, on aura $a1 = -1$, $-2a2 - 2a3 = 4$, $-\frac{7}{2}a2 - 2a4 = 4$, $-7a2 - 2a5 = 8$, $-\frac{7}{2}a2 - 2a6 = 4$, &c. Soit $a2 = 0$, on aura $a3 = -2$, $a4 = -2$, $a5 = -4$, $a6 = -2$, & l'intégrale sera $n = \frac{2px - 2py - \frac{7}{2}x^2 - 7xy - \frac{7}{2}y^2}{-p^2 - 2py - 2x^2 - 4xy - 2y^2}$;

ou $n = \frac{4px - 4py - 7x^2 - 14xy - 7y^2}{p^2 + 2py + 2x^2 + 4xy + 2y^2}$,

ou $n = \frac{7p^2 + 8px + 6py}{p^2 + 2py + 2 \cdot (x+y)^2}$.

2.° Pour pouvoir rapporter la seconde équation $\dot{x} + \frac{b1p^2 + b2px + b3py + b4x^2 + b5xy + b6y^2}{c1p^2 + c2px + c3py + c4x^2 + c5xy + c6y^2}\dot{y} = 0$, à

la seconde formule, il faut la multiplier par $c1p + c2x + c3y$;

$$\begin{array}{l} c1b1p^3 + c1b2p^2x + c1b3p^2y + c1b4px^2 + c1b5pxy + \\ \quad + c2b1 \quad + c3b1 \quad + c2b2 \quad + c2b3 \quad + \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad + c3b2 \end{array}$$

on aura $\dot{x} +$

$$\begin{array}{l} c1\mathcal{C}1p^3 + c1\mathcal{C}2p^2x + c1\mathcal{C}3p^2y + c1\mathcal{C}4px^2 + c1\mathcal{C}5pxy + \\ \quad + c2\mathcal{C}1 \quad + c3\mathcal{C}1 \quad + c2\mathcal{C}2 \quad + c2\mathcal{C}3 \quad + \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad + c3\mathcal{C}2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} c1b6py^2 + c2b4x^3 + c2b5x^2y + c2b6xy^2 + c3b6y^3 \\ c3b3 \quad\quad + c3b4 \quad + c3b5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} c1\mathcal{C}6py^2 + c2\mathcal{C}4x^3 + c2\mathcal{C}5x^2y + c2\mathcal{C}6xy^2 + c3\mathcal{C}6y^3 \\ c3\mathcal{C}3 \quad\quad + c3\mathcal{C}4 \quad + c3\mathcal{C}5 \end{array} \dot{y} = 0;$$

& en comparant, on aura

$$a^2 1 = c1b1, \qquad a'2 + a^4 1 = c1b2 + c2b1,$$
$$- a'2 + a^4 1 = c1\mathcal{C}3 + c3\mathcal{C}1,$$
$$2a^3 1 = c1b3 + c3b1, \quad - a'3 + a^3 2 = c1b4 + c2b2,$$
$$2a'3 = c1\mathcal{C}5 + c2\mathcal{C}3 + c3\mathcal{C}2,$$
$$2a^4 2 = c1b5 + c2b3 + c3b2, \; a^3 3 = c1b6 + c3b3,$$
$$- a^4 2 + a^2 3 = c1\mathcal{C}6 + c3\mathcal{C}3,$$
$$a'4 = c2b4 \qquad 2a^2 4 = c2b5 + c3b4,$$
$$- a'4 = c2\mathcal{C}5 + c3\mathcal{C}4, \quad - 2a^2 4 = c2\mathcal{C}6 + c3\mathcal{C}5,$$
$$a'5 = c2b6 + c3b5, \; a'1 = c1\mathcal{C}1, \; 2a^3 1 = c1\mathcal{C}2 + c2\mathcal{C}1,$$
$$- a'5 = c3\mathcal{C}6$$
$$a^2 2 = c1\mathcal{C}4 + c2\mathcal{C}2, \; c3b6 = 0, \; c2\mathcal{C}4 = 0.$$

Donc $a'1 = \mathcal{C}1c1$

$$a'2 = \tfrac{1}{2}[(b2 - \mathcal{C}3)c1 + b1c2 - \mathcal{C}1c3]$$
$$a'3 = \tfrac{1}{2}(\mathcal{C}5c1 + \mathcal{C}3c2 + \mathcal{C}2c3)$$
$$a'4 = b4c2$$
$$a'5 = b6c2 + b5c3$$

$$a^2 1 = b1c1$$
$$a^2 2 = \mathcal{C}4c1 + \mathcal{C}2c2$$
$$a^2 3 = \tfrac{1}{2}[(2\mathcal{C}6 + b5).c1 + b3c2 + (2\mathcal{C}3 + b2).c3]$$
$$a^2 4 = \tfrac{1}{2}(b5c2 + b4c3).$$

$a^3 1 =$

$a^3 1 = \frac{1}{2}(c1\,\mathcal{C}2 + c2\,\mathcal{C}1)$
$a^3 2 = \frac{1}{2}[(2b4 + \mathcal{C}5).c1 + (2b2 + \mathcal{C}3).c2 + \mathcal{C}2c3]$
$a^3 3 = b6c1 + b3c3$

$a^4 1 = \frac{1}{2}[(b2 + \mathcal{C}3)c1 + b1c2 + \mathcal{C}1c3]$
$a^4 2 = \frac{1}{2}(b5c1 + b3c2 + b2c3)$

$a^5 1 = \frac{1}{2}(b3c1 + b1c3)$

& $c3\,b6 = 0, c2\,\mathcal{C}4 = 0, (b4 + \mathcal{C}5)c2 + \mathcal{C}4c3 = 0,$
$(b5 + \mathcal{C}6)c2 + (b4 + \mathcal{C}5).c3 = 0, b6c2 +$
$(b5 + \mathcal{C}6).c3 = 0.$

De ces deux équations-ci, $c3\,b6 = 0, c2\,\mathcal{C}4 = 0,$ je conclus que $c3 = 0, c2 = 0,$ ou que $c3 = 0,$ $\mathcal{C}4 = 0,$ ou que $b6 = 0, c2 = 0,$ ou enfin que $b6 = 0, \mathcal{C}4 = 0.$

Soit $c2 = 0, c3 = 0,$ & $c1 = 1,$ on aura

$a^1 1 = \mathcal{C}1,$ $a^2 1 = b1,$ $a^3 1 = \frac{1}{2}\mathcal{C}2,$
$a^1 2 = \frac{1}{2}(b2 - \mathcal{C}3), a^2 2 = \mathcal{C}4,$ $a^3 2 = \frac{1}{2}(2b4 + \mathcal{C}5),$
$a^1 3 = \frac{1}{2}\mathcal{C}5,$ $a^2 3 = \frac{1}{2}(2\mathcal{C}6 + b5), a^3 3 = b6$
$a^1 4 = 0,$ $a^2 4 = 0$
$a^1 5 = 0$

$a^4 1 = \frac{1}{2}(b2 + \mathcal{C}3), a^5 1 = \frac{1}{2}b3$
$a^4 2 = \frac{1}{2}b5$

& en substituant dans les quinze conditions de la formule, on aura les douze équations suivantes :

$\mathcal{C}2.(b2 - \mathcal{C}3) - 4b1\,\mathcal{C}4 + 2\mathcal{C}1\,\mathcal{C}5 = 0,$
$(b2 + \mathcal{C}3).(b2 - \mathcal{C}3) - 2b1.(2b4 + \mathcal{C}5) +$
$2\mathcal{C}1.(b5 + 2\mathcal{C}6) = 0,$
$2\mathcal{C}4.(b2 + \mathcal{C}3) - \mathcal{C}2.(2b4 + \mathcal{C}5) = 0,$

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{C}5.(b2+\mathfrak{C}3)-\mathfrak{C}2.(b5+2\mathfrak{C}6)=0,\\
&\mathfrak{C}5.(2b4+\mathfrak{C}5)-2\mathfrak{C}4.(b5+2\mathfrak{C}6)=0,\\
&b3.(b2-\mathfrak{C}3)-2b1b5+4b6\mathfrak{C}1=0,\\
&2b3\mathfrak{C}4-b5\mathfrak{C}2=0,\\
&b3\mathfrak{C}5-2b6\mathfrak{C}2=0,\\
&b5\mathfrak{C}5-4b6\mathfrak{C}4=0,\\
&b3.(2b4+\mathfrak{C}5)-b5.(b2+\mathfrak{C}3)=0,\\
&b3.(b5+2\mathfrak{C}6)-2b6.(b2+\mathfrak{C}3)=0,\\
&b5.(b5+2\mathfrak{C}6)-2b6.(2b4+\mathfrak{C}5)=0,
\end{aligned}$$

pour que l'équation $\dot{x}+\frac{(b1p^2+b2px+b3py+b4x^2+}{(\mathfrak{C}1p^2+\mathfrak{C}2px+\mathfrak{C}3py+\mathfrak{C}4x^2+}\frac{b5xy+b6y^2)p}{\mathfrak{C}5xy+\mathfrak{C}6y^2)p}\dot{y}=0$ appartienne à la seconde formule, & que par conséquent son intégrale soit $n=\frac{a1p^2+}{a1p^2+}$.

Soit, par exemple, l'équation

$$\dot{x}+\frac{p^2+40px-6py+15x^2+10xy-20y^2}{-4p^2-12px-10py+10x^2-80xy+95y^2}\dot{y}=0,$$

on aura $\left\{\begin{matrix}b1=1,\quad b2=40,\quad b3=-6,\ b4=15,\ b5=10,\quad b6=-28\\ \mathfrak{C}1=-4,\ \mathfrak{C}2=-12,\ \mathfrak{C}3=-19,\ \mathfrak{C}4=10,\ \mathfrak{C}5=-80,\ \mathfrak{C}6=95\end{matrix}\right\}$ & on trouvera que ces valeurs satisfont exactement à nos douze conditions; ce qui nous assure que la formule $n=\frac{a1p^2+}{a1p^2+}$ contient l'intégrale de cette équation.

Pour en déterminer les coëfficiens, nous aurons

$$\begin{aligned}
&a1a2-a1a2=-4, \quad a1a3-a1a3=1,\\
&a2a3-a2a3=25, \quad a2a4-a2a4=10,\\
&a3a4-a3a4=-40, \quad a3a5-a3a5=100,\\
&a4a5-a4a5=0, \quad a4a6-a4a6=0\\
&a5a6-a5a6=0\\
&\\
&a1a4-a1a4=-6, \quad a1a5-a1a5=15,\\
&a2a5-a1a5=-25, \quad a2a6-a2a6=5\\
&a3a6-a2a6=-20\\
&\\
&a1a6-a1a6=-3
\end{aligned}$$

donc $\alpha 1 = \frac{-4 + a1\alpha 2}{a2}$,

donc $\alpha 2\alpha 3 - a2\alpha 3 = \frac{a2 + 4a3}{a1} = 25$,

$\alpha 2\alpha 4 - a2\alpha 4 = \frac{-6a2 + 4a4}{a1} = 10$,

$\alpha 2\alpha 5 - a2\alpha 5 = \frac{15a2 + 4a5}{a1} = -25$,

$\alpha 2\alpha 6 - a2\alpha 6 = \frac{-3a2 + 4a6}{a1} = 5$.

Soit $a1 = 0$, $a2 = 4$, on aura $a3 = -1$, $a4 = 6$, $a5 = -15$, $a6 = 3$; & en substituant ces valeurs, on aura $\alpha 1 = -1$, $-\alpha 2 - 4\alpha 3 = 25$, $6\alpha 2 - 4\alpha 4 = 10$, $-15\alpha 2 - 4\alpha 5 = -25$, $3\alpha 2 - 4\alpha 6 = 5$, &c.

Soit $\alpha 2 = 3$, on aura $\alpha 3 = -7$, $\alpha 4 = 2$, $\alpha 5 = -5$, $\alpha 6 = 1$, & l'intégrale sera $n = \frac{4px - py + 6x^2 - 15xy + 3y^2}{-p^2 + 3px - 7py + 2x^2 - 5xy + y^2}$.

Soit $c3 = 0$, $\mathcal{C}4 = 0$, on trouvera $b6 = 0$; ce qui revient au dernier cas.

Soit $b6 = 0$, $c2 = 0$, on trouvera $\mathcal{C}4 = 0$; ce qui revient encore au dernier cas.

Enfin soit $b6 = 0$, $\mathcal{C}4 = 0$, on aura $\mathcal{C}5 = -b4$; $\mathcal{C}6 = -b5$, l'équation sera $\dot{x} + \frac{(b1p^2 + b2px + b3py + (\mathcal{C}1p^2 + \mathcal{C}2px + \mathcal{C}3py - b4x^2 + b5xy)(c1p + c2x + c3y)}{b4xy - b5y^2)(c1p + c2x + c3y)}\dot{y} = 0$, & on aura

$a'1 = \mathcal{C}1\,c1$

$a'2 = \frac{1}{2}[(b2 - \mathcal{C}3) \cdot c1 + b1\,c2 - \mathcal{C}1\,c3]$

$a'3 = \frac{1}{2}(-b4\,c1 + \mathcal{C}3\,c2 + \mathcal{C}2\,c3)$

$a'4 = b4\,c2$

$a'5 = b5\,c3$.

$a^2 1 = b1\,c1$

$a^2 2 = \mathfrak{G}2\,c2$

$a^2 3 = \frac{1}{2}\,[-b5\,c1 + b3\,c2 + (b2 + 2\mathfrak{G}3)\,.\,c3]$

$a^2 4 = \frac{1}{2}\,(b5\,c2 + b4\,c3)$

$a^3 1 = \frac{1}{2}\,(\mathfrak{G}2\,c1 + \mathfrak{G}1\,c2)$

$a^3 2 = \frac{1}{2}\,[b4\,c1 + (2b2 + \mathfrak{G}3)\,.\,c2 + \mathfrak{G}2\,c3]$

$a^3 3 = b3\,c3$

$a^4 1 = \frac{1}{2}\,[(b2 + \mathfrak{G}3)\,.\,c1 + b1\,c2 + \mathfrak{G}1\,c3]$

$a^4 2 = \frac{1}{2}\,(b5\,c1 + b3\,c2 + b2\,c3)$

$a^5 1 = \frac{1}{2}\,(b3\,c1 + b1\,c3)$

& en ſubſtituant dans les quinze conditions de la formule, on aura les quinze équations ſuivantes,

$[\mathfrak{G}2\,.\,(b2 - \mathfrak{G}3) - 2b4\,\mathfrak{G}1]\,(c1)^2 + (-3b1\,\mathfrak{G}2 + \mathfrak{G}1\,.\,(b2 + \mathfrak{G}3)]\,c1\,c2 + \mathfrak{G}1\,\mathfrak{G}2\,c1\,c3 + b1\,\mathfrak{G}1\,(c2)^2 - (\mathfrak{G}1)^2\,c2\,c3 = 0.$

$[(b2)^2 - (\mathfrak{G}3)^2 - 2b1\,b4 - 2b5\,\mathfrak{G}1]\,(c1)^2 + [-2b1\,.\,(b2 + \mathfrak{G}3) + 2b3\,\mathfrak{G}1]\,c1\,c2 + (b1)^2\,(c2)^2 + [2\mathfrak{G}1\,.\,(b2 + \mathfrak{G}3) - 2b1\,\mathfrak{G}2]\,c1\,c3 - (\mathfrak{G}1)^2\,(c3)^2 = 0.$

$(\mathfrak{G}2\,\mathfrak{G}3 + 3b4\,\mathfrak{G}1)\,c1\,c2 + [2b1\,\mathfrak{G}2 - \mathfrak{G}1\,.\,(2b2 + \mathfrak{G}3)]\,(c2)^2 + \mathfrak{G}1\,\mathfrak{G}2\,c2\,c3 - b4\,\mathfrak{G}2\,(c1)^2 - (\mathfrak{G}2)^2\,c1\,c3 = 0.$

$[-b4\,.\,(b2 + \mathfrak{G}3) + b5\,\mathfrak{G}2]\,(c1)^2 + [3b1\,b4 + \mathfrak{G}3\,.\,(b2 + \mathfrak{G}3) - b3\,\mathfrak{G}2 + b5\,\mathfrak{G}1]\,c1\,c2 + (b4\,\mathfrak{G}1 + \mathfrak{G}2\,\mathfrak{G}3)\,c1\,c3 + (b1\,\mathfrak{G}3 - \mathfrak{G}3\,\mathfrak{G}1)\,(c2)^2 + [-\mathfrak{G}1\,.\,(b2 + \mathfrak{G}3) + b1\,\mathfrak{G}2]\,c2\,c3 + \mathfrak{G}1\,\mathfrak{G}2\,(c3)^2 = 0.$

$-(b4)^2\,(c1)^2 + (2b5\,\mathfrak{G}2 - 2b4\,\mathfrak{G}3)\,c1\,c2 + [\mathfrak{G}3\,.\,(2b2 + \mathfrak{G}3) - 2b3\,\mathfrak{G}2 + 2b1\,b4]\,(c2)^2 - 2\,(\mathfrak{G}2\,\mathfrak{G}3 + b4\,\mathfrak{G}1)\,c2\,c3 + (\mathfrak{G}2)^2\,(c3)^2 = 0.$

$[b_3 . (b_2 - \mathfrak{G}_3) - 2b_1 b_5] (c_1)^2 - b_1 b_3 c_1 c_2 +$
$[3b_3 \mathfrak{G}_1 - b_1 . (b_2 + \mathfrak{G}_3)] c_1 c_3 + (b_1)^2 c_2 c_3 -$
$b_1 \mathfrak{G}_1 (c_3)^2 = 0.$

$(b_3 \mathfrak{G}_2 + b_5 \mathfrak{G}_1) c_1 c_2 + (2b_1 \mathfrak{G}_2 - b_2 \mathfrak{G}_1) c_2 c_3 -$
$b_5 \mathfrak{G}_2 (c_1)^2 + (- b_2 \mathfrak{G}_2 + 2b_4 \mathfrak{G}_1) c_1 c_3 -$
$b_3 \mathfrak{G}_1 (c_2)^2 = 0.$

$- b_3 b_4 (c_1)^2 + (b_3 \mathfrak{G}_3 + 2b_1 b_5) c_1 c_2 +$
$(- b_3 \mathfrak{G}_2 + b_1 b_4) c_1 c_3 + (b_1 \mathfrak{G}_3 - 2b_3 \mathfrak{G}_1) c_2 c_3 +$
$b_1 \mathfrak{G}_2 (c_3)^2 = 0.$

$- b_4 b_5 (c_1)^2 + (b_2 b_5 - b_3 b_4) c_1 c_2 +$
$(b_5 \mathfrak{G}_2 - b_4 \mathfrak{G}_3) c_1 c_3 + (b_3 \mathfrak{G}_3 + b_1 b_5) (c_2)^2 +$
$(- 3b_3 \mathfrak{G}_2 + b_2 \mathfrak{G}_3 - b_5 \mathfrak{G}_1 + b_1 b_4) c_2 c_3 +$
$(b_2 \mathfrak{G}_2 - b_4 \mathfrak{G}_1) (c_3)^2 = 0.$

$[b_3 b_4 - b_5 . (b_2 + \mathfrak{G}_3)] (c_1)^2 + (b_2 b_3 -$
$b_1 b_5) c_1 c_2 + [b_3 \mathfrak{G}_2 + b_1 b_4 + 3b_5 \mathfrak{G}_1 - b_2 .$
$(b_2 + \mathfrak{G}_3)] c_1 c_3 + [b_1 . (b_2 + \mathfrak{G}_3) - b_3 \mathfrak{G}_1] c_2 c_3 +$
$(b_1 \mathfrak{G}_2 - b_2 \mathfrak{G}_1) (c_3)^2 - b_1 b_3 (c_2)^2 = 0.$

$- b_3 b_5 (c_1)^2 + (3b_1 b_5 - b_2 b_3) c_1 c_3 +$
$(b_3)^2 c_1 c_2 + [b_1 . (b_2 + 2\mathfrak{G}_3) - 2b_3 \mathfrak{G}_1] (c_3)^2 -$
$b_1 b_3 c_2 c_3 = 0.$

$- (b_5)^2 (c_1)^2 + 2 (b_2 b_5 - b_3 b_4) c_1 c_3 +$
$(- 2b_2 b_3 + 2b_1 b_5) c_2 c_3 + (b_3)^2 (c_2)^2 +$
$[b_2 . (b_2 + 2\mathfrak{G}_3) - 2b_3 \mathfrak{G}_2 - 2b_5 \mathfrak{G}_1] (c_3)^2 = 0.$

$[2b_3 b_4 - b_5 . (b_2 + \mathfrak{G}_3)] c_1 c_2 + (b_1 b_4 +$
$b_5 \mathfrak{G}_1) c_2 c_3 - b_1 b_5 (c_2)^2 + [2b_5 \mathfrak{G}_2 - b_4 .$
$(b_2 + \mathfrak{G}_3)] c_1 c_3 - b_4 \mathfrak{G}_1 (c_3)^2 = 0.$

$b_4 b_5 c_1 c_2 + [2b_3 b_4 - b_5 . (2b_2 + \mathfrak{G}_3)] (c_2)^2 +$
$(3b_5 \mathfrak{G}_2 - b_4 \mathfrak{G}_3) c_2 c_3 - (b_4)^2 c_1 c_3 - b_4 \mathfrak{G}_2 (c_3)^2 = 0.$

$(3b_3b_4 - b_2b_5)\,c_2c_3 + (b_5)^2\,c_1c_2 - b_3b_5\,(c_2)^2 - b_4b_5\,c_1c_3 + [-b_4\cdot(b_2 + 2\mathfrak{G}_3) + 2b_5\,\mathfrak{G}_2]\,(c_3)^2 = 0$, au moyen desquelles les coëfficiens $b_1, b_2, b_3\ b_4\ b_5, \mathfrak{G}_1\ \mathfrak{G}_2\ \mathfrak{G}_3$ étant donnés, s'ils sont tels que l'équation appartienne à la seconde formule, l'on déterminera les coëfficiens c_1, c_2, c_3, après quoi l'on déterminera les coëfficiens $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ de l'intégrale.

Soit, par exemple, l'équation

$$\dot{x} + \frac{-7p^2 + 12px - 10py - 21x^2 + 6xy}{-8px - 9py + 21xy - 6y^2}\,\dot{y} = 0,$$ on aura $\begin{cases} b_1 = -7,\ b_2 = 12,\ b_3 = -10,\ b_4 = -21,\ b_5 = 6 \\ \mathfrak{G}_1 = 0,\ \mathfrak{G}_2 = -8,\ \mathfrak{G}_3 = -9 \end{cases}$,

& en substituant ces valeurs dans nos quinze équations, on aura

$c_1\cdot(c_1 + c_2) = 0.$

$-3\cdot11\,(c_1)^2 + 2\cdot3c_1\,c_2 + 7\,(c_2)^2 - 2^4\,c_1c_3 = 0.$

$3^2c_1\,c_2 + 2\cdot7\,(c_2)^2 - 3\cdot7\,(c_1)^2 - 2^3c_1\,c_3 = 0.$

$3\cdot5\,(c_1)^2 + 334\,c_1\,c_2 - 2^3\cdot3^2c_1\,c_3 + 3^2\cdot7\,(c_2)^2 + 2^3\cdot7c_2\,c_3 = 0.$

$-3^2\cdot7^2(c_1)^2 - 2\cdot3\cdot79\,c_1\,c_2 - (c_2)^2 - 2^4\cdot3^2c_2\,c_3 + 2^6\,(c_3)^2 = 0.$

$-2\cdot3^2(c_1)^2 - 2\cdot5\,c_1\,c_2 + 3\,c_1\,c_3 + 7\,c_2\,c_3 = 0.$

$5\,c_1\,c_2 + 7\,c_2\,c_3 + 3\,(c_1)^2 + 2\cdot3\,c_1\,c_3 = 0.$

$-2\cdot3\cdot5\cdot7\,(c_1)^2 + 2\cdot3\,c_1\,c_2 + 67\,c_1\,c_3 + 7\cdot3^2\,c_2\,c_3 + 2^3\cdot7\,(c_3)^2 = 0.$

$2\cdot3^2\cdot7(c_1)^2 - 2\cdot3\cdot23\,c_1\,c_2 - 3\cdot79\,c_1\,c_3 + 2^4\cdot3(c_2)^2 - 3\cdot67\,c_2\,c_3 - 2^5\cdot3\,(c_3)^2 = 0.$

$2^6\cdot3(c_1)^2 - 2\cdot3\cdot13\,c_1\,c_2 + 191\,c_1\,c_3 -$

$3 \cdot 7 c2 c3 + 2^3 \cdot 7 (c3)^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 (c2)^2 = 0.$

$2 \cdot 3 \cdot 5 (c1)^2 - 3 c1 c3 - 5 \cdot 7 c2 c3 + 3 \cdot 7 (c3)^2 + 2 \cdot 5^2 c1 c2 = 0.$

$- 3^2 (c1)^2 - 3 \cdot 23 c1 c3 + 3 \cdot 13 c2 c3 + 5^2 (c2)^2 - 2 \cdot 29 (c3)^2 = 0.$

$2 \cdot 3 \cdot 67 c1 c2 + 3 \cdot 7^2 c2 c3 + 2 \cdot 3 \cdot 7 (c2)^2 - 3 \cdot 11 c1 c3 = 0.$

$- 2 \cdot 3 \cdot 7 c1 c2 + 2 \cdot 5 \cdot 11 (c2)^2 - 3 \cdot 37 c2 c3 - 3 \cdot 7^2 c1 c3 - 2^3 \cdot 7 (c3)^2 = 0.$

$3 \cdot 31 c2 c3 + 2 \cdot 3 c1 c2 + 2 \cdot 5 (c2)^2 + 3 \cdot 7 c1 c3 - 37 (c3)^2 = 0.$

De la première de ces équations il suit que $c1 = 0$, ou que $c1 + c2 = 0$. Soit $c1 = 0$, la seconde équation donnera $c2 = 0$, la cinquième donnera $c3 = 0$; par conséquent $c1$ ne peut pas être $= 0$: or, dès que $c1$ n'est pas $= 0$, l'on peut lui donner telle valeur que l'on voudra. Soit $c1 = 0$, on aura $c2 = - 1$; & en substituant pour $c1$ & $c2$ leurs valeurs dans les quatorze équations restantes, toutes donneront $c3 = - 2$; par conséquent l'équation proposée est sûrement intégrable par la seconde formule. Pour l'intégrer, on aura

$a1\ a2 - a1\ a2 = 0$, $a1\ a3 - a1\ a3 = - 7$,
$a2\ a3 - a2\ a3 = 14$, $a2\ a4 - a2\ a4 = 8$,
$a3\ a4 - a3\ a4 = 23$, $a3\ a5 - a3\ a5 = 8$,
$a4\ a5 - a4\ a5 = 21$, $a4\ a6 - a4\ a6 = 18$
$a5\ a6 - a5\ a6 = - 12$

$a1\ a4 - a1\ a4 = - 4$, $a1\ a5 - a1\ a5 = 5$,
$a2\ a5 - a2\ a5 = - 10$, $a2\ a6 - a2\ a6 = - 4$
$a3\ a6 - a3\ a6 = 20$

$a1\ a6 - a1\ a6 = 2$

Donc $\alpha 1 = \frac{a1\,a2}{a2}$; en substituant, on aura

$$\alpha 2\,a3 - a2\,\alpha 3 = \frac{-7a2}{a1} = 14,$$

$$\alpha 2\,a4 - a2\,\alpha 4 = \frac{-4a2}{a1} = 8,$$

$$\alpha 2\,a5 - a2\,\alpha 5 = \frac{5a2}{a1} = -10,$$

$$\alpha 2\,a6 - a2\,\alpha 6 = \frac{2a2}{a1} = -4.$$

Donc $\alpha 2 = \frac{14 + a2\,a3}{a3}$; en substituant, on aura

$$\alpha 3\,a4 - a3\,\alpha 4 = \frac{8a3 - 14a4}{a2} = 23,$$

$$\alpha 3\,a5 - a3\,\alpha 5 = \frac{-10a3 - 14a5}{a2} = 8,$$

$$\alpha 3\,a6 - a3\,\alpha 6 = \frac{-4a3 - 14a6}{a2} = 20.$$

Soit $a1 = 0$, $a2 = 0$, $a3 = 7$, on aura $a4 = 4$, $a5 = -5$, $a6 = -2$; & en substituant ces valeurs, on aura $\alpha 1 = -1$, $\alpha 2 = 2$, $4\alpha 3 - 7\alpha 4 = 23$, $-5\alpha 3 - 7\alpha 5 = 8$, $-2\alpha 3 - 7\alpha 6 = 20$, &c.

Soit $\alpha 3 = 4$, on aura $\alpha 4 = -1$, $\alpha 5 = -4$, $\alpha 6 = -4$, l'intégrale sera donc $n = \frac{7py + 4x^2 - 5xy - 2y^2}{-p^2 + 2px + 4py - x^2 - 4xy - 4y^2}$.

3.° Si la troisième équation différencielle

$$\dot{x} - \frac{b1\,p^3 + b2\,p^2x + b3\,p^2y + b4\,px^2 + b5\,pxy + b6\,py^2 + b7\,x^3 + b8\,x^2y + b9\,xy^2 + b10\,y^3}{\mathcal{C}1\,p^3 + \mathcal{C}2\,p^2x + \mathcal{C}3\,p^2y + \mathcal{C}4\,px^2 + \mathcal{C}5\,pxy + \mathcal{C}6\,py^2 + \mathcal{C}7\,x^3 + \mathcal{C}8\,x^2y + \mathcal{C}9\,xy^2 + \mathcal{C}10\,y^3}\,\dot{y} = 0$$

appartient à la seconde formule, on aura $b10 = 0$, $\mathcal{C}7 = 0$, $\mathcal{C}8 = -b7$, $\mathcal{C}9 = -b8$, $\mathcal{C}10 = -b9$; par conséquent, dans ce cas, elle sera représentée généralement par celle-ci,

$$\dot{x} - \frac{b1\,p^3 + b2\,p^2x + b3\,p^2y + b4\,px^2 + b5\,pxy + b6\,py^2 + b7\,x^3 + b8\,x^2y + b9\,xy^2}{\mathcal{C}1\,p^3 + \mathcal{C}2\,p^2x + \mathcal{C}3\,p^2y + \mathcal{C}4\,px^2 + \mathcal{C}5\,pxy + \mathcal{C}6\,py^2 - b7\,x^3 - b8\,x^2y - b9\,xy^2}\,\dot{y} = 0,$$ & on aura

& on aura $\begin{cases} a^2 1 = b1,\ a^1 2 + a^2 1 = b2,\ 2a^2 1 = b3, \\ a^1 1 = \mathcal{C}1,\ 2a^1 1 = \mathcal{C}2, \end{cases}$ $\begin{cases} -a^1 3 + a^2 2 = b4, \\ -a^1 2 + a^2 1 = \mathcal{C}3,\ a^2 2 = \mathcal{C}4, \end{cases}$

$2a^1 2 = b5,\ a^1 3 = b6,$ $a^1 4 = \mathcal{C}7,\ 2a^2 4 = b8,\ a^1 5 = b9$
$2a^1 3 = \mathcal{C}5,\ -a^1 2 + a^2 3 = \mathcal{C}6$

Donc $a^1 1 = \mathcal{C}1$ $a^2 1 = b1$

$a^1 2 = \frac{1}{2}(b2 - \beta 3)$ $a^2 2 = \mathcal{C}4$

$a^1 3 = \frac{1}{2}\mathcal{C}5$ $a^2 3 = \frac{1}{2}(b5 + 2\mathcal{C}6)$

$a^1 4 = b7$ $a^2 4 = \frac{1}{2}b8$

$a^1 5 = b9$

$a^3 1 = \frac{1}{2}\mathcal{C}2$ $a^4 1 = \frac{1}{2}(b2 + \mathcal{C}3)$

$a^3 2 = \frac{1}{2}(2b4 + \mathcal{C}5)$ $a^4 2 = \frac{1}{2}b5$

$a^3 3 = b6$

$a^5 1 = \frac{1}{2}b3$

Et en substituant dans les quinze conditions de la formule, on aura $\mathcal{C}2 \cdot (b2 - \mathcal{C}3) - 4b1\mathcal{C}4 + 2\mathcal{C}1\mathcal{C}5 = 0.$

$(b2 + \mathcal{C}3) \cdot (b2 - \mathcal{C}3) - 2b1 \cdot (2b4 + \mathcal{C}5) + 2\mathcal{C}1 \cdot (b5 + 2\mathcal{C}6) = 0.$

$2\mathcal{C}4 \cdot (b2 + \mathcal{C}3) - \mathcal{C}2 \cdot (2b4 + \mathcal{C}5) + 4b7\mathcal{C}1 = 0.$

$\mathcal{C}5 \cdot (b2 + \mathcal{C}3) - \mathcal{C}2 \cdot (b5 + 2\mathcal{C}6) + 4b1b7 = 0.$

$\mathcal{C}5 \cdot (2b4 + \mathcal{C}5) - 2\mathcal{C}4 \cdot (b5 + 2\mathcal{C}6) + 2b7 \cdot (b2 - \mathcal{C}3) = 0.$

$b3 \cdot (b2 - \mathcal{C}3) - 2b1b5 + 4b6\mathcal{C}1 = 0.$

$2b3\mathcal{C}4 - b5\mathcal{C}2 + 2b8\mathcal{C}1 = 0.$

$b3\mathcal{C}5 - 2b6\mathcal{C}2 + 2b1b8 = 0.$

$b5\mathcal{C}5 - 4b6\mathcal{C}4 + b8 \cdot (b2 - \mathcal{C}3) = 0.$

$b3 \cdot (2b4 + \mathcal{C}5) - b5 \cdot (b2 + \mathcal{C}3) + 4b9\mathcal{C}1 = 0.$

$b_3 \cdot (b_5 + 2\mathfrak{C}_6) - 2b_6 \cdot (b_2 + \mathfrak{C}_3) + 4b_1 b_9 = 0.$

$b_5 \cdot (b_5 + 2\mathfrak{C}_6) - 2b_6 \cdot (2b_4 + \mathfrak{C}_5) + 2b_9 \cdot (b_2 - \mathfrak{C}_3) = 0.$

$2b_3 b_7 - b_8 \cdot (b_2 + \mathfrak{C}_3) + 2b_9 \mathfrak{C}_2 = 0.$

$2b_5 b_7 - b_8 \cdot (2b_4 + \mathfrak{C}_5) + 4b_9 \mathfrak{C}_4 = 0.$

$4b_6 b_7 - b_8 \cdot (b_5 + 2\mathfrak{C}_6) + 2b_9 \mathfrak{C}_5 = 0.$

Les nombres $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_9; \mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3, \mathfrak{C}_4, \mathfrak{C}_5, \mathfrak{C}_6$ étant donnés, on verra s'ils satisfont à ces quinze conditions; ce qui arrivera sûrement, si l'équation appartient à la seconde formule ; & au cas qu'ils y satisfassent, l'on déterminera les coëfficiens $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ de l'intégrale par le moyen des équations

$$\begin{aligned}
a_1\alpha_2 - a_1\alpha_2 &= \mathfrak{C}_1 \\
a_2\alpha_3 - a_2\alpha_3 &= \tfrac{1}{2}(b_2 - \mathfrak{C}_3) \\
a_3\alpha_4 - a_3\alpha_4 &= \tfrac{1}{2}\mathfrak{C}_5 \\
a_4\alpha_5 - a_4\alpha_5 &= b_7 \\
a_5\alpha_6 - a_5\alpha_6 &= b_9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_1\alpha_3 - a_1\alpha_3 &= b_1 \\
a_2\alpha_4 - a_2\alpha_4 &= \mathfrak{C}_4 \\
a_3\alpha_5 - a_3\alpha_5 &= \tfrac{1}{2}(b_5 + 2\mathfrak{C}_6) \\
a_4\alpha_6 - a_4\alpha_6 &= \tfrac{1}{2}b_8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_1\alpha_4 - a_1\alpha_4 &= \tfrac{1}{2}\mathfrak{C}_2 \\
a_2\alpha_5 - a_2\alpha_5 &= \tfrac{1}{2}(2b_4 + \mathfrak{C}_5) \\
a_3\alpha_6 - a_3\alpha_6 &= b_6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_1\alpha_5 - a_1\alpha_5 &= \tfrac{1}{2}(b_2 + \mathfrak{C}_3) \\
a_2\alpha_6 - a_2\alpha_6 &= \tfrac{1}{2}b_5
\end{aligned}$$

$$a_1\alpha_6 - a_1\alpha_6 = \tfrac{1}{2}b_3$$

Il n'eſt pas difficile de ſe faire des exemples de ce cas-ci.

Soit, par exemple, $n = \frac{p^2 - 2px + 3py - 4x^2 + 5xy - 6y^2}{-6p^2 + 5px - 4py + 3x^2 - 2xy + y^2}$,

en différenciant on aura $\dot{x} + \frac{-2p^3 - 3p^2x + 10p^2y + p^3 + 6p^2x - 5p^2x - 5p^2y - 2px^2 - 8pxy + 3py^2 + x^3 - 4x^2y + xy^2}{2px^2 + 2pxy - 2py^2 - x^2y + 4xy^2 - y^3} \dot{y} = 0.$

Je ſuppoſe qu'on m'eût propoſé cette équation à intégrer, j'aurois vû d'abord qu'elle ſe pouvoit rapporter à la ſeconde formule, & j'aurois eu $b1 = -2$, $b2 = -3$, $b3 = 10$, $b4 = 2$, $b5 = -8$, $b6 = 3$, $b7 = 1$, $b8 = -4$, $b9 = 1$; & $\mathcal{C}1 = 1$, $\mathcal{C}2 = 6$, $\mathcal{C}3 = -5$, $\mathcal{C}4 = -2$, $\mathcal{C}5 = 2$, $\mathcal{C}6 = 2$; & en ſubſtituant ces valeurs dans les quinze conditions de cette formule, j'aurois trouvé qu'elles y ſatisfont, ce qui m'auroit aſſuré que cette équation appartient réellement à la ſeconde formule: pour l'intégrer, j'aurois eu

$$\begin{array}{ll} \alpha1\alpha2 - a1\alpha2 = 1 & \alpha1\alpha3 - a1\alpha3 = -2 \\ \alpha2\alpha3 - a2\alpha3 = 1 & \alpha2\alpha4 - a2\alpha4 = -2 \\ \alpha3\alpha4 - a3\alpha4 = 1 & \alpha3\alpha5 - a3\alpha5 = -2 \\ \alpha4\alpha5 - a4\alpha5 = 1 & \alpha4\alpha6 - a4\alpha6 = -2 \\ \alpha5\alpha6 - a5\alpha6 = 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \alpha1\alpha4 - a1\alpha4 = 3 & \alpha1\alpha5 - a1\alpha5 = -4 \\ \alpha2\alpha5 - a2\alpha5 = 3 & \alpha2\alpha6 - a2\alpha6 = -4 \\ \alpha3\alpha6 - a3\alpha6 = 3 & \end{array}$$

$$\alpha1\alpha6 - a1\alpha6 = 5$$

Donc $\alpha1 = \frac{1 + a1\,a2}{a2}$;

Donc $\alpha2\alpha3 - a2\alpha3 = \frac{-2a2 - a3}{a1} = 1$,

$\alpha2\alpha4 - a2\alpha4 = \frac{3a2 - a4}{a1} = -2$;

$$a2\,a5 - a2\,a5 = \frac{-4a2 - a5}{a1} = 3,$$

$$a2\,a6 - a2\,a6 = \frac{5a2 - a6}{a1} = -4.$$ En faisant $a1 = 0$, $a3 = 2$, j'aurois eu $a2 = -1$, $a4 = -3$, $a5 = 4$, $a6 = -5$; & en substituant ces valeurs, j'aurois eu $-a1 = 1$, $2a2 + a3 = 1$, $-3a2 + a4 = -2$, $4a2 + a5 = 3$, $-5a2 + a6 = -4$. En faisant $a2 = 0$, j'aurois eu $a3 = 1$, $a4 = -2$, $a5 = 3$, $a6 = -4$, & par conséquent l'intégrale $n = \frac{-px + 2py - 3x^2 + 4xy - 5y^2}{-p^2 + py - 2x^2 + 3xy - 4y^2}$.

III.

Il n'y a que la première équation différencielle, la seconde, la troisième, la quatrième & la cinquième qui puissent appartenir à la troisième formule, & dont par conséquent l'intégrale puisse être $n = \frac{a1p^3 + \dots}{a1p^3 + \dots}$.

1.° Pour pouvoir rapporter la première équation différencielle à la troisième formule, il faut la mettre sous cette forme ci,

$$\dot{x} + \frac{(b1p + b2x + b3y)(c1p^4 + c2p^3x + c3p^3y + c4p^2x^2 + c5p^2xy + c6p^2y^2 + c7px^3 + c8px^2y + c9pxy^2 + c10py^3 + c11x^4 + c12x^3y + c13x^2y^2 + c14xy^3 + c15y^4)}{(C1p + C2x + C3y)(c1p^4 + c2p^3x + c3p^3y + c4p^2x^2 + c5p^2xy + c6p^2y^2 + c7px^3 + c8px^2y + c9pxy^2 + c10py^3 + c11x^4 + c12x^3y + c13x^2y^2 + c14xy^3 + c15y^4)}\,\dot{y} = 0,$$ ou plutôt sous celle-ci,

$$\dot{x} + \frac{\begin{array}{l} b1\,c1p^5 + b1\,c2p^4x + b1\,c3p^4y + b1\,c4p^3x^2 + b1\,c5p^3xy + \\ \quad + b2\,c1 \quad + b3\,c1 \quad + b2\,c2 \quad + b2\,c3 \quad + \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad + b3\,c2 \end{array}}{\begin{array}{l} C1\,c1p^5 + C1\,c2p^4x + C1\,c3p^4y + C1\,c4p^3x^2 + C1\,c5p^3xy + \\ \quad + C2\,c1 \quad + C3\,c1 \quad + C2\,c2 \quad + C2\,c3 \quad + \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad + C3\,c2 \end{array}}$$

$$\frac{\begin{array}{l} b1\,c6p^3y^2 + b1\,c7p^2x^3 + b1\,c8p^2x^2y + b1\,c9p^2xy^2 + b1\,c10p^2y^3 + \\ b3\,c3 \quad + b2\,c4 \quad + b2\,c5 \quad + b2\,c6 \quad + b3\,c6 \quad + \\ \qquad\qquad + b3\,c4 \quad + b3\,c5 \end{array}}{\begin{array}{l} C1\,c6p^3y^2 + C1\,c7p^2x^3 + C1\,c8p^2x^2y + C1\,c9p^2xy^2 + C1\,c10p^2y^3 + \\ C3\,c3 \quad + C2\,c4 \quad + C2\,c5 \quad + C2\,c6 \quad + C3\,c6 \quad + \\ \qquad\qquad + C3\,c4 \quad + C3\,c5 \end{array}}$$

$$\begin{array}{llllllll} b1\,c1\,1px^4 & +\,b1\,c12px^3y & +\,b1\,c13px^2y^2 & +\,b1\,c14pxy^3 & +\,b1\,c15py^4 & +\,b2\,c11x^5 & + \\ b2\,c7 & +\,b2\,c8 & +\,b2\,c9 & +\,b2\,c10 & +\,b3\,c10 & & + \\ & +\,b3\,c7 & +\,b3\,c8 & +\,b3\,c9 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{llllllll} G1\,c1\,1px^4 & +\,G1\,c12px^3y & +\,G1\,c13px^2y^2 & +\,G1\,c14pxy^3 & +\,G1\,c15py^4 & +\,G2\,c11x^5 & + \\ G2\,c7 & +\,G2\,c8 & +\,G2\,c9 & +\,G2\,c10 & +\,G3\,c10 & & + \\ & +\,G3\,c7 & +\,G3\,c8 & +\,G3\,c9 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} b2\,c12x^4y & +\,b2\,c13x^3y^2 & +\,b2\,c14x^2y^3 & +\,b2\,c15xy^4 & +\,b3\,c15y^5 & \\ b3\,c11 & +\,b3\,c12 & +\,b3\,c13 & +\,b3\,c14 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} G2\,c12x^4y & +\,G2\,c13x^3y^2 & +\,G2\,c14x^2y^3 & +\,G2\,c15xy^4 & +\,G3\,c15y^5 & \\ G3\,c11 & +\,G3\,c12 & +\,G3\,c13 & +\,G3\,c14 & & \end{array} \dot{y} = 0,$$

on aura $a^2 1 = b1\,c1$, $a'2 + a^4 1 = b1\,c2 + b2\,c1$, $2a^3 1 = b1\,c3 + b3\,c1$, $- a'3 + a^3 2 + a^7 1 = b1\,c4 + b2\,c2$, $2a^4 2 + a^8 1 = b1\,c5 + b2\,c3 + b3\,c2$, $a^3 3 + 3a^9 1 = b1\,c6 + b3\,c3$, $- a^4 3 + a'4 + a^6 2 = b1\,c7 + b2\,c4$, $2a^2 4 + 2a^7 2 = b1\,c8 + b2\,c5 + b3\,c4$, $a^6 3 + a'5 + 3a^8 2 = b1\,c9 + b2\,c6 + b3\,c5$, $2a^7 3 = b1\,c10 + b3\,c6 - a^2 5 + a^4 4 = b1\,c11 + b2\,c7$, $- 2a'6 + 2a^3 4 = b1\,c12 + b2\,c8 + b3\,c7$, $a^4 5 - a^2 6 + 3a^6 4 = b1\,c13 + b2\,c9 + b3\,c8$, $2a^5 = b1\,c14 + b2\,c10 + b3\,c9$, $a^8 6 = b1\,c15 + b3\,c10$, $a^7 = b2\,c11$, $2a^2 7 = b2\,c12 + b3\,c11$, $a'8 + 3a^3 7 = b2\,c13 + b3\,c12$, $2a^2 8 = b2\,c14 + b3\,c13$, $a^9 = b2\,c15 + b3\,c14$.

$a'1 = G1\,c1$, $2a^3 1 = G1\,c2 + G2\,c1$, $- a'2 + a^4 1 = G1\,c3 + G3\,c1$, $a^2 2 + 3a^6 1 = G1\,c4 + G2\,c2$, $2a'3 + 2a^7 1 = G1\,c5 + G2\,c3 + G3\,c2$, $- a^4 2 + a^2 3 + a^8 1 = G1\,c6 + G3\,c3$, $2a^5 2 = G1\,c7 + G2\,c4$, $a^6 2 - a'4 + 3a^4 3 = G1\,c8 + G2\,c5 + G3\,c4$, $- 2a^2 4 + 2a'3 = G1\,c9 + G2\,c6 + G3\,c5$, $- a^8 2 - a'5 + a^6 3 = G1\,c10 + G3\,c6$, $a^3 4 = G1\,c11 + G2\,c7$, $2a^2 5 = G1\,c12 + G2\,c8 + G3\,c7$, $- a^5 4 + a^3 5 + 3a'6 = G1\,c13 + G2\,c9 + G3\,c8$,

$-2a^6 4 + 2a^5 6 = 61c14 + 62c10 + 63c9,$

$-a^5 5 + a^3 6 = 61c15 + 63c10,$

Et $b3c15 = 0$, $61c11 = 0$,

$62c12 + 63c11 + b2c11 = 0,$

$62c13 + 63c12 + b2c12 + b3c11 = 0,$

$62c14 + 63c13 + b2c13 + b3c12 = 0,$

$62c15 + 63c14 + b2c14 + b3c13 = 0,$

$63c15 + b2c15 + b3c14 = 0.$

De ce que $b3c15 = 0$, $62c11 = 0$, je conclus que $b3 = 0$, $62 = 0$, ou que $b3 = 0$, $c11 = 0$, ou que $c15 = 0$, $62 = 0$, ou enfin que $c15 = 0$, $c11 = 0$.

Soit $b3 = 0$, $62 = 0$, on aura $b2 + 63 = 0$, ce qui eſt le cas de la première formule.

Soit $b3 = 0$, $c11 = 0$, on aura $c12 = 0$, $c13 = 0$, $c14 = 0$, $c15 = 0$, ce qui revient au dernier de nos quatre cas.

Soit $c15 = 0$, $62 = 0$, on aura $c14 = 0$, $c13 = 0$, $c12 = 0$, $c11 = 0$, ce qui revient encore au dernier cas.

Enfin ſoit $c15 = 0$, $c11 = 0$, on aura $c12 = 0$, $c13 = 0$, $c14 = 0$.

Par conſéquent, pour rapporter la première équation à la troiſième formule auſſi généralement qu'elle peut l'être, il ſuffiſoit de la multiplier par $c1p^2 + c2p^3x + c3p^3y + c4p^2x^2 + c5p^2xy + c6p^2y^2 + c7px^3 + c8px^2y + c9pxy^2 + c10py^3$.

On aura

$a^1 1 = 61c1$, $a^2 1 = b1c1$, $a^3 1 = \frac{1}{2}(61c2 + 62c1)$,

$a^2 1 = \frac{1}{2}[(b2 + 63).c1 + b1c2 + 61c3]$, $a^3 1 = \frac{1}{2}(b1c3 + b3c1)$,

$a^1 2 = \frac{1}{2}[(b2 - 63).c1 + b1c2 - 61c3]$, $a^2 2 = \frac{1}{2}(61c7 + 62c4)$,

$a^3 3 = \frac{1}{2}(b1c10 + b3c6)$,

$a^3 4 = 62\,c7$, $a^4 4 = \frac{1}{2}[(2b2 + 63) \cdot c7, + 62\,c8)$

$a^2 5 = \frac{1}{2}(62\,c8 + 63\,c7)$, $a^1 5 = \frac{1}{2}(b2\,c10 + b3\,c9)$

$a^3 6 = \frac{1}{2}[(b2 + 263) \cdot c10 + b3\,c9]$, $a^4 6 = b3\,c10$.

$a^1 7 = 0$, $a^2 7 = 0$.

$a^2 8 = 0$.

$a^1 9 = 0$.

& $a^2 2 + 3a^6 1 = 61\,c4 + 62\,c2$

$- a^1 3 + a^3 2 + a^7 1 = b1\,c4 + b2\,c2$
$2a^1 3 + 2a^7 1 = 61\,c5 + 62\,c3 + 63\,c2$

$2a^4 2 + 2a^8 1 = b1\,c5 + b2\,c3 + b3\,c2$
$- a^4 2 + a^2 3 + a^8 1 = 61\,c6 + 63\,c3$.

$a^3 3 + 3a^9 1 = b1\,c6 + b3\,c3$

$- a^4 3 + a^1 4 + a^6 2 = b1\,c7 + b2\,c4$
$a^6 2 - a^1 4 + 3a^4 3 = 61\,c8 + 62\,c5 + 63\,c4$

$2a^2 4 + 2a^7 2 = b1\,c8 + b2\,c5 + b3\,c4$
$- 2a^2 4 + 2a^5 3 = 61\,c9 + 62\,c6 + 63\,c5$.

$a^6 3 + a^1 5 + 3a^8 2 = b1\,c9 + b2\,c6 + b3\,c5$
$- a^8 2 - a^1 5 + a^6 3 = 61\,c10 + 63\,c6$

$- 2a^1 6 + 2a^5 4 = b2\,c8 + b3\,c7$
$- a^5 4 + a^3 5 + 3a^1 6 = 62\,c9 + 63\,c8$

$a^4 5 - a^2 6 + 3a^6 4 = b2\,c9 + b3\,c8$
$- 2a^6 4 + 2a^2 6 = 62\,c10 + 63\,c9$.

$a^1 8 + 3a^3 7 = 0$.

Au moyen de ces équations, & des deux cens dix

conditions de la formule, on aura

$$a^1 1 \quad a^2 1 \quad a^3 1 \quad a^4 1 \quad a^5 1 \quad a^6 1 \quad a^7 1 \quad a^8 1 \quad a^9 1,$$
$$a^1 2 \quad a^2 2 \quad a^3 2 \quad a^4 2 \quad a^5 2 \quad a^6 2 \quad a^7 2 \quad a^8 2,$$
$$a^1 3 \quad a^2 3 \quad a^3 3 \quad a^4 3 \quad a^5 3 \quad a^6 3 \quad a^7 3,$$
$$a^1 4 \quad a^2 4 \quad a^3 4 \quad a^4 4 \quad a^5 4 \quad a^6 4,$$
$$a^1 5 \quad a^2 5 \quad a^3 5 \quad a^4 5 \quad a^5 5,$$
$$a^1 6 \quad a^2 6 \quad a^3 6 \quad a^4 6,$$
$$a^1 7 \quad a^2 7 \quad a^3 7,$$
$$a^1 8 \quad a^2 8,$$
$$a^1 9;$$

on aura de plus les conditions auxquelles devront satisfaire les coëfficiens $c1, c2, c3, c4, c5, c6, c7, c8, c9, c10$, qui serviront à les déterminer, pourvû que les nombres donnés $b1, b2, b3, B1, B2, B3$, soient tels qu'il faut pour que l'équation $\dot{x} + \frac{(b1p + b2x + b3y)(c1p^4 + c2p^3x + c3p^3y + c4p^2x^2 + c5p^2xy + c6p^2y^2 + c7px^3 + c8px^2y + c9pxy^2 + c10y^3)}{(B1p + B2x + B3y)(c1p^4 + c2p^3x + c3p^3y + c4p^2x^2 + c5p^2xy + c6p^2y^2 + c7px^3 + c8px^2y + c9pxy^2 + c10y^3)}\dot{y} = 0$, appartienne à la troisième formule; ensuite l'on déterminera les coëfficiens $a1, a2, a3, a4, a5, a6, a7, a8, a9, a10, \alpha 1, \alpha 2, \alpha 3, \alpha 4, \alpha 5, \alpha 6, \alpha 7, \alpha 8, \alpha 9, \alpha 10$, de l'intégrale: l'on trouvera, par exemple, que cette équation-ci $\dot{x} + \frac{11p - 43x - 15y}{3 \cdot (3p - 7x + 29y)}\dot{y} = 0$, appartient à la troisième formule, & l'on déterminera son intégrale par cette formule.

2.° Pour pouvoir rapporter la seconde équation différencielle à la troisième formule, il faut la mettre sous cette forme-ci, $\dot{x} + \frac{(b1p^2 + b2px + b3py + b4x^2 + b5xy + b6y^2)(c1p^3 + c2p^2x + c3p^2y + c4px^2 + c5pxy + c6py^2 + c7x^3 + c8x^2y + c9xy^2 + c10y^3)}{(B1p^2 + B2px + B3py + B4x^2 + B5xy + B6y^2)(c1p^3 + c2p^2x + c3p^2y + c4px^2 + c5pxy + c6py^2 + c7x^3 + c8x^2y + c9xy^2 + c10y^3)}\dot{y} = 0$, ou bien sous celle-ci,

$b1\,c1\,p^5 +$

$$b1c1p^5 + b1c2p^4x + b1c3p^4y + b1c4p^3x^2 + b1c5p^3xy + b1c6p^3y^2 + b2c1 + b3c1 + b2c2 + b3c3 + b4c1 + b2c3 + b3c2 + b5c1 + b3c3 + b6c1$$

$\dot{x} +$

$$\overline{\mathcal{C}1c1p^5 + \mathcal{C}1c2p^4x + \mathcal{C}1c3p^4y + \mathcal{C}1c4p^3x^2 + \mathcal{C}1c5p^3xy + \mathcal{C}1c6p^3y^2 + \mathcal{C}2c1 + \mathcal{C}3c1 + \mathcal{C}2c2 + \mathcal{C}3c3 + \mathcal{C}4c1 + \mathcal{C}2c3 + \mathcal{C}3c2 + \mathcal{C}5c1 + \mathcal{C}3c3 + \mathcal{C}6c1}$$

$$\begin{array}{llllll} b1c7p^3x^3 & + b1c8p^2x^2y & + b1c9p^2xy^2 & + b1c10p^2y^3 & + b2c7px^4 & + b2c8px^3y \\ b2c4 & + b2c5 & + b2c6 & + b3c6 & + b4c4 & + b3c7 \\ b4c2 & + b3c4 & + b3c5 & + b6c3 & & + b4c5 \\ & + b4c3 & + b5c3 & & & + b5c4 \\ & + b5c2 & + b6c2 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} \mathcal{C}1c7p^3x^3 & + \mathcal{C}1c8p^2x^2y & + \mathcal{C}1c9p^2xy^2 & + \mathcal{C}1c10p^2y^3 & + \mathcal{C}2c7px^4 & + \mathcal{C}2c8px^3y \\ \mathcal{C}2c4 & + \mathcal{C}2c5 & + \mathcal{C}2c6 & + \mathcal{C}3c6 & + \mathcal{C}4c4 & + \mathcal{C}3c7 \\ \mathcal{C}4c2 & + \mathcal{C}3c4 & + \mathcal{C}3c5 & + \mathcal{C}6c3 & & + \mathcal{C}4c5 \\ & + \mathcal{C}4c3 & + \mathcal{C}5c3 & & & + \mathcal{C}5c4 \\ & + \mathcal{C}5c2 & + \mathcal{C}6c2 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} b2c9px^2y^2 & + b2c10pxy^3 & + b3c10py^4 + b4c7x^5 & + b4c8x^4y + b4c9x^3y^2 \\ b3c8 & + b3c9 & + b6c6 & + b5c7 \quad + b5c8 \\ b4c6 & + b5c6 & & + b6c7 \\ b5c5 & + b6c5 & & \\ b6c4 & & & \end{array}$$

$$\overline{\begin{array}{llll} \mathcal{C}2c9px^2y^2 & + \mathcal{C}2c10pxy^3 & + \mathcal{C}3c10py^4 + \mathcal{C}4c7x^5 & + \mathcal{C}4c8x^4y + \mathcal{C}4c9x^3y^2 \\ \mathcal{C}3c8 & + \mathcal{C}3c9 & + \mathcal{C}6c6 & + \mathcal{C}5c7 \quad + \mathcal{C}5c8 \\ \mathcal{C}4c6 & + \mathcal{C}5c6 & & + \mathcal{C}6c7 \\ \mathcal{C}5c5 & + \mathcal{C}6c5 & & \\ \mathcal{C}6c4 & & & \end{array}}$$

$$\begin{array}{ll} b4c10x^2y^3 & + b5c10xy^4 + b6c10y^5 \\ b5c9 & + b6c9 \\ b6c8 & \end{array}$$

$$\overline{\begin{array}{ll} \mathcal{C}4c10x^2y^3 & + \mathcal{C}5c10xy^4 + \mathcal{C}6c10y^5 \\ \mathcal{C}5c9 & + \mathcal{C}6c9 \\ \mathcal{C}6c8 & \end{array}}$$

$\dot{y} = 0$, on aura

$b6c10 = 0$, $\mathcal{C}4c7 = 0$, $b4c7 + \mathcal{C}4c8 + \mathcal{C}5c7 = 0$, $b4c8 + b5c7 + \mathcal{C}4c9 + \mathcal{C}6c7 = 0$, $b4c9 + b5c8 + b6c7 + \mathcal{C}4c10 + \mathcal{C}5c9 + \mathcal{C}6c8 = 0$, $b4c10 + b5c9 + b6c8 + \mathcal{C}5c10 + \mathcal{C}6c9 = 0$, $b5c10 + b6c9 + \mathcal{C}6c10 = 0$; de ce que $\mathcal{C}4c7 = 0$, $b6c10 = 0$, je conclus que $b6 = 0$, $\mathcal{C}4 = 0$, ou que $b6 = 0$, $c7 = 0$, ou que $c10 = 0$, $\mathcal{C}4 = 0$, ou enfin que $c10 = 0$, $c7 = 0$.

Soit $b6 = 0$, $\mathcal{C}4 = 0$, on aura $\mathcal{C}6 = -b5$, $\mathcal{C}5 = -b4$, par conséquent l'équation qu'il faudra

rapporter à la troisième formule, sera

$$\dot{x} + \frac{(b1\,p^2 + b2\,px + b3\,py + b4\,x^2 + b5\,xy)\,(c1\,p^3 + c2\,p^2x + c3\,p^2y + c4\,px^2 + c5\,pxy + c6\,py^2 + c7\,x^3 + c8\,x^2y + c9\,xy^2 + c10\,y^3)}{(\mathcal{C}1\,p^2 + \mathcal{C}2\,px + \mathcal{C}3\,py - b4\,xy - b5\,y^2)\,(c1\,p^3 + c2\,p^2x + c3\,p^2y + c4\,px^2 + c5\,pxy + c6\,py^2 + c7\,x^3 + c8\,x^2y + c9\,xy^2 + c10\,y^3)}\,\dot{y} = 0.$$

Soit $b6 = 0$, $c7 = 0$, on aura $\mathcal{C}6 = -b5$, $\mathcal{C}5 = -b4$, $c10 = 0$, ce qui revient au dernier cas.

Soit $c10 = 0$, $\mathcal{C}4 = 0$, on aura $c9 = 0$, $c8 = 0$, $c7 = 0$, ce qui revient encore au dernier cas.

Enfin soit $c10 = 0$, $c7 = 0$, on aura $c9 = 0$, $c8 = 0$; par conséquent l'équation qu'il faudra rapporter à la troisième formule sera $\dot{x} + \frac{(b1\,p^2 + b2\,px + b3\,py + b4\,x^2 + b5\,xy + b6\,y^2)\,(c1\,p^3 + c2\,p^2x + c3\,p^2y + c4\,px^2 + c5\,pxy + c6\,py^2)}{(\mathcal{C}1\,p^2 + \mathcal{C}2\,px + \mathcal{C}3\,py + \mathcal{C}4\,x^2 + \mathcal{C}5\,xy + \mathcal{C}6\,y^2)\,(c1\,p^3 + c2\,p^2x + c3\,p^2y + c4\,px^2 + c5\,pxy + c6\,py^2)}\,\dot{y} = 0.$

3.° Pour pouvoir rapporter la troisième équation différencielle à la troisième formule, il faut la mettre sous cette forme-ci, $\dot{x} + \frac{(b1\,p^2 + b2\,p^2x + b3\,p^2y + b4\,px^2 + b5\,pxy + b6\,py^2 + b7\,x^3 + b8\,x^2y + b9\,xy^2 + b10\,y^3)\,(c1\,p^2 + c2\,px + c3\,py + c4\,x^2 + c5\,xy + c6\,y^2)}{(\mathcal{C}1\,p^2 + \mathcal{C}2\,p^2x + \mathcal{C}3\,p^2y + \mathcal{C}4\,px^2 + \mathcal{C}5\,pxy + \mathcal{C}6\,py^2 + \mathcal{C}7\,x^3 + \mathcal{C}8\,x^2y + \mathcal{C}9\,xy^2 + \mathcal{C}10\,y^3)\,(c1\,p^2 + c2\,px + c3\,py + c4\,x^2 + c5\,xy + c6\,y^2)}\,\dot{y} = 0$, on aura $c6\,b10 = 0$, $c4\mathcal{C}7 = 0$, $c4\,b7 + c4\mathcal{C}8 + c5\mathcal{C}7 = 0$, $c4\,b8 + c5\,b7 + c4\mathcal{C}9 + c5\mathcal{C}8 + c6\mathcal{C}7 = 0$, $c4\,b9 + c5\,b8 + c6\,b7 + c4\mathcal{C}10 + c5\mathcal{C}9 + c6\mathcal{C}8 = 0$, $c4\,b10 + c5\,b9 + c6\,b8 + c5\mathcal{C}10 + c6\mathcal{C}9 = 0$, $c5\,b10 + c6\,b9 + c6\mathcal{C}10 = 0$. De ce que $c6\,b10 = 0$, $c4\mathcal{C}7 = 0$, je conclus que $c6 = 0$, $c4 = 0$, ou que $c6 = 0$, $\mathcal{C}7 = 0$, ou que $b10 = 0$, $c4 = 0$, ou enfin que $b10 = 0$, $\mathcal{C}7 = 0$.

Soit $c6 = 0$, $c4 = 0$, on aura $c5 = 0$, & l'équation qu'il faudra rapporter à la troisième formule sera

$$\dot{x} + \frac{(b1\,p^3 + b2\,p^2x + b3\,p^2y + b4\,px^2 + b5\,pxy + b6\,py^2 + b7\,x^3 + b8\,x^2y + b9\,xy^2 + b10\,y^3)\,(c1\,p^2 + c2\,px + c3\,py)}{(\mathcal{C}1\,p^3 + \mathcal{C}2\,p^2x + \mathcal{C}3\,p^2y + \mathcal{C}4\,px^2 + \mathcal{C}5\,pxy + \mathcal{C}6\,py^2 + \mathcal{C}7\,x^3 + \mathcal{C}8\,x^2y + \mathcal{C}9\,xy^2 + \mathcal{C}10\,y^3)\,(c1\,p^2 + c2\,px + c3\,py)}\,\dot{y} = 0.$$

Le second & le troisième cas se réduisent au premier.

Soit $b10 = 0$, $\mathcal{C}7 = 0$, on aura $\mathcal{C}8 = -b7$, $\mathcal{C}9 = -b8$, $\mathcal{C}10 = -b9$, & l'équation qu'il faudra rapporter à la troisième formule, sera $\dot{x} + \frac{(b1\,p^3 + b2\,p^2x + b3\,p^2y + b4\,px^2 + b5\,pxy + b6\,py^2 + b7\,x^3 + b8\,x^2y + b9\,xy^2)}{(\mathcal{C}1\,p^3 + \mathcal{C}2\,p^2x + \mathcal{C}3\,p^2y + \mathcal{C}4\,px^2 + \mathcal{C}5\,pxy + \mathcal{C}6\,py^2 - b7\,x^2y - b8\,xy^2 - b9\,y^3)} \cdot \frac{(c1\,p^2 + c2\,px + c3\,py + c4\,x^2 + c5\,xy + c6\,y^2)}{(c1\,p^2 + c2\,px + c3\,py + c4\,x^2 + c5\,xy + c6\,y^2)}\,\dot{y} = 0.$

4.° Pour pouvoir rapporter la quatrième équation différencielle à la troisième formule, il faut la mettre sous cette forme-ci; $\ddot{x}^2 + \frac{(b1\,p^4 + b2\,p^3x + b3\,p^3y + b4\,p^2x^2 + b5\,p^2xy + b6\,p^2y^2 + b7\,px^3 + b8\,px^2y + b9\,pxy^2 + b10\,py^3 + b11\,x^4 + b12\,x^3y + b13\,x^2y^2 + b14\,xy^3 + b15\,y^4)\,(c1\,p + c2\,x + c3\,y)}{(\mathcal{C}1\,p^4 + \mathcal{C}2\,p^3x + \mathcal{C}3\,p^3y + \mathcal{C}4\,p^2x^2 + \mathcal{C}5\,p^2xy + \mathcal{C}6\,p^2y^2 + \mathcal{C}7\,px^3 + \mathcal{C}8\,px^2y + \mathcal{C}9\,pxy^2 + \mathcal{C}10\,py^3 + \mathcal{C}11\,x^4 + \mathcal{C}12\,x^3y + \mathcal{C}13\,x^2y^2 + \mathcal{C}14\,xy^3 + \mathcal{C}15\,y^4)\,(c1\,p + c2\,x + c3\,y)}\,\dot{y} = 0;$

on aura $c3\,b15 = 0$, $c2\,\mathcal{C}11 = 0$,

$$c2\,b11 + c2\,\mathcal{C}12 + c3\,\mathcal{C}11 = 0,$$
$$c2\,b12 + c3\,b11 + c2\,\mathcal{C}13 + c3\,\mathcal{C}12 = 0,$$
$$c2\,b13 + c3\,b12 + c2\,\mathcal{C}14 + c3\,\mathcal{C}13 = 0,$$
$$c2\,b14 + c3\,b13 + c2\,\mathcal{C}15 + c3\,\mathcal{C}14 = 0,$$
$$c2\,b15 + c3\,b14 + c3\,\mathcal{C}15 = 0.$$

De ce que $c3\,b15 = 0$, $c2\,\mathcal{C}11 = 0$, je conclus que $c3 = 0$, $c2 = 0$, ou que $c3 = 0$, $\mathcal{C}11 = 0$, ou que $b15 = 0$, $c2 = 0$, ou enfin que $b15 = 0$, $\mathcal{C}11 = 0$.

Soit $c3 = 0$, $c2 = 0$ & $c1 = 1$, & l'équation qu'il

faudra rapporter à la troisième formule, sera

$$\dot{x} + \frac{(b1p^4 + b2p^3x + b3p^3y + b4p^2x^2 + b5p^2xy + b6p^2y^2 + b7px^3 + b8px^2y + b9pxy^2 + b10py^3 + b11x^4 + b12x^3y + b13x^2y^2 + b14xy^3 + b15y^4)p}{(C1p^4 + C2p^3x + C3p^3y + C4p^2x^2 + C5p^2xy + C6p^2y^2 + C7px^3 + C8px^2y + C9pxy^2 + C10py^3 + C11x^4 + C12x^3y + C13x^2y^2 + C14xy^3 + C15y^4)p}\dot{y} = 0.$$

Le second & le troisième cas se réduisent au premier.

Soit $b15 = 0$, $C11 = 0$, on aura $C15 = -b14$, $C14 = -b13$, $C13 = -b12$, $C12 = -b11$, & l'équation qu'il faudra rapporter à la troisième formule, sera

$$\dot{x} + \frac{(b1p^4 + b2p^3x + b3p^3y + b4p^2x^2 + b5p^2xy + b6p^2y^2 + b7px^3 + b8px^2y + b9pxy^2 + b10py^3 + b11x^4 + b12x^3y + b13x^2y^2 + b14xy^3)(c1p + c2x + c3y)}{(C1p^4 + C2p^3x + C3p^3y + C4p^2x^2 + C5p^2xy + C6p^2y^2 + C7px^3 + C8px^2y + C9pxy^2 + C10py^3 - b11x^4 - b12x^3y - b13x^2y^2 - b14xy^3)(c1p + c2x + c3y)}\dot{y} = 0.$$

5.° Pour que la cinquième équation différencielle puisse appartenir à la troisième formule, & que par conséquent son intégrale puisse être $n = \frac{a1p^3 +}{a1p^3 +}$, il faut qu'elle soit représentée généralement par celle-ci, $\dot{x} + \frac{b1p^5 + b2p^4x + b3p^4y + b4p^3x^2 + b5p^3xy + b6p^3y^2 + b7p^2x^3 + b8p^2x^2y + b9p^2xy^2 + b10p^2y^3 + b11px^4 + b12px^3y + b13px^2y^2 + b14pxy^3 + b15py^4 + b16x^5 + b17x^4y + b18x^3y^2 + b19x^2y^3 + b20xy^4}{C1p^5 + C2p^4x + C3p^4y + C4p^3x^2 + C5p^3xy + C6p^3y^2 + C7p^2x^3 + C8p^2x^2y + C9p^2xy^2 + C10p^2y^3 + C11px^4 + C12px^3y + C13px^2y^2 + C14pxy^3 + C15py^4 - b16x^5 - b17x^4y - b18x^3y^2 - b19x^2y^3 - b20xy^4}\dot{y} = 0.$

CONCLUSION.

I. S'IL s'agit de la première équation différencielle, elle sera $\dot{x} + \frac{b_1 p + b_2 x}{c_1 p - b_2 y}\dot{y} = 0$, ou $\dot{x} + \frac{b_1 p + b_2 x + b_3 y}{c_1 p + c_2 x + c_3 y}\dot{y} = 0$; dans le premier cas, elle appartiendra à la première formule; dans le second, je la multiplie par $c_1 p^2 + c_2 p x + c_3 p y$, & je la compare avec la seconde formule: si elle n'est pas intégrable par la seconde formule, je la multiplie par $c_1 p^4 + c_2 p^3 x + c_3 p^3 y + c_4 p^2 x^2 + c_5 p^2 x y + c_6 p^2 y^2 + c_7 p x^3 + c_8 p x^2 y + c_9 p x y^2 + c_{10} p y^3$, & je la compare avec la troisième formule: si elle n'est pas intégrable par la troisième formule, je la multiplie par $c_1 p^6 + c_2 p^5 x + c_3 p^5 y + c_4 p^4 x^2 + c_5 p^4 x y + c_6 p^4 y^2 + c_7 p^3 x^3 + c_8 p^3 x^2 y + c_9 p^3 x y^2 + c_{10} p^3 y^3 + c_{11} p^2 x^4 + c_{12} p^2 x^3 y + c_{13} p^2 x^2 y^2 + c_{14} p^2 x y^3 + c_{15} p^2 y^4 + c_{16} p x^5 + c_{17} p x^4 y + c_{18} p x^3 y^2 + c_{19} p x^2 y^3 + c_{20} p x y^4 + c_{21} p y^5$, & je la compare avec la quatrième formule, & ainsi de suite. Nous avons trouvé qu'elle appartiendra sûrement à la seconde formule, lorsque $(2 C_3 + b_2).(2 b_2 + C_3) - 9 b_3 C_2 = 0$.

II. S'il s'agit de la seconde équation différencielle, elle sera $\dot{x} + \frac{b_1 p^2 + b_2 p x + b_3 p y + b_4 x^2 + b_5 x y}{C_1 p^2 + C_2 p x + C_3 p y - b_4 x y - b_5 y^2}\dot{y} = 0$, ou $\dot{x} + \frac{b_1 p^2 + b_2 p x + b_3 p y + b_4 x^2 + b_5 x y + b_6 y^2}{C_1 p^2 + C_2 p x + C_3 p y + C_4 x^2 + C_5 x y + C_6 y^2}\dot{y} = 0$. Dans le premier cas je la multiplie par $c_1 p + c_2 x + c_3 y$, & je la compare avec la seconde formule: si elle n'est pas intégrable par la seconde formule, je la multiplie par $c_1 p^3 + c_2 p^2 x + c_3 p^2 y + c_4 p x^2 + c_5 p x y + c_6 p y^2 + c_7 x^3 + c_8 x^2 y + c_9 x y^2 + c_{10} y^3$, & je la compare avec la troisième formule: si elle n'est pas

intégrable par la troisième formule, je la multiplie par $c1p^5 + c2p^4x + c3p^4y + c4p^3x^2 + c5p^3xy +$ $c6p^3y^2 + c7p^2x^3 + c8p^2x^2y + c9p^2xy^2 + c10p^2y^3 +$ $c11px^4 + c12px^3y + c13px^2y^2 + c14pxy^3 +$ $c15py^4 + c16x^5 + c17x^4y + c18x^3y^2 + c19x^2y^3 +$ $c20xy^4 + c21y^5$, & je la compare avec la quatrième formule, & ainsi de suite. Dans le second cas, je la multiplie par p, & je la compare avec la seconde formule: si elle n'est pas intégrable par la seconde formule, je la multiplie par $c1p^3 + c2p^2x + c3p^2y + c4px^2 + c5pxy + c6py^2$, & je la compare avec la troisième formule: si elle n'est pas intégrable par la troisième formule, je la multiplie par $c1p^5 + c2p^4x + c3p^4y + c4p^3x^2 + c5p^3xy +$ $c6p^3y^2 + c7p^2x^3 + c8p^2x^2y + c9p^2xy^2 + c10p^2y^3 +$ $c11px^4 + c12px^3y + c13px^2y^2 + c14pxy^3 + c15py^4$, & je la compare avec la quatrième formule, & ainsi de suite.

III. S'il s'agit de la troisième équation différencielle, elle sera $\dot{x} + \frac{b1p^3 + b2p^2x + b3p^2y + b4px^2 + b5pxy + b6py^2 +}{c1p^3 + c2p^2x + c3p^2y + c4px^2 + c5pxy + c6py^2 -}$ $\frac{b7x^3 + b8x^2y + b9xy^2}{b7x^2y - b8xy^2 - b9y^3} \dot{y} = 0$, ou $\dot{x} + \frac{b1p^3 + b2p^2x + b3p^2y +}{c1p^3 + c2p^2x + c3p^2y +}$ $\frac{b4px^2 + b5pxy + b6py^2 + b7x^3 + b8x^2y + b9xy^2 + b10y^3}{c4px^2 + c5pxy + c6py^2 + c7x^3 + c8x^2y + c9xy^2 + c10y^3} \dot{y} = 0$. Dans le premier cas je la compare avec la seconde formule: si elle n'est pas intégrable par la seconde formule, je la multiplie par $c1p^2 + c2px + c3py + c4x^2 + c5xy + c6y^2$, & je la compare avec la troisième formule: si elle n'est pas intégrable par la troisième formule, je la multiplie par $c1p^4 + c2p^3x + c3p^3y + c4p^2x^2 + c5p^2xy +$ $c6p^2y^2 + c7px^3 + c8px^2y + c9pxy^2 + c10py^3 +$ $c11x^4 + c12x^3y + c13x^2y^2 + c14xy^3 + c15y^4$, & je la compare avec la quatrième formule, & ainsi de suite.

Dans le second cas je la multiplie par $c1p^2 + c2px + c3py$, & je la compare avec la troisième formule : si elle n'est pas intégrable par la troisième formule, je la multiplie par $c1p^4 + c2p^3x + c3p^3y + c4p^2x^2 + c5p^2xy + c6p^2y^2 + c7px^3 + c8px^2y + c9pxy^2 + c10py^3$, & je la compare avec la quatrième formule, & ainsi de suite.

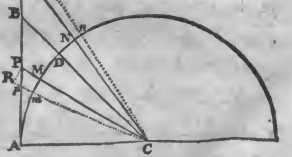
IV. S'il s'agit de la quatrième équation différencielle, elle sera $\dot{x} + \frac{b1p^4 + b2p^3x + b3p^3y + b4p^2x^2 + b5p^2xy + b6p^2y^2 + b7px^3 + b8px^2y + b9pxy^2 + b10py^3 + b11x^4 + b12x^3y + b13x^2y^2 + b14xy^3}{c1p^4 + c2p^3x + c3p^3y + c4p^2x^2 + c5p^2xy + c6p^2y^2 + c7px^3 + c8px^2y + c9pxy^2 + c10py^3 - b11x^3y - b12x^2y^2 - b13xy^3 - b14y^4}\dot{y} = 0$, ou $\dot{x} + \frac{b1p^4 + b2p^3x + b3p^3y + b4p^2x^2 + b5p^2xy + b6p^2y^2 + b7px^3 + b8px^2y + b9pxy^2 + b10py^3 + b11x^4 + b12x^3y + b13x^2y^2 + b14xy^3 + b15y^4}{c1p^4 + c2p^3x + c3p^3y + c4p^2x^2 + c5p^2xy + c6p^2y^2 + c7px^3 + c8px^2y + c9pxy^2 + c10py^3 + c11x^4 + c12x^3y + c13x^2y^2 + c14xy^3 + c15y^4}\dot{y} = 0$. Dans le premier cas je la multiplie par $c1p + c2x + c3y$, & je la compare avec la troisième formule ; si elle n'est pas intégrable par la troisième formule, je la multiplie par $c1p^3 + c2p^2x + c3p^2y + c4px^2 + c5pxy + c6py^2 + c7x^3 + c8x^2y + c9xy^2 + c10y^3$, & je la compare avec la quatrième formule, & ainsi de suite. Dans le second cas, je la multiplie par p, & je la compare avec la troisième formule ; si elle n'est pas intégrable par la troisième formule, je la multiplie par $c1p^3 + c2p^2x + c3p^2y + c4px^2 + c5pxy + c6py^2$, & je la compare avec la quatrième formule, & ainsi de suite.

V. S'il s'agit de la cinquième équation, elle sera $\dot{x} + \frac{b1p^5 + b2p^4x + b3p^4y + b4p^3x^2 + b5p^3xy + b6p^3y^2 + b7p^2x^3 + b8p^2x^2y + b9p^2xy^2 + b10p^2y^3 + b11px^4 + b12px^3y + c1p^5 + c2p^4x + c3p^4y + c4p^3x^2 + c5p^3xy + c6p^3y^2 + c7p^2x^3 + c8p^2x^2y + c9p^2xy^2 + c10p^2y^3 + c11px^4 + c12px^3y +$

$$\frac{b13px^2y^2 + b14pxy^3 + b15py^4 + b16x^5 + b17x^4y + b18x^3y^2 + b19x^2y^3 + b20xy^4}{C13px^2y^2 + C14pxy^3 + C15py^4 - b16x^4y - b17x^3y^2 - b18x^2y^3 - b19xy^4 - b20y^5}\dot{y} = 0, \text{ ou } \dot{x} + \frac{b1p^5 + b2p^4x + b3p^4y + b4p^3x^2 + b5p^3xy + b6p^2y^2 + b7p^2x^3 + b8p^2x^2y + b9p^2xy^2 + b10p^2y^3 + b11px^4 + b12px^3y + b13px^2y^2 + b14pxy^3 + b15py^4 + b16x^5 + b17x^4y + b18x^3y^2 + b19x^2y^3 + b20xy^4 + b21y^5}{C1p^5 + C2p^4x + C3p^4y + C4p^3x^2 + C5p^3xy + C6p^2y^2 + C7p^2x^3 + C8p^2x^2y + C9p^2xy^2 + C10p^2y^3 + C11px^4 + C12px^3y + C13px^2y^2 + C14pxy^3 + C15py^4 + C16x^5 + C17x^4y + C18x^3y^2 + C19x^2y^3 + C20xy^4 + C21y^5}\dot{y} = 0.$$

Dans le premier cas, je la compare avec la troisième formule: si elle n'eſt pas intégrable par la troiſième formule, je la multiplie par $c1p^2 + c2px + c3py + c4x^2 + c5xy + c6y^2$, & je la compare avec la quatrième formule, & ainſi de ſuite. Dans le ſecond cas, je la multiplie par $c1p^2 + c2px + c3py$, & je la compare avec la quatrième formule; ſi elle n'eſt pas intégrable par la quatrième formule, je la multiplie par $c1p^4 + c2p^3x + c3p^3y + c4p^2x^2 + c5p^2xy + c6p^2y^2 + c7px^3 + c8px^2y + c9pxy^2 + c10py^3$, & je la compare avec la cinquième formule, & ainſi de ſuite.

EXEMPLE.



Am MD Nn eſt un cercle décrit du centre *C* & du rayon *CA*, & *AB* eſt une tangente de ce cercle au point *A*.

Les élémens *Cm M* ſont plus grands que les élémens correſpondans *mpPM*, en partant de *A* & en allant vers *D*, & enſuite ils deviennent moindres; le point où ils ceſſent d'être plus grands & où ils commencent à être moindres, eſt lorſque $AB = AC$. Concevez que pendant que

que la sécante CP tourne autour de C, & trace l'espace BCP, la sécante CQ tourne aussi autour de C, & trace l'espace BCQ, de manière que $DCM - DBPM$ soit toûjours $= BDNQ - DCN$, on aura $PMDB + BDNQ = MCD + DCN$, & par conséquent l'espace PCQ sera partagé en deux également par l'arc MN; on aura donc $CMN = \frac{1}{2}PCQ$ ou $\frac{1}{2}CA \cdot MN = \frac{1}{4}CA \cdot PQ$; donc $MN = \frac{1}{2}PQ$.

Soit $AC = AB = p$, $BP = x$, $BQ = y$; donc $AP = p - x$, $AQ = p + y$, $CP = \sqrt{[p^2 + (p-x)^2]}$, $CQ = \sqrt{[p^2 + (p+y)^2]}$. Soit $Pp = \dot{x}$, $Qq = \dot{y}$, on aura

$$pR = \frac{-(p-x)\dot{x}}{\sqrt{[p^2+(p-x)^2]}}, \quad qS = \frac{(p+y)\dot{y}}{\sqrt{[p^2+(p+y)^2]}},$$

$$PR = \frac{p\dot{x}}{\sqrt{[p^2+(p-x)^2]}}; \quad QS = \frac{p\dot{y}}{\sqrt{[p^2+(p+y)^2]}} \text{ \&}$$

$$\sqrt{[p^2+(p-x)^2]} : \frac{p\dot{x}}{\sqrt{[p^2+(p-x)^2]}} :: p : Mm = \frac{p^2\dot{x}}{p^2+(p-x)^2};$$

$$\sqrt{[p^2+(p+y)^2]} : \frac{p\dot{y}}{\sqrt{[p^2+(p+y)^2]}} :: p : Nn = \frac{p^2\dot{y}}{p^2+(p+y)^2};$$

donc $CMm = \frac{1}{2}p \cdot \frac{p^2\dot{x}}{p^2+(p-x)^2}$, $CNn = \frac{1}{2}p \cdot \frac{p^2\dot{y}}{p^2+(p+y)^2}$,

$$CPp = \frac{1}{2}p\dot{x}, \; CQq = \frac{1}{2}p\dot{y}, \; MmpP = \frac{1}{2}p\dot{x} - \frac{\frac{1}{2}p^3\dot{x}}{p^2+(p-x)^2},$$

$$NnqQ = \frac{1}{2}p\dot{y} - \frac{\frac{1}{2}p^3\dot{y}}{p^2+(p+y)^2}; \text{ \& en rempliſſant la}$$

condition du problème, on aura

$$\frac{p^3\dot{x}}{p^2+(p-x)^2} - \frac{1}{2}p\dot{x} = \frac{1}{2}p\dot{y} - \frac{p^3\dot{y}}{p^2+(p+y)^2} \text{ ou}$$

$$\dot{x} + \frac{-4p^3y + 4p^2xy - 2p^2y^2 - 2px^2y + 2pxy^2 - x^2y^2}{4p^3x - 2p^2x^2 + 4p^2xy - 2px^2y + 2pxy^2 - x^2y^2}\,\dot{y} = 0.$$

Il s'agit d'intégrer cette équation, & lorſqu'on l'aura intégrée, de remplir la condition, que x & y ſoient $= 0$ en même temps. Pour l'intégrer, je la multiplie par p, & je la compare avec la troiſième formule; ſi elle n'eſt pas

intégrable par cette formule, je la multiplie par $c1p^3 + c2p^2x + c3p^2y + c4px^2 + c5pxy + c6py^2$, & je la compare avec la quatrième formule, & ainsi de suite.

AVERTISSEMENT.

J'ÉTOIS embarrassé au commencement lorsque je voulois me faire des exemples de cette méthode-ci, du succès desquels je fusse assuré.

Il s'agissoit de trouver des cas de cette formule-ci, $\dot{x} + \frac{A1p + A2x + A3y}{B1p + B2x + B3y}\dot{y} = 0$, dont l'intégrale fût du second degré; d'autres, dont l'intégrale fût du troisième degré; d'autres, dont l'intégrale fût du quatrième degré, &c.

Il s'agissoit de trouver des cas de cette formule-ci, $\dot{x} + \frac{A1p^2 + A2px + A3py + A4x^2 + A5xy}{B1p^2 + B2px + B3py - A4xy - A5y^2}\dot{y} = 0$, dont l'intégrale fût du second degré; d'autres dont l'intégrale fût du troisième degré; d'autres dont l'intégrale fût du quatrième degré, &c.

Il s'agissoit de trouver des cas de cette formule-ci, $\dot{x} + \frac{A1p^2 + A2px + A3py + A4x^2 + A5xy + A6y^2}{B1p^2 + B2px + B3py + B4x^2 + B5xy + B6y^2}\dot{y} = 0$, dont l'intégrale fût du second degré, d'autres dont l'intégrale fût du troisième degré, d'autres dont l'intégrale fût du quatrième degré, &c.

Il s'agissoit de trouver des cas de cette formule-ci, $\dot{x} + \frac{A1p^3 + A2p^2x + A3p^2y + A4px^2 + A5pxy + A6py^2 + A7x^3 + A8x^2y + A9xy^2}{B1p^3 + B2p^2x + B2p^2y + B4px^2 + B5pxy + B6py^2 - A7x^2y - A8xy^2 - A9y^3}\dot{y} = 0$, dont l'intégrale fût du troisième degré (car il étoit bien aisé d'en trouver dont l'intégrale fût du second degré) d'autres dont l'intégrale fût du quatrième degré, d'autres dont l'intégrale fût du cinquième degré, &c.

Il s'agissoit de trouver des cas de cette formule-ci, $\dot{x} + \frac{A1p^3 + A2p^2x + A3p^2y + A4px^2 + A5pxy + A6py^2 + A7x^3 + A8x^2y + A9xy^2 + A10y^3}{B1p^3 + B2p^2x + B3p^2y + B4px^2 + B5pxy + B6py^2 + B7x^3 + B8x^2y + B9xy^2 + B10y^3}\dot{y} = 0$, dont l'intégrale fût du troisième degré, d'autres dont l'intégrale fût du quatrième degré, d'autres dont l'intégrale fût du cinquième degré, &c.

Si on m'avoit donné ces cas, il m'auroit été bien aisé de les intégrer, mais la difficulté étoit de les proposer: voici comment ensuite j'ai résolu ce problème.

Dans les Tables suivantes, je mets pour abréger $a1p +$ au lieu de $a1p + a2x + a3y$, $b1p +$ au lieu de $b1p + b2x + b3y$, &c. $\alpha 1p +$ au lieu de $\alpha 1p + \alpha 2x + \alpha 3y$, $\mathcal{C}1p +$ au lieu de $\mathcal{C}1p + \mathcal{C}2x + \mathcal{C}3y$, &c.

Je mets $a1p^2 +$ au lieu de $a1p^2 + a2px + a3py + a4x^2 + a5xy + a6y^2$, &c.

Je mets $a1p^3 +$ au lieu de $a1p^3 + a2p^2x + a3p^2y + a4px^2 + a5pxy + a6py^2 + a7x^3 + a8x^2y + a9xy^2 + a10y^3$, &c.

TABLE I.

Qui contient par ordre tous les numérateurs possibles de l'intégrale d'une équation différencielle sans radicaux.

1.d $a1p +$, p.

2d $a1p^2 +$, $(a1p +)^2$.

3d $a1p^3 +$, $(a1p +)^3$, $(a1p +)^2 (b1p +)$.

4d $a1p^4 +$, $(a1p^2 +)^2$, $(a1p^2 +) (b1p +)^2$, $(a1p +)^4$, $(a1p +)^3 (b1p +)$.

5d $a1p^5 +$, $(a1p^3 +) (b1p +)^2$, $(a1p^2 +)^2 (b1p +)$, $(a1p^2 +) (b1p +)^3$, $(a1p +)^5$, $(a1p +)^3 (b1p +)$, $(a1p +)^2 (b1p +)^2$.

6d $a1p^6 +$, $(a1p^4 +)(b1p +)^2$, $(a1p^3 +)^2$, $(a1p^3 +)(b1p +)^3$, $(a1p^2 +)^3$, $(a1p^2 +)^2 (b1p^2 +)$, $(a1p^2 +)(b1p +)^4$, $(a1p +)^6$, $(a1p +)^5 (b1p +)$, $(a1p +)^4 (b1p +)^2$, $(a1p +)^3 (b1p +)^2 (c1p +)$.

7d $a1p^7 +$, $(a1p^5 +)(b1p +)^2$, $(a1p^4 +)(b1p +)^3$, $(a1p^3 +)^2 (b1p +)$, $(a1p^3 +)(b1p^2 +)^2$, $(a1p^3 +)(b1p +)^4$, $(a1p^2 +)^3 (b1p +)$, $(a1p^2 +)^2 (b1p +)^3$, $(a1p^2 +)(b1p +)^5$, $(a1p^2 +)(b1p +)^3 (c1p +)^2$, $(a1p +)^7$, $(a1p +)^6 (b1p +)$, $(a1p +)^5 (b1p +)^2$, $(a1p +)^4 (b1p +)^3$, $(a1p +)^4 (b1p +)^2 (c1p +)$.

8d $a1p^8 +$, $(a1p^6 +)(b1p +)^2$, $(a1p^5 +)(b1p +)^3$, $(a1p^4 +)^2$, $(a1p^4 +)(b1p^2 +)^2$, $(a1p^4 +)(b1p +)^4$, $(a1p^3 +)^2 (b1p^2 +)$, $(a1p^3 +)(b1p +)^5$, $(a1p^3 +)(b1p +)^3 (c1p +)^2$, $(a1p^2 +)^4$, $(a1p^2 +)^3 (b1p^2 +)$, $(a1p^2 +)^3 (b1p +)^2$, $(a1p^2 +)^2 (b1p +)^4$, $(a1p^2 +)^2 (b1p +)^3 (c1p +)$, $(a1p^2 +)(b1p +)^6$, $(a1p^2 +)(b1p +)^4 (c1p +)^2$, $(a1p +)^8$, $(a1p +)^7 (b1p +)$, $(a1p +)^6 (b1p +)^2$, $(a1p +)^5 (b1p +)^3$, $(a1p +)^5 (b1p +)^2 (c1p +)$, $(a1p +)^4 (b1p +)^3 (c1p +)$.

9d $a1p^9 +$, $(a1p^7 +)(b1p +)^2 (a1p^6 +)(b1p +)^3$, $(a1p^5 +)(b1p^2 +)^2$, $(a1p^5 +)(b1p +)^4$, $(a1p^4 +)^2 (b1p +)$, $(a1p^4 +)(b1p +)^5$, $(a1p^4 +)(b1p +)^3 (c1p +)^2$, $(a1p^3 +)^3$, $(a1p^3 +)^2 (b1p^3 +)$, $(a1p^3 +)^2$

$(b1p+)^3$, $(a1p^3+)$ $(b1p^2+)^3$, $(a1p^3+)$ $(b1p+)^6$, $(a1p^3+)$ $(b1p+)^4$ $(c1p+)^2$, $(a1p^2+)^4$ $(b1p+)$, $(a1p^2+)^3$ $(b1p+)^2$ $(c1p+)$, $(a1p^2+)^2$ $(b1p^2+)$ $(c1p+)^3$, $(a1p^2+)^2$ $(b1p+)^5$, $(a1p^2+)^2$ $(b1p+)^4$ $(c1p+)$, $(a1p^2+)$ $(b1p+)^7$, $(a1p^2+)$ $(b1p+)^5$ $(c1p+)^2$, $(a1p^2+)$ $(b1p+)^4$ $(c1p+)^3$, $(a1p+)^9$, $(a1p+)^8$ $(b1p+)$, $(a1p+)^7$ $(b1p+)^2$, $(a1p+)^6$ $(b1p+)^3$, $(a1p+)^6$ $(b1p+)^2$ $(c1p+)$, $(a1p+)^5$ $(b1p+)^4$, $(a1p+)^5$ $(b1p+)^3$ $(c1p+)$, $(a1p+)^4$ $(b1p+)^3$ $(c1p+)^2$.

10d $a1p^{10}+$, $(a1p^8+)$ $(b1p+)^2$, $(a1p^7+)$ $(b1p+)^3$, $(a1p^6+)$ $(b1p^2+)^2$, $(a1p^6+)$ $(b1p+)^3$, $(a1p^5+)^2$, $(a1p^5+)$ $(b1p+)^5$, $(a1p^5+)$ $(b1p+)^3$ $(c1p+)^2$, $(a1p^4+)^2$ $(b1p^2+)$, $(a1p^4+)$ $(b1p^3+)^2$, $(a1p^4+)$ $(b1p^2+)^3$, $(a1p^4+)$ $(b1p+)^6$, $(a1p^4+)$ $(b1p+)^4$ $(c1p+)^2$, $(a1p^3+)^3$ $(b1p+)$, $(a1p^3+)^2$ $(b1p+)^4$, $(a1p^3+)^2$ $(b1p+)^3$ $(c1p+)$, $(a1p^3+)$ $(b1p^2+)^2$ $(c1p+)^3$, $(a1p^3+)$ $(b1p+)^7$, $(a1p^3+)$ $(b1p+)^5$ $(c1p+)^2$, $(a1p^3+)$ $(b1p+)^4$ $(c1p+)^3$, $(a1p^2+)^5$, $(a1p^2+)^4$ $(b1p^2+)$, $(a1p^2+)^4$ $(b1p+)^2$, $(a1p^2+)^3$ $(b1p^2+)$ $(c1p+)^2$, $(a1p^2+)^3$ $(b1p+)^4$, $(a1p^2+)^3$ $(b1p^2+)$ $(c1p+)^4$, $(a1p^2+)^2$ $(b1p+)^6$, $(a1p^2+)^2$ $(b1p+)^5$ $(c1p+)$, $(a1p^2+)$ $(b1p+)^8$, $(a1p^2+)$ $(b1p+)^6$ $(c1p+)^2$, $(a1p^2+)$ $(b1p+)^5$ $(c1p+)^3$, $(a1p+)^{10}$, $(a1p+)^9$

(b_1p+), $(a_1p+)^8\,(b_1p+)^2$, $(a_1p+)^7\,(b_1p+)^3$, $(a_1p+)^7\,(b_1p+)^2\,(c_1p+)$, $(a_1p+)^6\,(b_1p+)^4$, $(a_1p+)^6\,(b_1p+)^3\,(c_1p+)$, $(a_1p+)^5\,(b_1p+)^4\,(c_1p+)$, $(a_1p+)^5\,(b_1p+)^3\,(c_1p+)^2$, $(a_1p+)^4\,(b_1p+)^3\,(c_1p+)^2\,(d_1p+)$.

TABLE II.

(Les chiffres mis entre deux parenthèses au dessus de l'intégrale, expriment le degré de l'équation différencielle de cette intégrale.)

1.° $n = \overset{(1)}{\frac{a_1p+}{\alpha_1p+}}$, $n = \overset{(0)}{\frac{a_1p+}{p}}$.

2.° $n = \overset{(3)}{\frac{a_1p^2+}{\alpha_1p^2+}}$, $n = \overset{(2)}{\frac{a_1p^2+}{(\alpha_1p+)^2}}$, $n = \overset{(2)}{\frac{a_1p^2+}{p(\alpha_1p+)}}$, $n = \overset{(1)}{\frac{a_1p^2+}{p^2}}$; $n = \overset{(1)}{\frac{(a_1p+)^2}{p(\alpha_1p+)}}$.

3.° $n = \overset{(5)}{\frac{a_1p^3+}{\alpha_1p^3+}}$, $n = \overset{(3)}{\frac{a_1p^3+}{(\alpha_1p+)^3}}$, $n = \overset{(4)}{\frac{a_1p^3+}{(\alpha_1p+)^2(\beta_1p+)}}$, $n = \overset{(4)}{\frac{a_1p^3+}{p(\alpha_1p^2+)}}$, $n = \overset{(3)}{\frac{a_1p^3+}{p(\alpha_1p+)^2}}$, $n = \overset{(3)}{\frac{a_1p^3+}{p^2(\alpha_1p+)}}$, $n = \overset{(2)}{\frac{a_1p^3+}{p^3}}$, $n = \overset{(2)}{\frac{(a_1p+)^3}{(\alpha_1p+)^2(\beta_1p+)}}$, $n = \overset{(2)}{\frac{(a_1p+)^3}{p(\alpha_1p^2+)}}$, $n = \overset{(1)}{\frac{(a_1p+)^3}{p(\alpha_1p+)^2}}$, $n = \overset{(1)}{\frac{(a_1p+)^3}{p^2(\alpha_1p+)}}$, $n = \overset{(3)}{\frac{(a_1p+)^2(b_1p+)}{(\alpha_1p+)^2(\beta_1p+)}}$, $n = \overset{(3)}{\frac{(a_1p+)^2(b_1p+)}{p(\alpha_1p^2+)}}$, $n = \overset{(2)}{\frac{(a_1p+)^2(b_1p+)}{p(\alpha_1p+)^2}}$,

$$n = \frac{(a1p+)^2(b1p+)}{p^2(a1p+)}^{(2)}, \quad n = \frac{(a1p+)^2(b1p+)}{p^3}^{(1)},$$

4.° $n = \frac{a1p^4+}{a1p^4+}^{(7)}, \quad n = \frac{a1p^4+}{(a1p^2+)^2}^{(5)}, \quad n = \frac{a1p^4+}{(a1p^2+)(C1p+)^2}^{(6)},$

$$n = \frac{a1p^4+}{(a1p+)^4}^{(4)}, \quad n = \frac{a1p^4+}{(a1p+)^3(C1p+)}^{(5)}, \quad n = \frac{a1p^4+}{p(a1p^3+)}^{(6)},$$

$$n = \frac{a1p^4+}{p(a1p+)^3}^{(4)}, \quad n = \frac{a1p^4+}{p(a1p+)^2(C1p+)}^{(5)}, \quad n = \frac{a1p^4+}{p^2(a1p^2+)}^{(5)},$$

$$n = \frac{a1p^4+}{p^2(a1p+)^2}^{(4)}, \quad n = \frac{a1p^4+}{p^3(a1p+)}^{(4)}, \quad n = \frac{a1p^4+}{p^4}^{(3)},$$

$$n = \frac{(a1p^2+)^2}{(a1p^3+)(C1p+)}^{(4)}, \quad n = \frac{(a1p^2+)^2}{(a1p+)^3(C1p+)}^{(3)},$$

$$n = \frac{(a1p^2+)^2}{p(a1p^3+)}^{(4)}, \quad n = \frac{(a1p^2+)^2}{p(a1p+)^3}^{(2)}, \quad n = \frac{(a1p^2+)^2}{p(a1p+)^2(C1p+)}^{(3)},$$

$$n = \frac{(a1p^2+)^2}{p^2(a1p^2+)}^{(3)}, \quad n = \frac{(a1p^2+)^2}{p^3(a1p+)}^{(2)}, \quad n = \frac{(a1p^2+)(b1p+)^2}{(a1p^2+)(C1p+)^2}^{(5)},$$

$$n = \frac{(a1p^2+)(b1p+)^2}{(a1p+)^4}^{(3)}, \quad n = \frac{(a1p^2+)(b1p+)^2}{(a1p+)^3(C1p+)}^{(4)},$$

$$n = \frac{(a1p^2+)(b1p+)^2}{p(a1p^3+)}^{(5)}, \quad n = \frac{(a1p^2+)(b1p+)^2}{p(a1p+)^3}^{(3)},$$

$$n = \frac{(a1p^2+)(b1p+)^2}{p(a1p+)^2(C1p+)}^{(4)}, \quad n = \frac{(a1p^2+)(b1p+)^2}{p^2(a1p^2+)}^{(4)},$$

$$n = \frac{(a1p^2+)(b1p+)^2}{p^2(a1p+)^2}^{(3)}, \quad n = \frac{(a1p^2+)(b1p+)^2}{p^3(a1p+)}^{(3)},$$

$$u = \frac{(a_1p^2+)^{(2)}(b_1p+)^2}{p^4}, \quad n = \frac{(a_1p+)^{(2)}4}{(a_1p+)^3(c_1p+)};$$

$$u = \frac{(a_1p+)^{(3)}4}{p(a_1p^3+)}, \quad n = \frac{(a_1p+)^{(1)}4}{p(a_1p+)^3}, \quad n = \frac{(a_1p+)^{(2)}4}{p(a_1p+)^2(c_1p+)},$$

$$n = \frac{(a_1p+)^{(2)}4}{p^2(a_1p^2+)}, \quad n = \frac{(a_1p+)^{(1)}4}{p^3(a_1p+)}, \quad n = \frac{(a_1p+)^{(3)}3(b_1p+)}{(a_1p+)^3(c_1p+)},$$

$$u = \frac{(a_1p+)^{(4)}3(b_1p+)}{p(a_1p^3+)}, \quad n = \frac{(a_1p+)^{(2)}3(b_1p+)}{p(a_1p+)^3};$$

$$u = \frac{(a_1p+)^{(3)}3(b_1p+)}{p(a_1p+)^2(c_1p+)}, \quad n = \frac{(a_1p+)^{(3)}3(b_1p+)}{p^2(a_1p^2+)};$$

$$u = \frac{(a_1p+)^{(2)}3(b_1p+)}{p^2(a_1p+)^2}, \quad n = \frac{(a_1p+)^{(2)}3(b_1p+)}{p^3(a_1p+)};$$

$$u = \frac{(a_1p+)^{(1)}3(b_1p+)}{p^4}.$$

5.° $n = \frac{a_1p^5+}{a_1p^5+}^{(9)}, \quad n = \frac{a_1p^5+}{(a_1p^3+)(c_1p+)^2}^{(8)};$

$$u = \frac{a_1p^5+}{(a_1p^2+)^2(c_1p+)}^{(7)}, \quad n = \frac{a_1p^5+}{(a_1p^2+)(c_1p+)^3}^{(7)}, \quad n = \frac{a_1p^5+}{(a_1p+)^5}^{(5)};$$

$$u = \frac{a_1p^5+}{(a_1p+)^4(c_1p+)}^{(6)}, \quad n = \frac{a_1p^5+}{(a_1p+)^3(c_1p+)^2}^{(6)}, \quad n = \frac{a_1p^5+}{p(a_1p^4+)}^{(8)};$$

$$u = \frac{a_1p^5+}{p(a_1p^2+)^2}^{(6)}, \quad n = \frac{a_1p^5+}{p(a_1p^2+)(c_1p+)^2}^{(7)}, \quad n = \frac{a_1p^5+}{p(a_1p+)^4}^{(5)};$$

$$u = \frac{a_1p^5+}{p(a_1p+)^3(c_1p+)}^{(6)}, \quad n = \frac{a_1p^5+}{p^2(a_1p^3+)}^{(7)}, \quad n = \frac{a_1p^5+}{p^2(a_1p+)^3}^{(5)},$$

$n =$

$$u = \frac{a_1 p^5 + \ldots}{p^2 (a_1 p + \ldots)^3 (c_1 p + \ldots)^{(6)}}, \quad u = \frac{a_1 p^5 + \ldots}{p^3 (a_1 p^2 + \ldots)^{(6)}}, \quad u = \frac{a_1 p^5 + \ldots}{p^3 (a_1 p + \ldots)^{2 (5)}},$$

$$u = \frac{a_1 p^5 + \ldots}{p^4 (a_1 p + \ldots)^{(5)}}, \quad u = \frac{a_1 p^5 + \ldots}{p^5}, \quad u = \frac{(a_1 p^3 + \ldots)(b_1 p + \ldots)^2}{(a_1 p^3 + \ldots)(c_1 p + \ldots)^{2 (7)}};$$

$$u = \frac{(a_1 p^3 + \ldots)(b_1 p + \ldots)^2}{(a_1 p^2 + \ldots)^2 (c_1 p + \ldots)^{(6)}}, \quad u = \frac{(a_1 p^3 + \ldots)(b_1 p + \ldots)^2}{(a_1 p^2 + \ldots)(c_1 p + \ldots)^{3 (6)}},$$

$$u = \frac{(a_1 p^3 + \ldots)(b_1 p + \ldots)^2}{(a_1 p + \ldots)^{2 (4)}}; \quad u = \frac{(a_1 p^3 + \ldots)(b_1 p + \ldots)^2}{(a_1 p + \ldots)^4 (c_1 p + \ldots)^{(5)}};$$

$$u = \frac{(a_1 p^3 + \ldots)(b_1 p + \ldots)^2}{(a_1 p + \ldots)^3 (c_1 p + \ldots)^{2 (5)}}, \quad u = \frac{(a_1 p^3 + \ldots)(b_1 p + \ldots)^2}{p (a_1 p^4 + \ldots)^{(7)}},$$

$$u = \frac{(a_1 p^3 + \ldots)(b_1 p + \ldots)^2}{p (a_1 p^2 + \ldots)^{2 (5)}}, \quad u = \frac{(a_1 p^3 + \ldots)(b_1 p + \ldots)^2}{p (a_1 p^2 + \ldots)(c_1 p + \ldots)^{2 (6)}},$$

$$u = \frac{(a_1 p^3 + \ldots)(b_1 p + \ldots)^2}{p (a_1 p + \ldots)^{4 (4)}}, \quad u = \frac{(a_1 p^3 + \ldots)(b_1 p + \ldots)^2}{p (a_1 p + \ldots)^3 (c_1 p + \ldots)^{(5)}},$$

$$u = \frac{(a_1 p^3 + \ldots)(b_1 p + \ldots)^2}{p^2 (a_1 p^3 + \ldots)^{(6)}}, \quad u = \frac{(a_1 p^3 + \ldots)(b_1 p + \ldots)^2}{p^2 (a_1 p + \ldots)^{3 (4)}},$$

$$u = \frac{(a_1 p^3 + \ldots)(b_1 p + \ldots)^2}{p^2 (a_1 p + \ldots)^2 (c_1 p + \ldots)^{(5)}}, \quad u = \frac{(a_1 p^3 + \ldots)(b_1 p + \ldots)^2}{p^3 (a_1 p^2 + \ldots)^{(5)}},$$

$$u = \frac{(a_1 p^3 + \ldots)(b_1 p + \ldots)^2}{p^3 (a_1 p + \ldots)^2}, \quad u = \frac{(a_1 p^3 + \ldots)(b_1 p + \ldots)^2}{p^4 (a_1 p + \ldots)^{(4)}},$$

$$u = \frac{(a_1 p^3 + \ldots)(b_1 p + \ldots)^2}{p^5}, \quad u = \frac{(a_1 p^2 + \ldots)^2 (b_1 p + \ldots)}{(a_1 p^2 + \ldots)^2 (c_1 p + \ldots)^{2 (5)}};$$

$$u = \frac{(a_1 p^2 + \ldots)^2 (b_1 p + \ldots)}{(a_1 p^2 + \ldots)(c_1 p + \ldots)^{3 (5)}}, \quad u = \frac{(a_1 p^2 + \ldots)^2 (b_1 p + \ldots)}{(a_1 p + \ldots)^5},$$

$$n = \frac{(4)}{(a1p^2+)^2(b1p+)}{(a1p+)^4(G1p+)}, \quad n = \frac{(4)}{(a1p^2+)^2(b1p+)}{(a1p+)^3\cdot(G1p+)^2};$$

$$n = \frac{(6)}{(a1p^2+)^3(b1p+)}{p(a1p^4+)}, \quad n = \frac{(4)}{(a1p^2+)^2(b1p+)}{p(a1p^2+)^2};$$

$$n = \frac{(5)}{(a1p^2+)^2(b1p+)}{p(a1p^2+)(G1p+)^2}, \quad n = \frac{(3)}{(a1p^2+)^2(b1p+)}{p(a1p+)^4};$$

$$n = \frac{(4)}{(a1p^2+)^2(b1p+)}{p(a1p+)^3(G1p+)}, \quad n = \frac{(5)}{(a1p^2+)^2(b1p+)}{p^2(a1p^3+)};$$

$$n = \frac{(3)}{(a1p^2+)^2(b1p+)}{p^2(a1p+)^3}, \quad n = \frac{(4)}{(a1p^2+)^2(b1p+)}{p^2(a1p+)^2(G1p+)};$$

$$n = \frac{(4)}{(a1p^2+)^2(b1p+)}{p^3(a1p^2+)}; \quad n = \frac{(3)}{(a1p^2+)^2(b1p+)}{p^3(a1p+)^2};$$

$$n = \frac{(3)}{(a1p^2+)^2(b1p+)}{p^4(a1p+)}, \quad n = \frac{(2)}{(a1p^2+)^2(b1p+)}{p^5};$$

$$n = \frac{(5)}{(a1p^2+)(b1p+)^3}{(a1p^2+)(G1p+)^3}, \quad n = \frac{(3)}{(a1p^2+)(b1p+)^3}{(a1p+)^2};$$

$$n = \frac{(4)}{(a1p^2+)(b1p+)^3}{(a1p+)^4(G1p+)}, \quad n = \frac{(4)}{(a1p^2+)(b1p+)^3}{(a1p+)^3(G1p+)^2};$$

$$n = \frac{(6)}{(a1p^2+)(b1p+)^3}{p(a1p^4+)}, \quad n = \frac{(4)}{(a1p^2+)(b1p+)^3}{p(a1p^2+)^2};$$

$$n = \frac{(5)}{(a1p^2+)(b1p+)^3}{p(a1p^2+)(G1p+)^2}, \quad n = \frac{(3)}{(a1p^2+)(b1p+)^3}{p(a1p+)^4};$$

$$n = \frac{(4)}{(a1p^2+)(b1p+)^3}{p(a1p+)^3(G1p+)}, \quad n = \frac{(5)}{(a1p^2+)(b1p+)^3}{p^2(a1p^3+)};$$

$$n = \frac{(a_1p^2+)^3(b_1p+)^3}{p^2(a_1p+)^3}, \quad n = \frac{(a_1p^2+)^4(b_1p+)^3}{p^2(a_1p+)^2(c_1p+)},$$

$$n = \frac{(a_1p^2+)^4(b_1p+)^3}{p^3(a_1p^2+)}, \quad n = \frac{(a_1p^2+)^3(b_1p+)^3}{p^3(a_1p+)^2},$$

$$n = \frac{(a_1p^2+)^3(b_1p+)^3}{p^4(a_1p+)}, \quad n = \frac{(a_1p^2+)^2(b_1p+)^3}{p^5},$$

$$n = \frac{(a_1p+)^5}{(a_1p+)^4(c_1p+)}, \quad n = \frac{(a_1p+)^5}{(a_1p+)^3(c_1p+)^2},$$

$$n = \frac{(a_1p+)^5}{p(a_1p^4+)}, \quad n = \frac{(a_1p+)^5}{p(a_1p^2+)^2}, \quad n = \frac{(a_1p+)^5}{p(a_1p^2+)(c_1p+)^2},$$

$$n = \frac{(a_1p+)^5}{p(a_1p+)^4}, \quad n = \frac{(a_1p+)^5}{p(a_1p+)^1(c_1p+)}, \quad n = \frac{(a_1p+)^5}{p^2(a_1p^3+)},$$

$$n = \frac{(a_1p+)^5}{p^3(a_1p+)^2}, \quad n = \frac{(a_1p+)^5}{p^2(a_1p+)^2(c_1p+)}, \quad n = \frac{(a_1p+)^5}{p^3(a_1p^2+)},$$

$$n = \frac{(a_1p+)^5}{p^3(a_1p+)^2}, \quad n = \frac{(a_1p+)^5}{p^4(a_1p+)}, \quad n = \frac{(a_1p+)^4(b_1p+)}{(a_1p+)^4(c_1p+)},$$

$$n = \frac{(a_1p+)^4(b_1p+)}{(a_1p+)^3(c_1p+)^2}, \quad n = \frac{(a_1p+)^4(c_1p+)}{p(a_1p^4+)},$$

$$n = \frac{(a_1p+)^4(b_1p+)}{p(a_1p^2+)^2}, \quad n = \frac{(a_1p+)^4(b_1p+)}{p(a_1p^2+)(c_1p+)^2},$$

$$n = \frac{(a_1p+)^4(b_1p+)}{p(a_1p+)^4}, \quad n = \frac{(a_1p+)^4(b_1p+)}{p(a_1p+)^3(c_1p+)},$$

$$n = \frac{(a_1p+)^4(b_1p+)}{p^2(a_1p^3+)}, \quad n = \frac{(a_1p+)^4(b_1p+)}{p^2(a_1p+)^2},$$

$$n = \frac{(a_1p+)^4(b_1p+)}{p^2(a_1p+)^2(c_1p+)}^{(3)}, \quad n = \frac{(a_1p+)^4(b_1p+)}{p^3(a_1p^2+)}^{(3)},$$

$$n = \frac{(a_1p+)^4(b_1p+)}{p^3(a_1p+)^2}^{(2)}, \quad n = \frac{(a_1p+)^4(b_1p+)}{p^4(a_1p+)}^{(2)},$$

$$n = \frac{(a_1p+)^4(b_1p+)}{p^5}^{(1)}, \quad n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2}{(a_1p+)^3(c_1p+)^2}^{(3)},$$

$$n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2}{p(a_1p^4+)}^{(5)}, \quad n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2}{p(a_1p^2+)^2}^{(3)},$$

$$n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2}{p(a_1p^2+)(c_1p+)^2}^{(4)}, \quad n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2}{p(a_1p+)^4}^{(2)},$$

$$n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2}{p(a_1p+)^3(c_1p+)}^{(3)}, \quad n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2}{p^2(a_1p^3+)}^{(4)},$$

$$n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2}{p^2(a_1p+)^2}^{(2)}, \quad n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2}{p^2(a_1p+)^2(c_1p+)}^{(3)},$$

$$n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2}{p^3(a_1p^2+)}^{(3)}, \quad n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2}{p^3(a_1p+)^2}^{(2)},$$

$$n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2}{p^4(a_1p+)}^{(2)}, \quad n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2}{p^5}^{(1)},$$

6.° $$n = \frac{a_1p^6+}{a_1p^6+}^{(11)}, \quad n = \frac{a_1p^6+}{(a_1p^4+)(c_1p+)^2}^{(10)}, \quad n = \frac{a_1p^6+}{(a_1p^3+)^2}^{(8)},$$

$$n = \frac{a_1p^6+}{(a_1p^3+)(c_1p+)^3}^{(9)}, \quad n = \frac{a_1p^6+}{(a_1p^2+)^3}^{(7)}, \quad n = \frac{a_1p^6+}{(a_1p^2+)^2(c_1p^2)}^{(9)},$$

$$n = \frac{a_1p^6+}{(a_1p^2+)(c_1p+)^4}^{(8)}, \quad n = \frac{a_1p^6+}{(a_1p+)^6}^{(6)}, \quad n = \frac{a_1p^6+}{(a_1p+)^5(c_1p+)}^{(7)},$$

$$n = \frac{a\,1\,p^6 +}{(\alpha\,1\,p +)^4\,(\mathcal{C}\,1\,p +)^2}\,(7),\quad n = \frac{a\,1\,p^6 +}{(\alpha\,1\,p +)^3\,(\mathcal{C}\,1\,p +)^2\,(\gamma\,1\,p +)}\,(8);$$

$$n = \frac{a\,1\,p^6 +}{p\,(\alpha\,1\,p^5 +)}\,(10),\quad n = \frac{a\,1\,p^6 +}{p\,(\alpha\,1\,p^3 +)\,(\mathcal{C}\,1\,p +)^2}\,(9),$$

$$n = \frac{a\,1\,p^6 +}{p\,(\alpha\,1\,p^2 +)^2\,(\mathcal{C}\,1\,p +)}\,(8),\quad n = \frac{a\,1\,p^6 +}{p\,(\alpha\,1\,p^2 +)\,(\mathcal{C}\,1\,p +)^3}\,(8);$$

$$n = \frac{a\,1\,p^6 +}{p\,(\alpha\,1\,p +)^5}\,(6),\quad n = \frac{a\,1\,p^6 +}{p\,(\alpha\,1\,p +)^4\,(\mathcal{C}\,1\,p +)}\,(7);$$

$$n = \frac{a\,1\,p^6 +}{(\alpha\,1\,p +)^3\,(\mathcal{C}\,1\,p +)^2}\,(8),\quad n = \frac{a\,1\,p^6 +}{p^2\,(\alpha\,1\,p^4 +)}\,(9),$$

$$n = \frac{a\,1\,p^6 +}{p^2\,(\alpha\,1\,p^3 +)^2}\,(7),\quad n = \frac{a\,1\,p^6 +}{p^2\,(\alpha\,1\,p^2 +)\,(\mathcal{C}\,1\,p +)^2}\,(8),$$

$$n = \frac{a\,1\,p^6 +}{p^2\,(\alpha\,1\,p +)^4}\,(6),\quad n = \frac{a\,1\,p^6 +}{p^2\,(\alpha\,1\,p +)^3\,(\mathcal{C}\,1\,p +)}\,(7);$$

$$n = \frac{a\,1\,p^6 +}{p^3\,(\alpha\,1\,p^3 +)}\,(8),\quad n = \frac{a\,1\,p^6 +}{p^3\,(\alpha\,1\,p +)^3}\,(6),\quad n = \frac{a\,1\,p^6 +}{p^3\,(\alpha\,1\,p +)^2\,(\mathcal{C}\,1\,p +)}\,(7),$$

$$n = \frac{a\,1\,p^6 +}{p^4\,(\alpha\,1\,p^2 +)}\,(7),\quad n = \frac{a\,1\,p^6 +}{p^4\,(\alpha\,1\,p +)^2}\,(6),\quad n = \frac{a\,1\,p^6 +}{p^5\,(\alpha\,1\,p +)}\,(6),$$

$$n = \frac{a\,1\,p^6 +}{p^6}\,(5).$$

$$n = \frac{(a\,1\,p^4 +)\,(b\,1\,p +)^2}{(\alpha\,1\,p^4 +)\,(\mathcal{C}\,1\,p +)^2}\,(9),\quad n = \frac{(a\,1\,p^4 +)\,(b\,1\,p +)^4}{(\alpha\,1\,p^3 +)^2}\,(7),$$

$$n = \frac{(a\,1\,p^4 +)\,(b\,1\,p +)^2}{(\alpha\,1\,p^3 +)\,(\mathcal{C}\,1\,p +)^3}\,(8),\quad n = \frac{(a\,1\,p^4 +)\,(b\,1\,p +)^2}{(\alpha\,1\,p^2 +)^2}\,(8);$$

$$n = \frac{(a_1p^4+)(b_1p+)^2}{(a_1p^2+)^2(c_1p^2+)}^{(8)}, \quad n = \frac{(a_1p^4+)(b_1p+)^2}{(a_1p^2+)(c_1p+)^4}^{(7)},$$

$$n = \frac{(a_1p^4+)(b_1p+)^2}{(a_1p+)^6}^{(5)}, \quad n = \frac{(a_1p^4+)(b_1p+)^2}{(a_1p+)^2(c_1p+)}^{(6)},$$

$$n = \frac{(a_1p^4+)(b_1p+)^2}{(a_1p+)^4(c_1p+)^2}^{(6)}, \quad n = \frac{(a_1p^4+)(b_1p+)^2}{(a_1p+)^3(c_1p+)^2(\gamma_1p+)}^{(7)},$$

$$n = \frac{(a_1p^4+)(b_1p+)^2}{p(a_1p^5+)}^{(9)}, \quad n = \frac{(a_1p^4+)(b_1p+)^2}{p(a_1p^3+)(c_1p+)^2}^{(8)},$$

$$n = \frac{(a_1p^4+)(b_1p+)^2}{p(a_1p^2+)^2(c_1p+)}^{(7)}, \quad n = \frac{(a_1p^4+)(b_1p+)^2}{p(a_1p^2+)(c_1p+)^3}^{(7)},$$

$$n = \frac{(a_1p^4+)(b_1p+)^2}{p(a_1p+)^5}^{(5)}, \quad n = \frac{(a_1p^4+)(b_1p+)^2}{p(a_1p+)^4(c_1p+)}^{(6)},$$

$$n = \frac{(a_1p^4+)(b_1p+)^2}{p(a_1p+)^3(c_1p+)^2}^{(6)}, \quad n = \frac{(a_1p^4+)(b_1p+)^2}{p^2(a_1p^4+)}^{(8)},$$

$$n = \frac{(a_1p^4+)(b_1p+)^2}{p^2(a_1p^2+)^2}^{(6)}, \quad n = \frac{(a_1p^4+)(b_1p+)^2}{p^2(a_1p^3+)(c_1p+)^2}^{(7)},$$

$$n = \frac{(a_1p^4+)(b_1p+)^2}{p^2(a_1p+)^4}^{(5)}, \quad n = \frac{(a_1p^4+)(b_1p+)^2}{p^2(a_1p+)^3(c_1p+)}^{(6)},$$

$$n = \frac{(a_1p^4+)(b_1p+)^2}{p^3(a_1p^3+)}^{(7)}, \quad n = \frac{(a_1p^4+)(b_1p+)^2}{p^3(a_1p+)^3}^{(5)},$$

$$n = \frac{(a_1p^4+)(b_1p+)^2}{p^3(a_1p+)^2(c_1p+)}^{(6)}, \quad n = \frac{(a_1p^4+)(b_1p+)^2}{p^4(a_1p^2+)}^{(6)},$$

$$n = \frac{(a_1p^4+)(b_1p+)^2}{p^4(a_1p+)^2}^{(5)}, \quad n = \frac{(a_1p^4+)(b_1p+)^2}{p^5(a_1p+)}^{(5)},$$

$$n = \frac{(a_1p^4+)(b_1p+)^2}{p^6}^{(4)}.$$

$$n = \frac{(a_1p^3+)^2}{(a_1p^3+)(6_1p+)^2}, \quad n = \frac{(a_1p^3+)^2}{(a_1p^2+)^2}, \quad n = \frac{(a_1p^3+)^2}{(a_1p^2+)(6_1p+)^2},$$

$$n = \frac{(a_1p^3+)^2}{(a_1p^2+)^2(6_1p^2+)}, \quad n = \frac{(a_1p^3+)^2}{(a_1p^2+)(6_1p+)^4},$$

$$n = \frac{(a_1p^3+)^2}{(a_1p+)^3(6_1p+)}, \quad n = \frac{(a_1p^3+)^2}{(a_1p+)^3(6_1p+)^2(\gamma_1p+)},$$

$$n = \frac{(a_1p^3+)^2}{p(a_1p^3+)}, \quad n = \frac{(a_1p^3+)^2}{p(a_1p^3+)(6_1p+)^2},$$

$$n = \frac{(a_1p^3+)^2}{p(a_1p^2+)^2(6_1p+)}, \quad n = \frac{(a_1p^3+)^2}{p(a_1p^2+)(6_1p+)^2},$$

$$n = \frac{(a_1p^3+)^2}{p(a_1p+)^5}, \quad n = \frac{(a_1p^3+)^2}{p(a_1p+)^4(6_1p+)},$$

$$n = \frac{(a_1p^3+)^2}{p(a_1p+)^3(6_1p+)^2}, \quad n = \frac{(a_1p^3+)^2}{p^2(a_1p^2+)},$$

$$n = \frac{(a_1p^3+)^2}{p^2(a_1p^2+)(6_1p+)^2}, \quad n = \frac{(a_1p^3+)^2}{p^2(a_1p+)^3(6_1p+)},$$

$$n = \frac{(a_1p^3+)^2}{p^3(a_1p^3+)}, \quad n = \frac{(a_1p^3+)^2}{p^3(a_1p+)^3}, \quad n = \frac{(a_1p^3+)^2}{p^3(a_1p+)^2(6_1p+)},$$

$$n = \frac{(a_1p^3+)^2}{p^4(a_1p^2+)}, \quad n = \frac{(a_1p^3+)^2}{p^5(a_1p+)}, \quad n = \frac{(a_1p^3+)(b_1p+)^3}{(a_1p^3+)(6_1p+)^3},$$

$$n = \frac{(a_1p^3+)(b_1p+)^3}{(a_1p^2+)^3}, \quad n = \frac{(a_1p^3+)(b_1p+)^3}{(a_1p^2+)^2(6_1p^2+)},$$

$$n = \frac{(a_1p^3+)(b_1p+)^3}{(a_1p^2+)(6_1p+)^4}, \quad n = \frac{(a_1p^3+)(b_1p+)^3}{(a_1p+)^6},$$

$$u = \frac{(a_1p^3+)^{(5)}(b_1p+)^3}{(a_1p+)^5(c_1p+)}, \quad u = \frac{(a_1p^3+)^{(5)}(b_1p+)^3}{(a_1p+)^4(c_1p+)^2},$$

$$u = \frac{(a_1p^3+)^{(6)}(b_1p+)^3}{(a_1p+)^3(c_1p+)^2(\gamma_1p+)}, \quad u = \frac{(a_1p^3+)^{(8)}(b_1p+)^3}{p(a_1p^3+)},$$

$$u = \frac{(a_1p^3+)^{(7)}(b_1p+)^3}{p(a_1p^3+)(c_1p+)^2}, \quad u = \frac{(a_1p^3+)^{(7)}(b_1p+)^3}{p^2(a_1p^2+)},$$

$$u = \frac{(a_1p^3+)^{(5)}(b_1p+)^3}{p^2(a_1p^2+)^2}, \quad u = \frac{(a_1p^3+)^{(6)}(b_1p+)^3}{p^2(a_1p^2+)(c_1p+)^2},$$

$$u = \frac{(a_1p^3+)^{(4)}(b_1p+)^3}{p^2(a_1p+)^4}, \quad u = \frac{(a_1p^3+)^{(5)}(b_1p+)^3}{p^2(a_1p+)^3(c_1p+)},$$

$$u = \frac{(a_1p^3+)^{(6)}(b_1p+)^3}{p^3(a_1p^3+)}, \quad u = \frac{(a_1p^3+)^{(4)}(b_1p+)^3}{p^3(a_1p+)^2},$$

$$u = \frac{(a_1p^3+)^{(5)}(b_1p+)^3}{p^3(a_1p+)^2(c_1p+)}, \quad u = \frac{(a_1p^3+)^{(5)}(b_1p+)^3}{p^4(a_1p^2+)},$$

$$u = \frac{(a_1p^3+)^{(4)}(b_1p+)^3}{p^4(a_1p+)^2}, \quad u = \frac{(a_1p^3+)^{(4)}(b_1p+)^3}{p^5(a_1p+)},$$

$$u = \frac{(a_1p^3+)^{(3)}(b_1p+)^3}{p^6}.$$

$$u = \frac{(a_1p^2+)^{(5)3}}{(a_1p^2+)^2(c_1p^2+)}, \quad u = \frac{(a_1p^2+)^{(4)3}}{(a_1p^2+)(c_1p+)^2};$$

$$u = \frac{(a_1p^2+)^{(3)3}}{(a_1p+)^3(c_1p+)}, \quad u = \frac{(a_1p^2+)^{(3)3}}{(a_1p+)^4(c_1p+)^2},$$

$$u = \frac{(a_1p^2+)^{(4)3}}{(a_1p+)^3(c_1p+)^2(\gamma_1p+)}, \quad u = \frac{(a_1p^2+)^{(6)3}}{p(a_1p^3+)};$$

$u =$

$$n = \frac{(a1p^2+)^3}{p(a1p^3+)(\overset{(5)}{\mathrm{G}}1p+)^2}, \quad n = \frac{(a1p^2+)^3}{p(a1p^2+)^2(\overset{(4)}{\mathrm{G}}1p+)},$$

$$n = \frac{(a1p^2+)^3}{p(a1p^2+)(\overset{(4)}{\mathrm{G}}1p+)^2}, \quad n = \frac{(a1p^2+)^3}{p(a1p+)^2}\ ;$$

$$n = \frac{(a1p^2+)^3}{p(a1p+)^4(\overset{(3)}{\mathrm{G}}1p+)}, \quad n = \frac{(a1p^2+)^3}{p(a1p+)^3(\overset{(3)}{\mathrm{G}}1p+)^2}\ ;$$

$$n = \frac{(a1p^2+)^3}{p^2(a1p^4+)}, \quad n = \frac{(a1p^2+)^3}{p^2(a1p^2+)^2}, \quad n = \frac{(a1p^2+)^3}{p^2(a1p^2+)(\overset{(4)}{\mathrm{G}}1p+)^2}\ ;$$

$$n = \frac{(a1p^2+)^3}{p^2(a1p+)^4}, \quad n = \frac{(a1p^2+)^3}{p^2(a1p+)^3(\overset{(3)}{\mathrm{G}}1p+)},$$

$$n = \frac{(a1p^2+)^3}{p^3(a1p^3+)}\ ; \quad n = \frac{(a1p^2+)^3}{p^3(a1p+)^2(\overset{(3)}{\mathrm{G}}1p+)}\ ;$$

$$n = \frac{(a1p^2+)^3}{p^4(a1p^2+)}, \quad n = \frac{(a1p^2+)^3}{p^4(a1p+)^2}, \quad n = \frac{(a1p^2+)^3}{p^5(a1p+)}\ ;$$

$$n = \frac{(a1p^2+)^2(b1p^2+)}{(a1p^2+)^2(\overset{(7)}{\mathrm{G}}1p^2+)}, \quad n = \frac{(a1p^2+)^2(b1p^2+)}{(a1p^2+)(\overset{(6)}{\mathrm{G}}1p+)^4}\ ;$$

$$n = \frac{(a1p^2+)^2(b1p^2+)}{(a1p+)^6}, \quad n = \frac{(a1p^2+)^2(b1p^2+)}{(a1p+)^5(\overset{(4)}{\mathrm{G}}1p+)}\ ;$$

$$n = \frac{(a1p^2+)^2(b1p^2+)}{(a1p+)^4(\overset{(5)}{\mathrm{G}}1p+)^2}, \quad n = \frac{(a1p^2+)^2(b1p^2+)}{(a1p+)^3(\overset{(6)}{\mathrm{G}}1p+)^2(\gamma 1p+)}\ ;$$

$$n = \frac{(a1p^2+)^2(b1p^2+)}{p(a1p^5+)}, \quad n = \frac{(a1p^2+)^2(b1p^2+)}{p(a1p^3+)(\overset{(7)}{\mathrm{G}}1p+)^2}\ ;$$

$$n = \frac{(a1p^2+)^2(b1p^2+)}{p(a1p^2+)^2(\overset{(6)}{\mathrm{G}}1p+)}, \quad n = \frac{(a1p^2+)^2(b1p^2+)}{p(a1p^2+)(\overset{(6)}{\mathrm{G}}1p+)^2}\ ;$$

$$u = \frac{(a1p^2+)^2(b1p^2+)}{p(a1p+)^2}, \quad n = \overset{(5)}{\frac{(a1p^2+)^2(b1p^2+)}{p(a1p+)^4(\mathcal{C}1p+)}};$$

$$u = \overset{(5)}{\frac{(a1p^2+)^2(b1p^2+)}{p(a1p+)^3(\mathcal{C}1p+)^2}}, \quad n = \overset{(7)}{\frac{(a1p^2+)^2(b1p^2+)}{p^2(a1p^4+)}},$$

$$u = \overset{(5)}{\frac{(a1p^2+)^2(b1p^2+)}{p^2(a1p^2+)^2}}, \quad n = \overset{(6)}{\frac{(a1p^2+)^2(b1p^2+)}{p^2(a1p^2+)(\mathcal{C}1p+)^2}},$$

$$u = \overset{(4)}{\frac{(a1p^2+)^2(b1p^2+)}{p^2(a1p+)^4}}, \quad n = \overset{(5)}{\frac{(a1p^2+)^2(b1p^2+)}{p^2(a1p+)^3(\mathcal{C}1p+)}},$$

$$u = \overset{(6)}{\frac{(a1p^2+)^2(b1p^2+)}{p^3(a1p^3+)}}, \quad n = \overset{(4)}{\frac{(a1p^2+)^2(b1p^2+)}{p^3(a1p+)^3}},$$

$$u = \overset{(5)}{\frac{(a1p^2+)^2(b1p^2+)}{p^3(a1p+)^2(\mathcal{C}1p+)}}, \quad n = \overset{(5)}{\frac{(a1p^2+)^2(b1p^2+)}{p^4(a1p^2+)}},$$

$$n = \overset{(4)}{\frac{(a1p^2+)^2(b1p^2+)}{p^4(a1p+)^2}}, \quad n = \overset{(4)}{\frac{(a1p^2+)^2(b1p^2+)}{p^5(a1p+)}},$$

$$u = \overset{(3)}{\frac{(a1p^2+)^2(b1p^2+)}{p^6}}.$$

$$n = \overset{(5)}{\frac{(a1p^2+)(b1p+)^4}{(a1p^2+)(\mathcal{C}1p+)^4}}, \quad n = \overset{(3)}{\frac{(a1p^2+)(b1p+)^4}{(a1p+)^6}},$$

$$n = \overset{(4)}{\frac{(a1p^2+)(b1p+)^4}{(a1p+)^5(\mathcal{C}1p+)}}, \quad n = \overset{(4)}{\frac{(a1p^2+)(b1p+)^4}{(a1p+)^4(\mathcal{C}1p+)^2}},$$

$$n = \overset{(5)}{\frac{(a1p^2+)(b1p+)^4}{(a1p+)^3(\mathcal{C}1p+)^2(\gamma1p+)}}, \quad n = \overset{(7)}{\frac{(a1p^2+)(b1p+)^4}{p(a1p^5+)}},$$

$$u = \overset{(6)}{\frac{(a1p^2+)(b1p+)^4}{p(a1p^3+)(\mathcal{C}1p+)^2}}, \quad n = \overset{(5)}{\frac{(a1p^2+)(b1p+)^4}{p(a1p^2+)^2(\mathcal{C}1p+)}},$$

$$n = \frac{(a\,1\,p^2+)\,(b\,1\,p+)^4}{p(a\,1\,p^2+)\,(c\,1\,p+)^3}\,(5),\quad n = \frac{(a\,1\,p^2+)\,(b\,1\,p+)^4}{p(a\,1\,p+)^5}\,(3),$$

$$n = \frac{(a\,1\,p^2+)\,(b\,1\,p+)^4}{p(a\,1\,p+)^4\,(c\,1\,p+)}\,(4),\quad n = \frac{(a\,1\,p^2+)\,(b\,1\,p+)^4}{p(a\,1\,p+)^3\,(c\,1\,p+)^2}\,(4),$$

$$n = \frac{(a\,1\,p^2+)\,(b\,1\,p+)^4}{p^2(a\,1\,p^4+)}\,(5),\quad n = \frac{(a\,1\,p^2+)\,(b\,1\,p+)^4}{p^2(a\,1\,p^2+)^2}\,(3),$$

$$n = \frac{(a\,1\,p^2+)\,(b\,1\,p+)^4}{p^2(a\,1\,p^2+)\,(c\,1\,p+)^2}\,(4),\quad n = \frac{(a\,1\,p^2+)\,(b\,1\,p+)^4}{p^2(a\,1\,p+)^4}\,(3);$$

$$n = \frac{(a\,1\,p^2+)\,(b\,1\,p+)^4}{p^2(a\,1\,p+)^3\,(c\,1\,p+)}\,(4),\quad n = \frac{(a\,1\,p^2+)\,(b\,1\,p+)^4}{p^3(a\,1\,p^3+)}\,(5),$$

$$n = \frac{(a\,1\,p^2+)\,(b\,1\,p+)^4}{p^3(a\,1\,p+)^3}\,(3),\quad n = \frac{(a\,1\,p^2+)\,(b\,1\,p+)^4}{p^3(a\,1\,p+)^2\,(c\,1\,p+)}\,(4),$$

$$n = \frac{(a\,1\,p^2+)\,(b\,1\,p+)^4}{p^4(a\,1\,p^2+)}\,(4),\quad n = \frac{(a\,1\,p^2+)\,(b\,1\,p+)^4}{p^4(a\,1\,p+)^2}\,(3),$$

$$n = \frac{(a\,1\,p^2+)\,(b\,1\,p+)^4}{p^5(a\,1\,p+)}\,(3),\quad n = \frac{(a\,1\,p^2+)\,(b\,1\,p+)^4}{p^6}\,(2).$$

$$n = \frac{(a\,1\,p+)^6}{(a\,1\,p+)^3\,(c\,1\,p+)}\,(2),\quad n = \frac{(a\,1\,p+)^6}{(a\,1\,p+)^3\,(c\,1\,p+)^2\,(\gamma\,1\,p+)}\,(3);$$

$$n = \frac{(a\,1\,p+)^6}{p\,(a\,1\,p^3+)}\,(5),\quad n = \frac{(a\,1\,p+)^6}{p\,(a\,1\,p^3+)\,(c\,1\,p+)^2}\,(4),$$

$$n = \frac{(a\,1\,p+)^6}{p(a\,1\,p^2+)^2\,(c\,1\,p+)}\,(3),\quad n = \frac{(a\,1\,p+)^6}{p(a\,1\,p^2+)\,(c\,1\,p+)^2}\,(3),$$

$$n = \frac{(a\,1\,p+)^6}{p\,(a\,1\,p+)^5}\,(1);\quad n = \frac{(a\,1\,p+)^6}{p\,(a\,1\,p+)^4\,(c\,1\,p+)}\,(2);$$

$$n = \frac{(a\,1\,p+)^6}{p(\alpha\,1\,p+)^3(\epsilon\,1\,p+)^2}\,(2), \qquad n = \frac{(a\,1\,p+)^6}{p^2(\alpha\,1\,p^4+)}\,(4),$$

$$n = \frac{(a\,1\,p+)^6}{p^2(\alpha\,1\,p^2+)(\epsilon\,1\,p+)^2}\,(3), \qquad n = \frac{(a\,1\,p+)^6}{p^2(\alpha\,1\,p+)^3(\epsilon\,1\,p+)}\,(2),$$

$$n = \frac{(a\,1\,p+)^6}{p^3(\alpha\,1\,p^3+)}\,(3), \qquad n = \frac{(a\,1\,p+)^6}{p^3(\alpha\,1\,p+)^2(\epsilon\,1\,p+)}\,(2);$$

$$n = \frac{(a\,1\,p+)^6}{p^4(\alpha\,1\,p^2+)}\,(2), \qquad n = \frac{(a\,1\,p+)^6}{p^5(\alpha\,1\,p+)}\,(1).$$

$$n = \frac{(a\,1\,p+)^5(b\,1\,p+)}{(\alpha\,1\,p+)^5(\epsilon\,1\,p+)}\,(3), \qquad n = \frac{(a\,1\,p+)^5(b\,1\,p+)}{(\alpha\,1\,p+)^4(\epsilon\,1\,p+)^2}\,(3);$$

$$n = \frac{(a\,1\,p+)^5(b\,1\,p+)}{(\alpha\,1\,p+)^3(\epsilon\,1\,p+)^2(\gamma\,1\,p+)}\,(4), \qquad n = \frac{(a\,1\,p+)^5(b\,1\,p+)}{p(\alpha\,1\,p^5+)}\,(6),$$

$$n = \frac{(a\,1\,p+)^5(b\,1\,p+)}{p(\alpha\,1\,p^3+)(\epsilon\,1\,p+)^2}\,(5), \qquad n = \frac{(a\,1\,p+)^5(b\,1\,p+)}{p(\alpha\,1\,p^2+)^2(\epsilon\,1\,p+)}\,(4),$$

$$n = \frac{(a\,1\,p+)^5(b\,1\,p+)}{p(\alpha\,1\,p^2+)(\epsilon\,1\,p+)^3}\,(4), \qquad n = \frac{(a\,1\,p+)^5(b\,1\,p+)}{p(\alpha\,1\,p+)^5}\,(2),$$

$$n = \frac{(a\,1\,p+)^5(b\,1\,p+)}{p(\alpha\,1\,p+)^4(\epsilon\,1\,p+)}\,(3), \qquad n = \frac{(a\,1\,p+)^5(b\,1\,p+)}{p(\alpha\,1\,p+)^3(\epsilon\,1\,p+)^2}\,(3);$$

$$n = \frac{(a\,1\,p+)^5(b\,1\,p+)}{p^2(\alpha\,1\,p^4+)}\,(5), \qquad n = \frac{(a\,1\,p+)^5(b\,1\,p+)}{p^2(\alpha\,1\,p^2+)^2}\,(3),$$

$$n = \frac{(a\,1\,p+)^5(b\,1\,p+)}{p^2(\alpha\,1\,p^2+)(\epsilon\,1\,p+)^2}\,(4), \qquad n = \frac{(a\,1\,p+)^5(b\,1\,p+)}{p^3(\alpha\,1\,p+)^4}\,(2),$$

$$n = \frac{(a\,1\,p+)^5(b\,1\,p+)}{p^2(\alpha\,1\,p+)^3(\epsilon\,1\,p+)}\,(3), \qquad n = \frac{(a\,1\,p+)^5(b\,1\,p+)}{p^3(\alpha\,1\,p^3+)}\,(4),$$

$$n = \frac{(2)}{\frac{7a1p+)^5(b1p+)}{p^3(\alpha1p+)^3}}, \quad n = \frac{(3)}{\frac{(a1p+)^5(b1p+)}{p^3(\alpha1p+)^2(\epsilon1p+)}},$$

$$n = \frac{(3)}{\frac{(a1p+)^5(b1p+)}{p^4(\alpha1p^2+)}}, \quad n = \frac{(2)}{\frac{(a1p+)^5(b1p+)}{p^4(\alpha1p+)^2}},$$

$$n = \frac{(2)}{\frac{(a1p+)^5(b1p+)}{p^5(\alpha1p+)}}, \quad n = \frac{(1)}{\frac{(a1p+)^5(b1p+)}{p^6}},$$

$$n = \frac{(4)}{\frac{(a1p+)^4(b1p+)^2}{(\alpha1p+)^3(\epsilon1p+)^2(\gamma1p+)}}, n = \frac{(6)}{\frac{(a1p+)^4(b1p+)^2}{p(\alpha1p^5+)}},$$

$$n = \frac{(5)}{\frac{(a1p+)^4(b1p+)^2}{p(\alpha1p^2+)(\epsilon1p+)^2}}, \quad n = \frac{(4)}{\frac{(a1p+)^4(\epsilon1p+)^2}{p(\alpha1p^2+)^2(\epsilon1p+)}},$$

$$n = \frac{(4)}{\frac{(a1p+)^4(b1p+)^2}{p(\alpha1p^2+)(\epsilon1p+)^3}}, \quad n = \frac{(2)}{\frac{(a1p+)^4(b1p+)^2}{p(\alpha1p+)^5}},$$

$$n = \frac{(3)}{\frac{(a1p+)^4(b1p+)^2}{p(\alpha1p+)^4(\epsilon1p+)}}, \quad n = \frac{(3)}{\frac{(a1p+)^4(b1p+)^2}{p(\alpha1p+)^4(\epsilon1p+)^2}},$$

$$n = \frac{(5)}{\frac{(a1p+)^4(b1p+)^2}{P_4^{12}(\alpha1p^4+)}}, \quad n = \frac{(4)}{\frac{(a1p+)^4(b1p+)^2}{p^2(\alpha1p^2+)(\epsilon1p+)^2}},$$

$$n = \frac{(3)}{\frac{(a1p+)^4(b1p+)^2}{p^2(\alpha1p+)^3(\epsilon1p+)}}, \quad n = \frac{(4)}{\frac{(a1p+)^4(b1p+)^2}{p^3(\alpha1p^3+)}},$$

$$n = \frac{(2)}{\frac{(a1p+)^4(b1p+)^2}{p^3(\alpha1p+)^3}}, \quad n = \frac{(3)}{\frac{(a1p+)^4(b1p+)^2}{p^3(\alpha1p+)^2(\epsilon1p+)}},$$

$$n = \frac{(3)}{\frac{(a1p+)^4(b1p+)^2}{p^4(\alpha1p^2+)}}, \quad n = \frac{(2)}{\frac{(a1p+)^4(b1p+)^2}{p^5(\alpha1p+)}},$$

$$n = \frac{(5)}{\frac{(a1p+)^3(b1p+)^2(c1p+)}{(\alpha1p+)^3(\epsilon1p+)^2(\gamma1p+)}}, n = \frac{(7)}{\frac{(a1p+)^3(b1p+)^2(c1p+)}{p(\alpha1p^5+)}},$$

$$n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2(c_1p+)}{p(\alpha_1p^3+)(\mathcal{C}_1p+)^2}, \quad n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2(c_1p+)}{p(\alpha_1p^2+)^2(\mathcal{C}_1p+)}$$

$$n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2(c_1p+)}{p(\alpha_1p^2+)(\mathcal{C}_1p+)^2}, \quad n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2(c_1p+)}{p(\alpha_1p+)^5},$$

$$n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2(c_1p+)}{p(\alpha_1p+)^4(\mathcal{C}_1p+)}, \quad n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2(c_1p+)}{p(\alpha_1p+)^3(\mathcal{C}_1p+)^2};$$

$$n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2(c_1p+)}{p^2(\alpha_1p^4+)}, \quad n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2(c_1p+)}{p^2(\alpha_1p^2+)^2},$$

$$n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2(c_1p+)}{p^2(\alpha_1p^2+)(\mathcal{C}_1p+)^2}, \quad n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2(c_1p+)}{p^2(\alpha_1p+)^4},$$

$$n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2(c_1p+)}{p^3(\alpha_1p+)^2(\mathcal{C}_1p+)}, \quad n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2(c_1p+)}{p^3(\alpha_1p^2+)},$$

$$n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2(c_1p+)}{p^3(\alpha_1p+)^3}, \quad n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2(c_1p+)}{p^3(\alpha_1p+)^2(\mathcal{C}_1p+)};$$

$$n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2(c_1p+)}{p^4(\alpha_1p^2+)}, \quad n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2(c_1p+)}{p^4(\alpha_1p+)^2},$$

$$n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2(c_1p+)}{p^5(\alpha_1p+)}, \quad n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2(c_1p+)}{p^6}.$$

TABLE III.

L'intégrale de l'équation $\dot{x} + A\dot{y} = 0$, est $n = \frac{a_1p + a_2x + a_3y}{p}$.

L'intégrale de l'équation $\dot{x} + \frac{A_1p + A_2x}{B_1 - A_2y}\dot{y} = 0$, est

$$n = \frac{a_1p + a_2x + a_3y}{\alpha_1p + \alpha_2x + \alpha_3y}$$

Les intégrales de l'équation $\dot{x} + \frac{A_1p + A_2x + A_3y}{B_1p + B_2x + B_3y}\dot{y} = 0$,

sont $n = \frac{a_1p^2 +}{p^2}$, $n = \frac{(a_1p +)^2}{p(a_1p +)}$, $n = \frac{(a_1p +)^3}{p(a_1p +)^2}$,

$n = \frac{(a_1p +)^3}{p^2(a_1p +)}$, $n = \frac{(a_1p +)^2(b_1p +)}{p^3}$, $n = \frac{(a_1p +)^4}{p(a_1p +)^3}$,

$n = \frac{(a_1p +)^4}{p^3(a_1p +)}$, $n = \frac{(a_1p +)^3(b_1p +)}{p^4}$, $n = \frac{(a_1p +)^5}{p(a_1p +)^4}$,

$n = \frac{(a_1p +)^5}{p^2(a_1p +)^3}$, $n = \frac{(a_1p +)^5}{p^3(a_1p +)^2}$, $n = \frac{(a_1p +)^5}{p^4(a_1p +)}$;

$n = \frac{(a_1p +)^4(b_1p +)}{p^5}$, $n = \frac{(a_1p +)^3(b_1p +)^2}{p^5}$;

$n = \frac{(a_1p +)^6}{p^5(a_1p +)}$; $n = \frac{(a_1p +)^5(b_1p +)}{p^6}$,

$n = \frac{(a_1p +)^6}{p(a_1p +)^5}$, &c.

Les intégrales de l'équation $\dot{x} + \frac{A_1p^2 + A_2px +}{B_1p^2 + B_2px +}$
$\frac{A_3py + A_4x^2 + A_5xy}{B_3py - A_4xy - A_5y^2}\dot{y} = 0$, sont $n = \frac{a_1p^2 +}{(a_1p +)^2}$,

$n = \frac{(a_1p +)^3}{(a_1p +)^2(6_1p +)}$, $n = \frac{(a_1p +)^4}{(a_1p +)^3(6_1p +)}$,

$n = \frac{(a_1p +)^5}{(a_1p +)^4(6_1p +)}$, $n = \frac{(a_1p +)^5}{(a_1p +)^3(6_1p +)^2}$,

$n = \frac{(a_1p +)^6}{(a_1p +)^5(6_1p +)}$, &c.

Les intégrales de l'équation $\dot{x} + \frac{A_1p^2 + A_2px + A_3py +}{B_1p^2 + B_2px + B_3py +}$
$\frac{A_4x^2 + A_5xy + A_6y^2}{B_4x^2 + B_5xy + B_6y^2}\dot{y} = 0$, sont $n = \frac{a_1p^2 +}{p(a_1p +)}$,

$n = \frac{a_1p^3 +}{p^3}$, $n = \frac{(a_1p +)^3}{p(a_1p^2 +)}$, $n = \frac{(a_1p +)^2(b_1p +)}{p(a_1p +)^2}$,

$n = \frac{(a_1p +)^2(b_1p +)}{p^2(a_1p +)}$, $n = \frac{(a_1p^2 +)^2}{p(a_1p +)^2}$,

$n = \frac{(a_1p^2 +)^2}{p^3(a_1p +)}$, $n = \frac{(a_1p^2 +)(b_1p +)^2}{p^4}$,

$$n = \frac{(a\,1\,p+)^4}{p(a\,1\,p+)^2(c\,1\,p+)}, \quad n = \frac{(a\,1\,p+)^4}{p^2(a\,1\,p^2+)};$$

$$n = \frac{(a\,1\,p+)^3(b\,1\,p+)}{p(a\,1\,p+)^1}, \quad n = \frac{(a\,1\,p+)^3(b\,1\,p+)}{p^2(a\,1\,p+)^2},$$

$$n = \frac{(a\,1\,p+)^1(b\,1\,p+)}{p^3(a\,1\,p+)}, \quad n = \frac{(a\,1\,p^2+)^2(b\,1\,p+)}{p^5},$$

$$n = \frac{(a\,1\,p^2+)(b\,1\,p+)^3}{p^5}, \quad n = \frac{(a\,1\,p+)^5}{p(a\,1\,p+)^1(c\,1\,p+)},$$

$$n = \frac{(a\,1\,p+)^5}{p^2(a\,1\,p+)^2(c\,1\,p+)}, \quad n = \frac{(a\,1\,p+)^5}{p^3(a\,1\,p^2+)},$$

$$n = \frac{(a\,1\,p+)^4(b\,1\,p+)}{p(a\,1\,p+)^4}, \quad n = \frac{(a\,1\,p+)^4(b\,1\,p+)}{p^2(a\,1\,p+)^3},$$

$$n = \frac{(a\,1\,p+)^4(b\,1\,p+)}{p^3(a\,1\,p+)^2}, \quad n = \frac{(a\,1\,p+)^4(b\,1\,p+)}{p^4(a\,1\,p+)},$$

$$n = \frac{(a\,1\,p+)^3(b\,1\,p+)^2}{p(a\,1\,p+)^4}, \quad n = \frac{(a\,1\,p+)^3(b\,1\,p+)^2}{p^2(a\,1\,p+)^3};$$

$$n = \frac{(a\,1\,p+)^3(b\,1\,p+)^2}{p^3(a\,1\,p+)^2}, \quad n = \frac{(a\,1\,p+)^3(b\,1\,p+)^2}{p^4(a\,1\,p+)};$$

$$n = \frac{(a\,1\,p^2+)^3}{p(a\,1\,p+)^5}, \quad n = \frac{(a\,1\,p^2+)^3}{p^2(a\,1\,p+)^4}, \quad n = \frac{(a\,1\,p^2+)^3}{p^4(a\,1\,p+)^2},$$

$$n = \frac{(a\,1\,p^2+)^3}{p^5(a\,1\,p+)}, \quad n = \frac{(a\,1\,p^2+)(b\,1\,p+)^4}{p^6};$$

$$n = \frac{(a\,1\,p+)^6}{p(a\,1\,p+)^4(c\,1\,p+)}, \quad n = \frac{(a\,1\,p+)^6}{p(a\,1\,p+)^3(c\,1\,p+)^2};$$

$$n = \frac{(a\,1\,p+)^6}{p^2(a\,1\,p+)^1(c\,1\,p+)}, \quad n = \frac{(a\,1\,p+)^6}{p^3(a\,1\,p+)^2(c\,1\,p+)};$$

$$n = \frac{(a\,1\,p+)^6}{p^4(a\,1\,p^2+)}, \quad n = \frac{(a\,1\,p+)^5(b\,1\,p+)}{p(a\,1\,p+)^5}, \quad n = \frac{(a\,1\,p+)^5(b\,1\,p+)}{p^2(a\,1\,p+)^4},$$

$$n = \frac{(a\,1\,p+)^5(b\,1\,p+)}{p^3(a\,1\,p+)^1}, \quad n = \frac{(a\,1\,p+)^5(b\,1\,p+)}{p^4(a\,1\,p+)^2},$$

$$n = \frac{(a\,1\,p+)^5(b\,1\,p+)}{p^5(a\,1\,p+)}, \quad n = \frac{(a\,1\,p+)^4(b\,1\,p+)^2}{p(a\,1\,p+)^5},$$

$$n = \frac{(a\,1\,p+)^4(b\,1\,p+)^2}{p^1(a\,1\,p+)^1}, \quad n = \frac{(a\,1\,p+)^4(b\,1\,p+)^2}{p^5(a\,1\,p+)},$$

$$n = \frac{(a\,1\,p+)^5(b\,1\,p+)^2(c\,1\,p+)}{p^6}, \text{ \&c.}$$

Les

Les intégrales de l'équation $\dot{x} + \frac{A_1p^3 + A_2p^2x + A_3p^2y + \dots}{B_1p^3 + B_2p^2x + B_3p^2y + \dots} \dot{y} = 0$, sont

$$\frac{A_4px^2 + A_5pxy + A_6py^2 + A_7x^3 + A_8x^2y + A_9xy^2}{B_4px^2 + B_5pxy + B_6py^2 + A_7x^2y - A_8xy^2 - A_9y^3} \dot{y} = 0,$$

$$n = \frac{a_1p^2 + \dots}{a_1p^2 + \dots}, \quad n = \frac{a_1p^3 + \dots}{(a_1p + \dots)^3}, \quad n = \frac{(a_1p + \dots)^2 (b_1p + \dots)}{(a_1p + \dots)^2 (c_1p + \dots)},$$

$$n = \frac{(a_1p^2 + \dots)^2}{(a_1p + \dots)^2 (c_1p + \dots)}, \quad n = \frac{(a_1p^2 + \dots)(b_1p + \dots)^2}{(a_1p + \dots)^4},$$

$$n = \frac{(a_1p + \dots)^2 (b_1p + \dots)}{(a_1p + \dots)^3 (c_1p + \dots)}, \quad n = \frac{(a_1p^2 + \dots)^2 (b_1p + \dots)}{(a_1p + \dots)^5},$$

$$n = \frac{(a_1p^2 + \dots)(b_1p + \dots)^3}{(a_1p + \dots)^5}, \quad n = \frac{(a_1p + \dots)^4 (b_1p + \dots)}{(a_1p + \dots)^4 (c_1p + \dots)},$$

$$n = \frac{(a_1p + \dots)^4 (b_1p + \dots)}{(a_1p + \dots)^3 (c_1p + \dots)^2}, \quad n = \frac{(a_1p + \dots)^3 (b_1p + \dots)^2}{(a_1p + \dots)^3 (c_1p + \dots)^2},$$

$$n = \frac{(a_1p^2 + \dots)^3}{(a_1p + \dots)^5 (c_1p + \dots)}, \quad n = \frac{(a_1p^2 + \dots)^3}{(a_1p + \dots)^4 (c_1p + \dots)^2},$$

$$n = \frac{(a_1p^4 + \dots)(b_1p + \dots)^4}{(a_1p + \dots)^6}, \quad n = \frac{(a_1p + \dots)^6}{(a_1p + \dots)^3 (c_1p + \dots)^2 (\gamma_1p + \dots)},$$

$$n = \frac{(a_1p + \dots)^5 (b_1p + \dots)}{(a_1p + \dots)^5 (c_1p + \dots)}, \quad n = \frac{(a_1p + \dots)^5 (b_1p + \dots)}{(a_1p + \dots)^4 (c_1p + \dots)^2}, \text{ \&c.}$$

Les intégrales de l'équation $\dot{x} + \frac{A_1p^3 + A_2p^2x + A_3p^2y + \dots}{B_1p^3 + B_2p^2x + B_3p^2y + \dots} \dot{y} = 0$,

$$\frac{A_4px^2 + A_5pxy + A_6py^2 + A_7x^3 + A_8x^2y + A_9xy^2 + A_{10}y^3}{B_4px^2 + B_5pxy + B_6py^2 + B_7x^3 + B_8x^2y + B_9xy^2 + B_{10}y^3} \dot{y} = 0,$$

sont $n = \frac{a_1p^3 + \dots}{p(a_1p + \dots)^2}$, $n = \frac{a_1p^3 + \dots}{p^2(a_1p + \dots)}$, $n = \frac{(a_1p + \dots)^2 (b_1p + \dots)}{p(a_1p^2 + \dots)}$,

$$n = \frac{a_1p^4 + \dots}{p^4}, \quad n = \frac{(a_1p^2 + \dots)^2}{p(a_1p + \dots)^2 (c_1p + \dots)}, \quad n = \frac{(a_1p^2 + \dots)^2}{p^2(a_1p^2 + \dots)},$$

$$n = \frac{(a_1p^2 + \dots)(b_1p + \dots)^2}{p(a_1p + \dots)^3}, \quad n = \frac{(a_1p^2 + \dots)(b_1p + \dots)^2}{p^2(a_1p + \dots)^2},$$

$$n = \frac{(a_1p^2 + \dots)(b_1p + \dots)^2}{p^3(a_1p + \dots)}, \quad n = \frac{(a_1p + \dots)^4}{p(a_1p^3 + \dots)},$$

$$n = \frac{(a_1p + \dots)^3 (b_1p + \dots)}{p(a_1p + \dots)^2 (c_1p + \dots)}, \quad n = \frac{(a_1p + \dots)^3 (b_1p + \dots)}{p^2(a_1p^2 + \dots)},$$

$$n = \frac{(a_1p^3+)\,(b_1p+)^2}{p^5},\quad n = \frac{(a_1p^2+)^2\,(b_1p+)}{p\,(a_1p+)^4},$$

$$n = \frac{(a_1p^2+)^2\,(b_1p+)}{p^2\,(a_1p+)^3},\quad n = \frac{(a_1p^2+)^2\,(b_1p+)}{p^3\,(a_1p+)^2},$$

$$n = \frac{(a_1p^2+)^2\,(b_1p+)}{p^4\,(a_1p+)},\quad n = \frac{(a_1p^2+)\,(b_1p+)^3}{p\,(a_1p+)^4},$$

$$n = \frac{(a_1p^2+)\,(b_1p+)^3}{p^2\,(a_1p+)^3},\quad n = \frac{(a_1p^2+)\,(b_1p+)^3}{p^3\,(a_1p+)^2},$$

$$n = \frac{(a_1p^2+)\,(b_1p+)^3}{p^4\,(a_1p+)},\quad n = \frac{(a_1p+)^5}{p\,(a_1p^2+)\,(C_1p+)^2},$$

$$n = \frac{(a_1p+)^5}{p^2\,(a_1p^2+)},\quad n = \frac{(a_1p+)^4\,(b_1p+)}{p\,(a_1p^2+)^2},$$

$$n = \frac{(a_1p+)^4\,(b_1p+)}{p\,(a_1p+)^3\,(C_1p+)},\quad n = \frac{(a_1p+)^4\,(b_1p+)}{p^2\,(a_1p+)^2\,(C_1p+)},$$

$$n = \frac{(a_1p+)^4\,(b_1p+)}{p^3\,(a_1p^2+)},\quad n = \frac{(a_1p+)^3\,(b_1p+)^2}{p\,(a_1p^2+)^2},$$

$$n = \frac{(a_1p+)^3\,(b_1p+)^2}{p\,(a_1p+)^3\,(C_1p+)},\quad n = \frac{(a_1p+)^3\,(b_1p+)^2}{p^2\,(a_1p+)^2\,(C_1p+)},$$

$$n = \frac{(a_1p+)^3\,(b_1p+)^2}{p^3\,(a_1p^2+)},\ \&c.$$

Les intégrales de l'équation $\dot{x} + \frac{A_1p^4 + A_2p^3x + A_3p^2y + \dots}{B_1p^4 + B_2p^3x + B_3p^2y + \dots} \dot{y} = 0$, sont

$$n = \frac{a_1p^3+}{(a_1p+)^2\,(C_1p+)},\quad n = \frac{a_1p^4+}{(a_1p+)^4},\quad n = \frac{(a_1p^2+)^2}{(a_1p^2+)\,(C_1p+)^2},$$

$$n = \frac{(a_1p^2+)\,(b_1p+)^2}{(a_1p+)^3\,(C_1p+)},\quad n = \frac{(a_1p^3+)\,(b_1p+)^2}{(a_1p+)^5},$$

$$n = \frac{(a_1p^2+)^2\,(b_1p+)}{(a_1p+)^4\,(C_1p+)},\quad n = \frac{(a_1p^2+)^2\,(b_1p+)}{(a_1p+)^3\,(C_1p+)^2},$$

$$n = \frac{(a_1p^2+)\,(b_1p+)^3}{(a_1p+)^4\,(C_1p+)},\quad n = \frac{(a_1p^2+)\,(b_1p+)^3}{(a_1p+)^3\,(C_1p+)^2},\ \&c.$$

Les intégrales de l'équation $\dot{x} + \frac{A1p^4 + A2p^3x + A3p^3y + B1p^4 + B2p^3x + B3p^3y +}{A4p^2x^2 + A5p^2xy + A6p^2y^2 + A7px^3 + A8px^2y + A9pxy^2 + B4p^2x^2 + B5p^2xy + B6p^2y^2 + B7px^3 + B8px^2y + B9pxy^2 +} \frac{A10y^3 + A11x^4 + A12x^3y + A13x^2y^2 + A14xy^3 + A15y^4}{B10y^3 + B11x^4 + B12x^3y + B13x^2y^2 + B14xy^3 + B15y^4} \dot{y} = 0$,

sont $n = \frac{a1p^3 +}{p(a1p^2 +)^2}$, $n = \frac{a1p^4 +}{p(a1p +)^3}$, $n = \frac{a1p^4 +}{p^2(a1p +)^2}$,

$n = \frac{a1p^4 +}{p^3(a1p +)}$, $n = \frac{(a1p^2 +)^2}{p(a1p^3 +)}$, $n = \frac{(a1p^2 +)(b1p +)^2}{p(a1p +)^2(C1p +)}$,

$n = \frac{(a1p^2 +)(b1p +)^2}{p^2(a1p^2 +)}$, $n = \frac{(a1p +)^3(b1p +)}{p(a1p^3 +)}$,

$n = \frac{a1p^5 +}{p^5}$, $n = \frac{(a1p^3 +)(b1p +)^2}{p(a1p +)^4}$, $n = \frac{(a1p^3 +)(b1p +)^2}{p^2(a1p +)^3}$,

$n = \frac{(a1p^3 +)(b1p +)^2}{p^3(a1p +)^2}$, $n = \frac{(a1p^3 +)(b1p +)^2}{p^4(a1p +)}$,

$n = \frac{(a1p^2 +)^2(b1p +)}{p(a1p^2 +)^2}$, $n = \frac{(a1p^2 +)^2(b1p +)}{p(a1p +)^3(C1p +)}$,

$n = \frac{(a1p^2 +)^2(b1p +)}{p^2(a1p +)^2(C1p +)}$, $n = \frac{(a1p^2 +)^2(b1p +)}{p^3(a1p^2 +)}$,

$n = \frac{(a1p^2 +)(b1p +)^3}{p(a1p^2 +)^2}$, $n = \frac{(a1p^2 +)(b1p +)^3}{p(a1p +)^3(C1p +)}$,

$n = \frac{(a1p^2 +)(b1p +)^3}{p^2(a1p +)^2(C1p +)}$, $n = \frac{(a1p^2 +)(b1p +)^3}{p^3(a1p^2 +)}$,

$n = \frac{(a1p +)^5}{p(a1p^2 +)}$, $n = \frac{(a1p +)^4(b1p +)}{p(a1p^2 +)(C1p +)^2}$,

$n = \frac{(a1p +)^4(b1p +)}{p^2(a1p^2 +)}$, $n = \frac{(a1p +)^3(b1p +)^2}{p(a1p^2 +)(C1p +)^2}$,

$n = \frac{(a1p +)^3(b1p +)^2}{p^2(a1p^2 +)}$, &c.

Les intégrales de l'équation $\dot{x} + \frac{A1p^5 + \ldots + A16x^5 + B1p^5 + \ldots - A16x^4y - A17x^4y + A18x^3y^2 + A19x^2y^3 + A20xy^4 \cdot}{A17x^4y - A18x^2y^3 - A19xy^4 - A20y^5} \dot{y} = 0$, sont

$n = \frac{a1p^1 +}{a1p^3 +}$, $n = \frac{a1p^4 +}{(a1p^2 +)^2}$, $n = \frac{a1p^4 +}{(a1p +)^3 (C1p +)}$,

$n = \frac{(a1p^2 +)\,(b1p +)^2}{(a1p^2 +)\,(C1p +)^2}$, $n = \frac{a1p^5 +}{(a1p +)^5}$,

$n = \frac{(a1p^3 +)\,(b1p +)^2}{(a1p +)^4\,(C1p +)}$, $n = \frac{(a1p^1 +)\,(b1p +)^2}{(a1p +)^1\,(C1p +)^2}$,

$v = \frac{(a1p^2 +)^2\,(b1p +)}{(a1p^2 +)^3\,(C1p +)}$, $n = \frac{(a1p^2 +)^2\,(b1p +)}{(a1p^2 +)\,(C1p +)^3}$,

$v = \frac{(a1p^2 +)\,(b1p +)^3}{(a1p^2 +)\,(C1p +)^1}$, &c.

Les intégrales de l'équation $\dot{x} + \frac{A1p^5 + \ldots + A16x^5 +}{B1p^5 + \ldots + B16x^5 +}$

$\frac{A17x^4y + A18x^3y^2 + A19x^2y^3 + A20xy^4 + A21y^5}{B17x^4y + B18x^3y^2 + B19x^2y^3 + B20xy^4 + B21y^5}\,\dot{y} = 0$,

sont $n = \frac{a1p^4 +}{p(a1p +)^2(C1p +)}$, $n = \frac{a1p^4 +}{p^2(a1p^2 +)}$,

$n = \frac{(a1p^2 +)\,(b1p +)^2}{p(a1p^3 +)}$, $n = \frac{a1p^5 +}{p(a1p +)^4}$, $n = \frac{a1p^5 +}{p^2(a1p +)^3}$,

$n = \frac{a1p^5 +}{p^1(a1p +)^2}$, $n = \frac{a1p^5 +}{p^4(a1p +)}$, $n = \frac{(a1p^2 +)(b1p +)^2}{p(a1p^2 +)^2}$,

$n = \frac{(a1p^3 +)\,(b1p +)^2}{p(a1p +)^3\,(C1p +)}$, $n = \frac{(a1p^3 +)\,(b1p +)^2}{p^2(a1p +)^2\,(C1p +)}$,

$n = \frac{(a1p^3 +)\,(b1p +)^2}{p^3(a1p^2 +)}$, $n = \frac{(a1p^2 +)^2\,(b1p +)}{p(a1p^2 +)\,(C1p +)^2}$,

$n = \frac{(a1p^2 +)^2\,(b1p +)}{p^2(a1p^3 +)}$, $n = \frac{(a1p^2 +)\,(b1p +)^3}{p(a1p^2 +)\,(C1p +)^2}$,

$n = \frac{(a1p^2 +)\,(b1p +)^1}{p^2(a1p^3 +)}$, $n = \frac{(a1p +)^4\,(b1p +)}{p(a1p^4 +)}$,

$n = \frac{(a1p +)^1\,(b1p +)^2}{p(a1p^4 +)}$, &c.

Les intégrales de l'équation $\dot{x} + \frac{A1p^6 + \ldots + A22x^6 +}{B1p^6 + \ldots - A22x^5y -}$

$\frac{A23x^5y + A24x^4y^2 + A25x^3y^3 + A26x^2y^4 + A27xy^5}{A23x^4y^2 - A24x^3y^3 - A25x^2y^4 - A26xy^5 - A27y^6}\,\dot{y} = 0$,

sont $n = \frac{a_1 p^4 + \ldots}{(\alpha_1 p^2 + \ldots)(\zeta_1 p + \ldots)^2}$, $n = \frac{a_1 p^5 + \ldots}{(\alpha_1 p + \ldots)^4 (\zeta_1 p + \ldots)}$,

$n = \frac{a_1 p^5 + \ldots}{(\alpha_1 p + \ldots)^3 (\zeta_1 p + \ldots)^2}$, $n = \frac{(a_1 p^3 + \ldots)(b_1 p + \ldots)^2}{(\alpha_1 p^2 + \ldots)^2 (\zeta_1 p + \ldots)}$,

$n = \frac{(a_1 p^3 + \ldots)(b_1 p + \ldots)^2}{(\alpha_1 p^2 + \ldots)(\zeta_1 p + \ldots)^3}$, &c.

Les intégrales de l'équation $\dot{x} + \frac{A_1 p^6 + \ldots + A_{22} x^6 + A_{23} x^5 y + A_{24} x^4 y^2 + A_{25} x^3 y^3 + A_{26} x^2 y^4 + A_{27} x y^5 + A_{28} y^6}{B_1 p^6 + \ldots + B_{22} x^6 + B_{23} x^5 y + B_{24} x^4 y^2 + B_{25} x^3 y^3 + B_{26} x^2 y^4 + B_{27} x y^5 + B_{28} y^6} \dot{y} = 0$, sont $n = \frac{a_1 p^4 + \ldots}{p(\alpha_1 p^3 + \ldots)}$, $n = \frac{a_1 p^5 + \ldots}{p(\alpha_1 p^2 + \ldots)^2}$,

$n = \frac{a_1 p^5 + \ldots}{p(\alpha_1 p + \ldots)^3 (\zeta_1 p + \ldots)}$, $n = \frac{a_1 p^5 + \ldots}{p^2 (\alpha_1 p + \ldots)^2 (\zeta_1 p + \ldots)}$,

$n = \frac{a_1 p^5 + \ldots}{p^3 (\alpha_1 p^2 + \ldots)}$, $n = \frac{(a_1 p^3 + \ldots)(b_1 p + \ldots)^2}{p(\alpha_1 p^2 + \ldots)(\zeta_1 p + \ldots)^2}$,

$n = \frac{(a_1 p^3 + \ldots)(b_1 p + \ldots)^2}{p^2 (\alpha_1 p^3 + \ldots)}$, $n = \frac{(a_1 p^2 + \ldots)^2 (b_1 p + \ldots)}{p(\alpha_1 p^4 + \ldots)}$,

$n = \frac{(a_1 p^2 + \ldots)(b_1 p + \ldots)^2}{p(\alpha_1 p^4 + \ldots)}$, &c.

Les intégrales de l'équation $\dot{x} + \frac{A_1 p^7 + \ldots + A_{29} x^7 + A_{30} x^6 y + A_{31} x^5 y^2 + A_{32} x^4 y^3 + A_{33} x^3 y^4 + A_{34} x^2 y^5 + A_{35} x y^6 + A_{36} y^7}{B_1 p^7 + \ldots + B_{29} x^7 + B_{30} x^6 y + B_{31} x^5 y^2 + B_{32} x^4 y^3 + B_{33} x^3 y^4 + B_{34} x^2 y^5 + B_{35} x y^6 + B_{36} y^7} \dot{y} = 0$, sont $n = \frac{a_1 p^4 + \ldots}{\alpha_1 p^4 + \ldots}$,

$n = \frac{a_1 p^5 + \ldots}{(\alpha_1 p^2 + \ldots)^2 (\zeta_1 p + \ldots)}$, $n = \frac{a_1 p^5 + \ldots}{(\alpha_1 p^2 + \ldots)(\zeta_1 p + \ldots)^3}$,

$n = \frac{(a_1 p^3 + \ldots)(b_1 p + \ldots)^2}{(\alpha_1 p^3 + \ldots)(\zeta_1 p + \ldots)^2}$, &c.

Les intégrales de l'équation $\dot{x} + \frac{A_1 p^7 + \ldots + A_{29} x^7 + A_{30} x^6 y + A_{31} x^5 y^2 + A_{32} x^4 y^3 + A_{33} x^3 y^4 + A_{34} x^2 y^5 + \ldots}{B_1 p^7 + \ldots + B_{29} x^7 + B_{30} x^6 y + B_{31} x^5 y^2 + B_{32} x^4 y^3 + B_{33} x^3 y^4 + B_{34} x^2 y^5 + \ldots}$

$\frac{A35xy^6 + A36y^7}{B35xy^6 + B36y^7}\dot{y} = 0$, font $n = \frac{a1p^5 +}{p(\alpha 1p^2 +)(\beta 1p +)^2}$,

$n = \frac{(a1p^3 +)(b1p +)^2}{p(\alpha 1p^4 +)}$, &c.

Les intégrales de l'éqnation $\dot{x} + \frac{A1p^8 + \ldots + A37x^8 +}{B1p^8 + \ldots - A37x^7y -}$

$\frac{A38x^7y + A39x^6y^2 + A40x^5y^3 + A41x^4y^4 + A42x^3y^5 + A43x^2y^6 +}{A38x^6y^2 - A39x^5y^3 - A40x^4y^4 - A41x^3y^5 - A42x^2y^6 - A43xy^7 -}$

$\frac{A44xy^7}{A44y^8}\dot{y} = 0$, font $n = \frac{a1p^5 +}{(\alpha 1p^3 +)(\beta 1p +)^2}$, &c.

Les intégrales de l'équation $\dot{x} + \frac{A1p^8 + \ldots + }{B1p^8 + \ldots + }$

$\frac{A37x^8 + A38x^7y + A39x^6y^2 + A40x^5y^3 + A41x^4y^4 +}{B37x^8 + B38x^7y + B39x^6y^2 + B40x^5y^3 + B41x^4y^4 +}$

$\frac{A42x^3y^5 + A43x^2y^6 + A44xy^7 + A45y^8}{B42x^3y^5 + B43x^2y^6 + B45xy^7 + B45y^8}\dot{y} = 0$, font

$n = \frac{a1p^5 +}{p(\alpha 1p^4 +)}$, &c.

Les intégrales de l'équation $\dot{x} + \frac{A1p^9 + \ldots + A46x^9}{B1p^9 + \ldots - A46x^8y}$,

font $n = \frac{a1p^5 +}{\alpha 1p^5 +}$, &c.

APPLICATION DE CETTE MÉTHODE aux équations différencielles affectées de radicaux.

EXEMPLE.

Soit $\dot{x} + \frac{-2x\sqrt{(px-p^2)}}{p^2+y^2}\dot{y} = 0$; l'équation que l'on propose d'intégrer.

Je fais $\sqrt{(px-p^2)} = z$; donc $z^2 = px - p^2$, $\frac{\dot{z}}{\dot{y}} = 0$, $\frac{\dot{z}}{\dot{x}} = \frac{p}{2z}$; l'équation à intégrer sera

$\dot{x} + \frac{-2xz}{p^2+y^2}\dot{y} = 0$.

Soit $n = \frac{a1p + a2x + a3y + a4z}{a1p + a2x + a3y + a4z}$; en différenciant, on aura l'équation $\dot{x} + \frac{(a1p + a2x + a3y + a4z)\,a3 - (a1p + a2x + a3y + a4z)\,(a2 + a4\frac{p}{2z}) - (a1p + a2x + a3y + a4z)\,a3}{(a1p + a2x + a3y + a4z)\,(a2 + a4\frac{p}{2z})}\dot{y} = 0$,

ou $\dot{x} + \frac{-(a1p + a2x + a3y + a4z)\,2a3z - (a1p + a2x + a3y + a4z)\,(2a2z + a4p) - (a1p + a2x + a3y + a4z)\,2a3z}{(a1p + a2x + a3y + a4z)\,(2a1z + a4p)}\dot{y} = 0$, ou

$\dot{x} + \frac{2a'3p^2 - 2a'3px + 2a'1pz + 2a'2xz + a'1p^2 - a'2px + a'3py + 2a'1pz - 2a'2yz}{+ 2a'2}\dot{y} = 0$,

qui en supposant la condition $a'1\,a'2 - a'1\,a'2 + a'1\,a'3 = 0$, est la formule de toutes les équations aux premières différences, dont l'intégrale est

$n = \frac{a1p + a2x + a3y + a4z}{a1p + a2x + a3y + a4z}$; & comme cette formule ne renferme pas l'équation proposée, il s'ensuit que son

intégrale ne renferme pas non plus celle de notre équation.

Soit $n = \frac{a1p^2 + a2px + a3py + a4pz + a5x^2 + a6xy + a7xz}{a1p^2 + a2px + a3py + a4pz + a5x^2 + a6xy + a7xz}$

$+ a8y^2 + a9yz$
$+ a8y^2 + a9yz$, en différenciant on aura l'équation

$$\begin{array}{l}
\dot{x} + \\
\hline
\begin{array}{llllll}
+ a^3 1 p^4 & - a^2 2 p^3 x & - a^1 3 p^3 y & - 2a^3 4 p^3 z & + 3a^1 4 p^2 x^2 & \\
- 2a^2 1 & + 3a^2 1 & - 2a^2 3 & + 2a^1 1 & + 2a^2 5 & \\
+ 2a^2 2 & - 4a^1 4 & + a^2 1 & & + a^5 2 & \\
 & & + 2a^1 2 & & & \\
 & & - 2a^1 4 & & &
\end{array} \\
\hline
\begin{array}{llllll}
+ 4a^4 4 p^2 xy & - 2a^2 7 p^2 xz & + 2a^1 8 p^2 y^2 & + 4a^1 1 p^2 yz & + 2a^4 5 px^2 & \\
- 4a^1 7 & + 2a^3 1 & & & - 2a^1 6 & \\
 & + 2a^1 2 & & & & \\
 & + 2a^2 1 & & & &
\end{array} \\
\hline
\begin{array}{llllll}
+ a^2 1 p^2 xy & + 2a^3 4 p^2 xz & - a^2 1 p^2 y^2 & + 2a^2 7 p^2 yz & - 2a^2 5 px^2 & \\
+ 3a^2 3 & + 4a^2 1 & + 2a^2 7 & - 2a^1 2 & & \\
- a^2 2 & & + a^2 3 & + 2a^2 1 & & \\
+ 4a^4 5 & & + a^2 6 & & &
\end{array} \\
\hline
\begin{array}{llllll}
+ 4a^1 7 px^2 y & - 2a^2 7 px^2 z & - 2a^1 8 pxy^2 & - 4a^6 2 pxyz & + 2a^5 3 py^2 z & \\
 & - 2a^2 3 & & & & \\
 & + 2a^2 2 & & & &
\end{array} \\
\hline
\begin{array}{llllll}
+ a^1 6 px^2 y & + 2a^3 2 px^2 z & - 3a^1 7 pxy^2 & - 2a^2 7 pxyz & + a^1 8 py^3 & \\
- 3a^4 5 & & - a^2 6 & + 4a^2 3 & &
\end{array} \\
\hline
\begin{array}{llllll}
+ 2a^1 5 x^3 z & + 4a^3 5 x^2 yz & + 2a^2 6 xy^2 z & & & \\
- 2a^1 2 py^2 z & - 2a^1 5 x^2 yz & - 4a^2 5 xy^2 z & - 2a^2 6 y^3 z & & \\
+ 2a^1 3 & & & & &
\end{array}
\end{array} \dot{y} = 0$$, qui

en supposant les cent vingt-six conditions du Lemme, sera la formule de toutes les équations dont l'intégrale est

$n = \frac{a1p^2 +}{a1p^2 +}$.

Pour pouvoir rapporter notre équation à cette formule, il faut la multiplier par $c1p^2 + c2px - c3py + c4pz + c5x^2 + c6xy + c7xz + c8y^2 + c9yz$,

on

on aura $\dot{x} + \frac{2c4p^3x - 2c4p^2x^2 + 2c9p^2xy - + 2c7}{c1p^4 + c2p^3x + c3p^3y + c4p^3z + c5p^2x^2 + c6p^2xy +}$

$\frac{2c1p^2xz - 2c7px^2 - 2c9px^2y - 2c2px^2z - 2c3pxyz - 2c5x^2z -}{c7p^2xz + c8p^2y^2 + c9p^2yz + c2pxy^2 + c3py^2 + c4ly^2z + c5x^2y^2 + + c1}$

$\frac{2c6x^2yz - 2c8xy^2z}{c6xy^3 + c7xy^2z + c8y^4 + c9y^3z} \dot{y} = 0$; & en comparant, on aura

$-2a^81 + 2a^73 = 0,$
$-2a^72 + 2a^81 - 2a^73 + 2a^74 = 2c4,$
$-2a^45 + 2a^72 - 2a^43 + 2a^24 + 2a^26 = -2c4 + 2c7,$
$2a^45 - 2a^26 = -2c7,$
$-a^13 - 2a^43 + a^81 + 2a^72 - 2a^24 = c3,$
$a^24 + 3a^43 - a^72 + 4a^45 = c6,$
$a^26 - 3a^45 = 0.$

$-4a^44 = 0,$
$4a^44 - 4a^17 = 2c9,$
$4a^17 = -2c9,$
$a^44 + 2a^17 + a^63 + 2a^36 = c8 + c1.$

$-2a^14 + 2a^21 = 0,$
$-2a^27 + 2a^14 + 2a^12 + 2a^11 = -2c1,$
$2a^27 - 2a^23 + 2a^12 = -2c2,$
$2a^27 - 2a^12 + 2a^11 = c9,$
$-2a^27 + 4a^23 = 0.$

$2a^18 = 0,$
$-2a^18 = 0,$
$a^18 = c3. \quad 4a^71 = 0.$

$4a^62 = -2c3,$
$-2a^62 + 2a^33 = c4. \quad 2a^13 = 0.$

$$2a^{1}5 = -2c5,$$
$$-2a^{1}5 = 0.$$

$$4a^{3}5 = -2c6,$$
$$-4a^{3}5 = c7.$$

$$2a^{2}6 = -2c8,$$
$$-2a^{2}6 = c9.$$

$$a^{3}1 - 2a^{6}1 + 2a^{2}2 = c1,$$
$$-a^{2}2 + 3a^{6}1 - 4a^{1}4 = c2,$$
$$3a^{1}4 + 2a^{2}5 + a^{1}2 = c5,$$
$$-2a^{2}5 = 0.$$

$$-2a^{3}4 + 2a^{1}1 = c4,$$
$$2a^{3}4 + 4a^{4}1 = c7.$$

$$2a^{3}2 = 0. \quad c5 = 0. \quad c6 = 0. \quad c8 = 0.$$

donc 1.° $c3 = 0$, $c5 = 0$, $c6 = 0$, $c7 = 0$, $c8 = 0$, $c9 = 0$.

2.° $a^{7}1 = 0$,
$a^{3}2 = 0$, $a^{6}2 = 0$, $a^{7}2 = -\frac{1}{2}c4$,
$a^{3}3 = \frac{1}{2}c4$, $a^{4}3 = 0$, $a^{1}3 = 0$,
$a^{2}4 = -\frac{1}{2}c4$, $a^{4}4 = 0$.
$a^{1}5 = 0$, $a^{2}5 = 0$, $a^{3}5 = 0$, $a^{4}5 = 0$,
$a^{1}6 = 0$, $a^{2}6 = 0$.
$a^{1}7 = 0$,
$a^{1}8 = 0$.

3.° $a^{8}1 - a^{1}3 = 0$.

$a^{6}3 + 2a^{3}6 = c1$.

$$a^{8}1 - a^{5}4 = 0,$$
$$-a^{2}7 + a^{5}4 + a^{1}2 + a^{5}1 = -c1,$$
$$a^{2}7 - a^{2}3 + a^{4}2 = -c2,$$
$$a^{2}7 - a^{1}2 + a^{5}1 = 0,$$
$$2a^{2}3 - a^{2}7 = 0.$$

$$a^{3}1 - 2a^{6}1 + 2a^{2}2 = c1,$$
$$-a^{2}2 + 3a^{6}1 - 4a^{1}4 = c2.$$
$$3a^{1}4 + a^{3}2 = 0.$$

$$a^{1}1 - a^{3}4 = \tfrac{1}{2}c4,$$
$$2a^{4}1 + a^{3}4 = 0.$$

En substituant pour $a^{7}1$, $a^{3}2$, $a^{6}2$, $a^{7}2$, $a^{3}3$, $a^{4}3$, $a^{5}3$, $a^{2}4$, $a^{4}4$, $a^{1}5$, $a^{2}5$, $a^{3}5$, $a^{4}5$, $a^{1}6$, $a^{2}6$, $a^{1}7$, $a^{1}8$, leurs valeurs dans les cent vingt-six conditions de la formule, on aura $a^{3}1a^{1}2 - a^{2}1a^{2}2 + a^{1}1a^{1}3 = 0$, $a^{4}1a^{1}2 + a^{1}1a^{2}3 = 0$, $a^{4}1a^{2}2 + a^{1}1a^{1}4 = 0$, $a^{4}1a^{1}3 - a^{3}1a^{2}3 + a^{2}1a^{1}4 = 0$, $-a^{2}2a^{2}3 + a^{1}2a^{1}4 = 0$, $a^{5}1a^{1}2 - a^{2}1a^{4}2 + \frac{1}{2}c4a^{1}1 = 0$, $a^{5}1a^{2}2 - a^{3}1a^{4}2 - \frac{1}{2}c4a^{1}1 = 0$, $a^{5}1a^{1}3 - \frac{1}{2}c4a^{3}1 - \frac{1}{2}c4a^{5}1 = 0$, $a^{4}2a^{1}3 - \frac{1}{2}c4a^{2}2 - \frac{1}{2}c4a^{1}2 = 0$, $-a^{4}1a^{4}2 = 0$, $a^{5}1a^{2}3 - \frac{1}{2}c4a^{4}1 = 0$, $a^{4}2a^{2}3 = 0$, $a^{5}1a^{1}4 - \frac{1}{2}c4a^{4}1 = 0$, $a^{4}2a^{1}4 = 0$, $\frac{1}{2}c4a^{1}4 + \frac{1}{2}c4a^{3}3 = 0$, $a^{6}1a^{1}2 - a^{2}1a^{5}2 = 0$, $a^{6}1a^{2}2 - a^{3}1a^{5}2 + a^{1}1a^{3}4 = 0$, $a^{6}1a^{1}3 + a^{2}1a^{3}4 = 0$, $a^{5}2a^{1}3 + a^{1}2a^{3}4 = 0$, $-a^{4}1a^{5}2 = 0$, $a^{6}1a^{2}3 = 0$, $a^{5}2a^{2}3 = 0$, $a^{6}1a^{1}4 - a^{4}1a^{3}4 = 0$, $a^{5}2a^{1}4 = 0$, $-a^{2}3a^{3}4 = 0$, $a^{6}1a^{4}2 - a^{5}1a^{5}2 = 0$, $\frac{1}{2}c4a^{6}1 = 0$, $\frac{1}{2}c4a^{1}2 = 0$, $-\frac{1}{2}c4a^{6}1 - a^{5}1a^{3}4 = 0$, $-\frac{1}{2}c4a^{1}2 = 0$, $-\frac{1}{2}c4a^{3}4 = 0$, $a^{8}1a^{1}2 +$

$\frac{1}{2}c4a^{2}1 + a^{1}1a^{6}3 = 0$, $a^{8}1a^{2}2 + \frac{1}{2}c4a^{3}1 + a^{1}1a^{5}4 = 0$, $a^{8}1a^{1}3 - a^{3}1a^{6}3 + a^{2}1a^{5}4 = 0$, $-\frac{1}{2}c4a^{1}3 - a^{2}2a^{6}3 + a^{1}2a^{5}4 = 0$, $\frac{1}{2}c4a^{4}1 = 0$, $a^{8}1a^{2}3 - a^{4}1a^{6}3 = 0$, $-\frac{1}{2}c4a^{2}3 = 0$, $a^{8}1a^{1}4 - a^{4}1a^{5}4 = 0$, $-\frac{1}{2}c4a^{1}4 = 0$, $a^{6}3a^{1}4 - a^{2}3a^{5}4 = 0$, $a^{8}1a^{4}2 + \frac{1}{2}c4a^{5}1 + a^{1}1a^{3}6 = 0$, $\frac{1}{2}c4a^{8}1 - a^{5}1a^{6}3 + a^{2}1a^{3}6 = 0$, $-\frac{1}{4}(c4)^{2} - a^{4}2a^{6}3 + a^{1}2a^{3}6 = 0$, $-\frac{1}{4}c4a^{8}1 - a^{5}1a^{5}4 + a^{3}1a^{3}6 = 0$; $\frac{1}{4}(c4)^{2} - a^{4}2a^{5}4 + a^{2}2a^{3}6 = 0$, $-\frac{1}{2}c4a^{6}3 - \frac{1}{2}c4a^{5}4 + a^{1}3a^{3}6 = 0$, $a^{4}1a^{3}6 = 0$, $a^{2}3a^{3}6 = 0$, $a^{1}4a^{3}6 = 0$, $a^{8}1a^{5}2 + \frac{1}{2}c4a^{6}1 + a^{1}1a^{2}7 = 0$, $-a^{6}1a^{6}3 + a^{2}1a^{2}7 = 0$, $-a^{5}2a^{6}3 + a^{1}2a^{2}7 = 0$, $a^{8}1a^{3}4 - a^{6}1a^{5}4 + a^{3}1a^{2}7 = 0$, $-\frac{1}{2}c4a^{3}4 - a^{5}2a^{5}4 + a^{2}2a^{2}7 = 0$, $a^{6}3a^{3}4 + a^{1}3a^{2}7 = 0$, $a^{4}1a^{2}7 = 0$, $a^{2}3a^{2}7 = 0$, $a^{1}4a^{2}7 = 0$, $-a^{6}1a^{3}6 + a^{5}1a^{2}7 = 0$, $-a^{1}2a^{3}6 + a^{4}2a^{2}7 = 0$, $\frac{1}{2}c4a^{2}7 = 0$, $-a^{3}4a^{3}6 - \frac{1}{2}c4a^{2}7 = 0$.

Ou $c4$ eſt $= 0$, ou $c4$ n'eſt pas $= 0$. Je ſuppoſe premièrement que $c4$ n'eſt pas $= 0$; dans ce cas, je puis donner à $c4$ telle valeur que je voudrai. Soit $c4 = 1$, j'aurai $a^{6}1 = 0$, $a^{5}2 = 0$, $a^{3}4 = 0$, $a^{4}1 = 0$, $a^{2}3 = 0$, $a^{1}4 = 0$, $a^{2}7 = 0$; & en ſubſtituant dans les équations (3.°), nous aurons $a^{4}2 = -c2$, $a^{2}2 = -c2$, $a^{3}1 = c1 + 2c2$, $a^{1}1 = \frac{1}{2}$.

Donc 1.° $c3 = 0$, $c4 = 1$, $c5 = 0$, $c6 = 0$, $c7 = 0$ $c8 = 0$, $c9 = 0$.

2.° $a^1 1 = \frac{1}{2}$, $a^3 1 = c1 + 2c2$, $a^4 1 = 0$,
$a^2 2 = -c2$, $a^3 2 = 0$, $a^4 2 = -c2$,
$a^2 3 = 0$, $a^3 3 = \frac{1}{2}$, $a^4 3 = 0$,
$a^1 4 = 0$, $a^2 4 = -\frac{1}{2}$, $a^3 4 = 0$,
$a^1 5 = 0$, $a^2 5 = 0$, $a^3 5 = 0$,
$a^1 6 = 0$, $a^2 6 = 0$,
$a^1 7 = 0$, $a^2 7 = 0$,
$a^1 8 = 0$.

$a^6 1 = 0$, $a^7 1 = 0$,
$a^5 2 = 0$, $a^6 2 = 0$, $a^7 2 = -\frac{1}{2}$,
$a^5 3 = 0$,
$a^4 4 = 0$,
$a^4 5 = 0$,

3.° $a^8 1 - a^1 3 = 0$, $a^6 3 + 2a^3 6 = c1$,
$a^2 1 - a^5 4 = 0$,
$a^5 4 + a^1 2 + a^5 1 = -c1$,
$-a^1 2 + a^5 1 = 0$.

4.° $(c1 + 2c2)a^1 2 + c2a^2 1 + \frac{1}{2}a^1 3 = 0$,
$a^5 1 a^1 2 + c2 a^2 1 + \frac{1}{4} = 0$,
$-c2a^5 1 + c2.(c1 + 2c2) - \frac{1}{4} = 0$,
$a^5 1 a^1 3 - \frac{1}{2}.(c1 + 2c2) - \frac{1}{2}a^2 1 = 0$,
$-c2a^1 3 + \frac{1}{2}c2 - \frac{1}{2}a^1 2 = 0$,
$a^8 1 a^1 2 + \frac{1}{2}a^2 1 - \frac{1}{2}a^6 3 = 0$,
$-c2a^8 1 + \frac{1}{2}.(c1 + 2c2) + \frac{1}{2}a^5 4 = 0$,
$a^8 1 a^1 3 - (c1 + 2c2)a^6 3 + a^2 1 a^5 4 = 0$,
$-\frac{1}{2}a^1 3 + c2a^6 3 + a^1 2 a^5 4 = 0$,
$-c2a^8 1 + \frac{1}{2}a^5 1 + \frac{1}{2}a^3 6 = 0$,
$\frac{1}{2}a^8 1 - a^1 1 a^6 3 + a^2 1 a^3 6 = 0$,

$$-\tfrac{1}{4} + c2\,a^6 3 + a^1 2\,a^3 6 = 0,$$
$$-\tfrac{1}{2}a^8 1 - a^5 1\,a^5 4 + (c1 + 2c2)\,a^3 6 = 0,$$
$$\tfrac{1}{4} + c2\,a^5 4 - c2\,a^3 6 = 0,$$
$$-\tfrac{1}{2}a^6 3 - \tfrac{1}{2}a^5 4 + a^1 3\,a^3 6 = 0.$$

Au moyen de la troisième des équations (4.°), on aura $a^5 1 = \frac{4c1\,c2 + 8(c2)^2 - 1}{4c2}$; & en substituant dans les équations (3.°), on aura $a^1 2 = \frac{4c1\,c2 + 8(c2)^2 - 1}{4c2}$, $a^5 4 = \frac{-6c1\,c2 - 8(c2)^2 + 1}{2c2}$, $a^2 1 = \frac{-6c1\,c2 - 8(c2)^2 + 1}{2c2}$.

Au moyen de la première des équations (4.°), on aura $a^1 3 = \frac{-4(c1)^2 c2 - 4c1(c2)^2 + c1}{2c2}$; & en substituant dans les équations (3.°), on aura $a^8 1 = \frac{-4(c1)^2 c2 - 4c1(c2)^2 + c1}{2c2}$.

Au moyen de la quatorzième des équations (4.°), on aura $a^3 6 = \frac{3 + 12c1\,c2 + 16(c2)^2}{4c2}$; & en substituant dans les équations (3.°), on aura $a^6 3 = \frac{-3 + 14c1\,c2 + 16(c2)^2}{2c2}$.

Les équations auxquelles nous avons encore à satisfaire, sont la seconde, la quatrième, la cinquième, la sixième, la septième, la huitième, la neuvième, la dixième, la onzième, la douzième, la treizième & la quinzième des équations (4.°).

En y substituant pour $a^5 1$, $a^1 2$, $a^5 4$, $a^2 1$, $a^1 3$, $a^8 1$, $a^3 6$, $a^6 3$, les valeurs que nous venons de trouver, toutes celles qui ne s'anéantiront pas, donneront $4c1\,c2 + 4(c2)^2 - 1 = 0$; donc $c1 = \frac{1 - 4(c2)^2}{4c2}$.

Je puis donner à $c2$ telle valeur que je voudrai, excepté que je ne peux pas faire $c2 = 0$.

Soit $c2 = 1$; donc $c1 = -\frac{3}{4}$, on aura

$a^1 1 = \frac{1}{2}$, $a^2 1 = -\frac{5}{4}$, $a^3 1 = \frac{5}{4}$, $a^4 1 = 0$,
$a^1 2 = 1$, $a^2 2 = -1$, $a^3 2 = 0$, $a^4 2 = -1$,
$a^1 3 = 0$, $a^2 3 = 0$, $a^3 3 = \frac{1}{2}$. $a^4 3 = 0$,
$a^1 4 = 0$, $a^2 4 = -\frac{1}{2}$, $a^3 4 = 0$, $a^4 4 = 0$,
$a^1 5 = 0$, $a^2 5 = 0$, $a^3 5 = 0$, $a^4 5 = 0$,
$a^1 6 = 0$, $a^2 6 = 0$, $a^3 6 = -1$,
$a^1 7 = 0$, $a^2 7 = 0$,
$a^1 8 = 0$,

$a^5 1 = 1$, $a^6 1 = 0$, $a^7 1 = 0$, $a^8 1 = 0$,
$a^5 2 = 0$, $a^6 2 = 0$, $a^7 2 = -\frac{1}{2}$,
$a^5 3 = 0$, $a^6 3 = \frac{5}{4}$,
$a^5 4 = -\frac{5}{4}$,

ou $a1a2 - a1a2 = \frac{1}{2}$, $a1a3 - a1a3 = -\frac{5}{4}$,
$a2a3 - a2a3 = 1$, $a2a4 - a2a4 = -1$,
$a3a4 - a3a4 = 0$, $a3a5 - a3a5 = 0$,
$a4a5 - a4a5 = 0$, $a4a6 - a4a6 = -\frac{1}{2}$,
$a5a6 - a5a6 = 0$, $a5a7 - a5a7 = 0$,
$a6a7 - a6a7 = 0$, $a6a8 - a6a8 = 0$,
$a7a8 - a7a8 = 0$, $a7a9 - a7a9 = 0$,
$a8a9 - a8a9 = 0$,

$a1a4 - a1a4 = \frac{5}{4}$, $a1a5 - a1a5 = 0$,
$a2a5 - a2a5 = 0$, $a2a6 - a2a6 = -1$,
$a3a6 - a3a6 = \frac{1}{2}$, $a3a7 - a3a7 = 0$,
$a4a7 - a4a7 = 0$, $a4a8 - a4a8 = 0$,
$a5a8 - a5a8 = 0$, $a5a9 - a5a9 = 0$,
$a6a9 - a6a9 = 1$,

$a1a6 - a1a6 = 1$, $a1a7 - a1a7 = 0$,
$a2a7 - a2a7 = 0$, $a2a8 - a2a8 = 0$,
$a3a8 - a3a8 = 0$, $a3a9 - a3a9 = \frac{5}{4}$,
$a4a9 - a4a9 = -\frac{5}{4}$,

$a1a8 - a1a8 = 0$, $a1a9 - a1a9 = 0$,
$a2a9 - a2a9 = -\frac{1}{2}$,

donc $a1 = \frac{\frac{1}{2} + a1a2}{a2}$. Je substitue cette valeur de $a1$ par-tout où il se trouve; j'aurai

$$a2a3 - a2a3 = \frac{-\frac{1}{2}a2 - \frac{1}{2}a3}{a1} = 1,$$

$$a2a4 - a2a4 = \frac{\frac{1}{2}a2 - \frac{1}{2}a4}{a1} = -1,$$

$$a2a5 - a2a5 = \frac{-\frac{1}{2}a5}{a1} = 0,$$

$$a2a6 - a2a6 = \frac{a2 - \frac{1}{2}a6}{a1} = -1,$$

$$a2a7 - a2a7 = \frac{-\frac{1}{2}a7}{a1} = 0,$$

$$a2a8 - a2a8 = \frac{-\frac{1}{2}a8}{a1} = 0,$$

$$a2a9 - a2a9 = \frac{-\frac{1}{2}a9}{a1} = -\frac{1}{2}.$$

$a2 = \frac{1 + a2a3}{a3}$. Je mets cette valeur de $a2$ par-tout où il se trouve; j'aurai $a3a4 - a3a4 = \frac{-a3 - a4}{a2} = 0$,

$$a3a5 - a3a5 = \frac{-a5}{a2} = 0,$$

$$a3a6 - a3a6 = \frac{-a3 - a6}{a2} = \frac{1}{2},$$

$$a3a7 - a3a7 = \frac{-a7}{a2} = 0,$$

$$a3a8 - a3a8 = \frac{-a8}{a2} = 0,$$

$$a3a9 - a3a9 = \frac{-\frac{1}{2}a3 - a9}{a2} = \frac{5}{4}.$$

$a3 =$

$\alpha 3 = \frac{a3\,a4}{a4}$. Je mets cette valeur de $\alpha 3$ par-tout où il se trouve; j'aurai $\alpha 4 a6 - a4\alpha 6 = \frac{\frac{1}{2}a4}{a3} = -\frac{1}{2}$, $\alpha 4 a9 - a4\alpha 9 = \frac{\frac{1}{4}a4}{a3} = -\frac{5}{4}$.

$\alpha 4 = \frac{a4\,a5}{a5}$. Je substitue cette valeur de $\alpha 4$; j'aurai $\alpha 5 a6 - a5\alpha 6 = \frac{-\frac{1}{2}a5}{a4} = 0$,

$\alpha 5 a9 - a5\alpha 9 = \frac{-\frac{1}{4}a5}{a4} = 0$.

$\alpha 5 = \frac{a5\,a6}{a6}$. Je substitue cette valeur de $\alpha 5$; j'aurai $a5.(a6\,a9 - a6\,\alpha 9) = 0$; mais $\alpha 6 a9 - a6\alpha 9 = -1$; donc $a5 = 0$, $a4 = -a3$, $-a3 - 2a9 = \frac{5}{2}a2$; $a8 = 0$, $a7 = 0$, $-a3 - a6 = \frac{1}{2}a2$, $a9 = a1$, $2a2 - a6 = -2a1$, $5a2 - 2a4 = -4a1$, $-5a2 - 2a3 = 4a1$.

Soit $a1 = 1$, $a2 = -1$, on aura les coëfficiens du numérateur de l'intégrale, $a1 = 1$, $a2 = -1$, $a3 = \frac{1}{2}$, $a4 = -\frac{1}{2}$, $a5 = 0$, $a6 = 0$, $a7 = 0$, $a8 = 0$, $a9 = 1$.

Pour avoir ceux du dénominateur, je substitue ces valeurs dans les trente-six équations entre ces coëfficiens; j'aurai $-\alpha 1 - \alpha 2 = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\alpha 1 - \alpha 3 = -\frac{5}{4}$, $-\frac{1}{2}\alpha 1 - \alpha 4 = \frac{5}{4}$, $\alpha 5 = 0$, $\alpha 6 = -1$, $\alpha 7 = 0$, $\alpha 8 = 0$, $\alpha 1 - \alpha 9 = 0$, $\frac{1}{2}\alpha 2 + \alpha 3 = 1$, $-\frac{1}{2}\alpha 2 + \alpha 4 = -1$, $\alpha 2 + \alpha 9 = -\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}\alpha 3 - \frac{1}{2}\alpha 4 = 0$, $\alpha 3 - \frac{1}{2}\alpha 4 = \frac{5}{4}$, $\alpha 4 + \frac{1}{2}\alpha 9 = -\frac{5}{4}$; donc $\alpha 9 = \alpha 1$, $\alpha 4 = -\alpha 3$, $\alpha 1 + \alpha 2 = -\frac{1}{2}$, $\alpha 1 - 2\alpha 3 = -\frac{5}{2}$, $\alpha 2 + 2\alpha 3 = 2$.

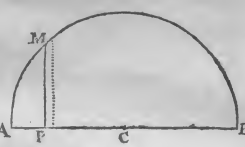
Soit $\alpha 1 = 0$, on aura $\alpha 1 = 0$, $\alpha 2 = -\frac{1}{2}$, $\alpha 3 = \frac{5}{4}$, $\alpha 4 = -\frac{5}{4}$, $\alpha 5 = 0$, $\alpha 6 = -1$, $\alpha 7 = 0$, $\alpha 8 = 0$, $\alpha 9 = 0$; par conséquent l'intégrale de l'équation $\dot{x} + \frac{-2x\sqrt{(px-p^2)}}{p^2+y^2}\dot{y} = 0$,

est $n = \frac{p^2 - px + \frac{1}{2}py - \frac{1}{2}p\sqrt{(px-p^2)} + y\sqrt{(px-p^2)}}{-\frac{1}{2}px + \frac{5}{4}py - \frac{5}{4}p\sqrt{(px-p^2)} - xy}$,

ou $n = \frac{2p^2 - 2px + py - p\sqrt{(px-p^2)} + 2y\sqrt{(px-p^2}}{-2px + 5py - 5p\sqrt{(px-p^2)} - 4xy}$,

ou $n = \frac{5p^2 - 4px + 2xy + 5y\sqrt{(px-p^2)}}{2px - 5py + 5p\sqrt{(px-p^2)} + 4xy}$.

APPLICATION DE CETTE MÉTHODE aux Quadratures.



AMB étant un demi-cercle décrit du centre C & du rayon $CA = p$, soit $AP = x$, PM sera $= \sqrt{(2px - xx)}$; soit l'aire $AMP = \int$, on aura $\dot{\int} = \sqrt{(2px - xx.)}\,\dot{x}$; soit $\dot{\int} = p\dot{y}$, on aura $\dot{x} + \frac{-p}{\sqrt{(2px - xx)}}\,\dot{y} = 0$. Je fais $z = \sqrt{(2px - xx)}$; donc $z^2 = 2px - xx$, $\frac{\dot{z}}{\dot{x}} = \frac{p - x}{z}$.

L'équation à intégrer sera $\dot{x} + \frac{-p}{z}\,\dot{y} = 0$; & l'intégrale sera $n = \frac{a1p + a2x + a3y + a4z}{\alpha 1p + \alpha 2x + \alpha 3y + \alpha 4z}$, ou $n = \frac{a1p^2 + a1p^2 + a2px + a3py + a4pz + a5x^2 + a6xy + a7xz + a8y^2 + a9yz}{\alpha 2px + \alpha 3py + \alpha 4pz + \alpha 5x^2 + \alpha 6xy + \alpha 7xz + \alpha 8y^2 + \alpha 9yz}$, ou $n = \frac{a1p^3 + a2p^2x + a3p^2y + a4p^2z + a5px^2 + a6pxy + a7pxz + a8py^2 + a9pyz + a10x^3 + a11x^2y + a12x^2z + a13xy^2 + a14xyz + a15y^3 + a16y^2z}{\alpha 1p^3 + \alpha 2p^2x + \alpha 3p^2y + \alpha 4p^2z + \alpha 5px^2 + \alpha 6pxy + \alpha 7pxz + \alpha 8py^2 + \alpha 9pyz + \alpha 10x^3 + \alpha 11x^2y + \alpha 12x^2z + \alpha 13xy^2 + \alpha 14xyz + \alpha 15y^3 + \alpha 16y^2z}$, &c.

Mais comme je ne crois pas qu'il soit possible qu'une fonction de dimension nulle de p, de x & de y, autre que $\frac{y}{p} + pc$, soit telle que sa différence égalée à 0, étant $\dot{x} + \frac{N}{M}\,\dot{y} = 0$, M & N ne soient fonctions que de p & de x, lorsque les fonctions N, M seront dans ce cas, pour

rendre la méthode générale des quadratures plus simple, je prendrai toûjours $n = \frac{y}{p} + pc$ pour l'intégrale de l'équation $\dot{x} + \frac{N}{M}\dot{y} = 0$. Par pc j'entends une fonction quelconque de dimension nulle de p & de x.

S'il n'entre aucun radical dans les fonctions N, M, c'est-à-dire, si l'équation proposée est $\dot{x} + \frac{b1p + b2x}{c1p + c2x}\dot{y} = 0$,

ou $\dot{x} + \frac{b1p^2 + b2px + b3x^2}{c1p^2 + c2px + c3x^2}\dot{y} = 0$,

ou $\dot{x} + \frac{b1p^3 + b2p^2x + b3px^2 + b4x^3}{c1p^3 + c2p^2x + c3px^2 + c4x^3}\dot{y} = 0$, ou

$\dot{x} + \frac{b1p^4 + b2p^3x + b3p^2x^2 + b4px^3 + b5x^4}{c1p^4 + c2p^3x + c3p^2x^2 + c4px^3 + c5x^4}\dot{y} = 0$, &c.

l'intégrale sera $n = \frac{y}{p} + \frac{d1p + d2x}{\delta 1p + \delta 2x}$,

ou $n = \frac{y}{p} + \frac{d1p^2 + d2px + d3x^2}{\delta 1p^2 + \delta 2px + \delta 3x^2}$,

ou $n = \frac{y}{p} + \frac{d1p^3 + d2p^2x + d3px^2 + d4x^3}{\delta 1p^3 + \delta 2p^2x + \delta 3px^2 + \delta 4x^3}$, ou

$n = \frac{y}{p} + \frac{d1p^4 + d2p^3x + d3p^2x^2 + d4px^3 + d5x^4}{\delta 1p^4 + \delta 2p^3x + \delta 3p^2x^2 + \delta 4px^3 + \delta 5x^4}$, &c.

I.

Soit $n = \frac{y}{p} + \frac{d1p + d2x}{\delta 1p + \delta 2x} = \frac{d1p^2 + d2px + \delta 1py + \delta 2xy}{\delta 1p^2 + \delta 2px + bpy + oxy}$

$= \frac{a1p^2 + a2px + a3py + a4xy}{\alpha 1p^2 + \alpha 2px + \alpha 3py + \alpha 4xy}$; en différenciant, on aura

l'équation $\dot{x} + \frac{a^2 1p^2 + a^1 2px + a^2 2x^2 + a^1 r}{a^1 1p^2}\dot{y} = 0$, qui, en supposant $a^3 1 - a^1 2 = 0$, $a^1 3 = 0$, & la condition $a^3 1\, a^1 2 - a^2 1\, a^2 2 + a^1 1\, a^1 3 = 0$, sera

la formule de toutes les équations, dont l'intégrale est $n = \frac{y}{p} + \frac{d1p + d2x}{\delta 1p + \delta 2x}$.

II.

Soit $n = \frac{y}{p} + \frac{d1p^2 + d2px + d3x^2}{\delta 1p^2 + \delta 2px + \delta 3x^2} =$

$$\frac{d1p^3 + d2p^2x + \delta 1p^2y + d3px^2 + \delta 2pxy + \delta 3x^2y}{\delta 1p^3 + \delta 2p^2x + 0p^2y \quad + \delta 3px^2 + 0pxy \quad + 0x^2y} =$$

$$\frac{a1p^3 + a2p^2x + a3p^2y + a4px^2 + a5pxy + a6x^2y}{a1p^3 + a2p^2x + a3p^2y + a4px^2 + a5pxy + a6x^2y};$$

en différenciant, on aura l'équation

$$\dot{x} + \frac{\begin{matrix} a^2 1p^4 + a^1 2p^3x - a^1 3p^2x^2 + a^1 4px^3 + a^2 4x^4 \\ + a^4 1 \quad + a^3 2 \quad + a^4 2 \\ + a^5 1 \end{matrix}}{a^1 1p^4 + 2a^1 1p^3x + a^2 2p^2x^2} \dot{y} = 0,$$

qui, en supposant $a^4 1 - a^1 2 = 0$, $a^1 3 + a^5 1 = 0$, $a^4 2 - a^1 4 = 0$, $a^2 3 = 0$, $a^1 5 = 0$, $a^3 3 = 0$, & les quinze conditions du Lemme, sera la formule de toutes les équations, dont l'intégrale est $n = \frac{y}{p} + \frac{d1p^2 + d2px + d3x^2}{\delta 1p^2 + \delta 2px + \delta 3x^2}$,

III.

Soit $n = \frac{y}{p} + \frac{d1p^3 + d2p^2x + d3px^2 + d4x^3}{\delta 1p^3 + \delta 2p^2x + \delta 3px^2 + \delta 4x^3} =$

$$\frac{d1p^4 + d2p^3x + \delta 1p^3y + d3p^2x^2 + \delta 2p^2xy + d4px^3 + \delta 3px^2y + \delta 4x^3y}{\delta 1p^4 + \delta 2p^3x + 0p^3y + \delta 3p^2x^2 + 0p^2xy + \delta 4px^3 + 0px^2y + 0x^3y} =$$

$$\frac{a1p^4 + a2p^3x + a3p^3y + a4p^2x^2 + a5p^2xy + a6px^3 + a7px^2y + a8x^3y}{a1p^4 + a2p^3x + a3p^3y + a4p^2x^2 + a5p^2xy + a6px^3 + a7px^2y + a8x^3y};$$

en différenciant, on aura l'équation

$$\dot{x} + \frac{\begin{matrix} a^2 1p^6 + a^1 2p^5x - a^1 3p^4x^2 - a^2 3p^3x^3 - a^1 5p^2x^4 + a^1 6px^5 + a^2 6x^6 \\ + a^4 1 \quad + a^3 2 \quad + a^1 4 \quad + a^3 4 \quad + a^4 4 \\ + a^6 1 \quad + a^5 2 \quad + a^6 2 \\ + a^7 1 \end{matrix}}{\begin{matrix} a^1 1p^6 + 2a^1 1p^5x + a^2 2p^4x^2 + 2a^4 2p^3x^3 + a^2 4p^2x^4 \\ + 3a^5 1 \end{matrix}} \dot{y} = 0,$$

qui, en supposant $a^4 1 - a^1 2 = 0$, $a^1 3 + a^6 1 = 0$; $a^2 3 = 0$, $a^1 2 - a^1 4 + 3a^3 3 + 3a^7 1 = 0$; $a^4 3 = 0$, $a^6 2 + a^1 5 = 0$, $a^2 5 + 3a^1 3 = 0$; $a^4 4 - a^1 6 = 0$, $a^3 5 = 0$, $a^1 7 = 0$, & les soixante-dix conditions du Lemme, sera la formule de toutes les équations, dont l'intégrale est $n = \frac{y}{p} + \frac{d1p^3 + \&c.}{\delta^1 p^3 + \&c.}$.

I V.

Soit $n = \frac{y}{p} + \frac{d1p^2 + d2p^3x + d3p^3x^2 + d4px^3 + d5x^4}{\delta^1 p^4 + \delta^2 p^3 x + \delta^3 p^2 x^2 + \delta^4 px^3 + \delta^5 x^4} =$

$$\frac{d1p^5 + d2p^4x + \delta^1 p^4 y + d3p^3x^2 + \delta^2 p^3 xy + d4p^2x^3 + \delta^3 p^2 x^2 y +}{\delta^1 p^5 + \delta^2 p^4 x + 0p^4 y + \delta^3 p^3 x^2 + 0p^3 xy + \delta^4 p^2 x^3 + 0p^2 x^2 y +}$$

$$\frac{d5px^4 + \delta^4 px^3 y + \delta^5 x^4 y}{\delta^5 px^4 + 0px^3 y + 0x^4 y} = \frac{a1p^5 + a2p^4x + a3p^4y + a4p^3x^2 +}{a1p^5 + a2p^4x + a3p^4y + a4p^3x^2 +}$$

$$\frac{a5p^3xy + a6p^2x^3 + a7p^2x^2y + a8px^4 + a9px^3y + a10x^4y}{a5p^3xy + a6p^2x^3 + a7p^2x^2y + a8px^4 + a9px^3y + a10x^4y};$$ en différenciant, on aura l'équation

$$\ddot{x} + \frac{\begin{matrix} a^2 1 p^8 + a^1 2 p^7 x - a^1 3 p^6 x^2 \\ + a^4 1 \quad + a^3 2 \\ + a^6 1 \end{matrix}}{+ a^2 1 p^8 + 2a^2 1 p^7 x} \dot{x}^2$$

$$\frac{\begin{matrix} - a^3 3 p^5 x^3 - a^5 3 p^4 x^4 - a^5 5 p^1 x^5 - a^7 7 p^2 x^6 + a^7 8 p x^7 + a^2 8 x^8 \\ + a^1 4 \quad - a^1 5 \quad + a^1 6 \quad + a^3 6 \quad + a^4 6 \\ + a^5 2 \quad + a^3 4 \quad + a^5 4 \quad + a^6 4 \\ + a^8 1 \quad + a^7 2 \quad + a^8 2 \\ + a^9 1 \end{matrix}}{\begin{matrix} + a^2 2 p^6 x^2 + 2a^4 2 p^5 x^3 + 3a^6 2 p^4 x^4 + 2a^4 4 p^3 x^5 + a^2 6 p^2 x^6 \\ + 3a^9 1 \quad + 4a^7 1 \quad + a^2 4 \end{matrix}} \dot{y} = 0;$$

qui, en supposant $- a^1 2 + a^4 1 = 0$, $a^1 3 + a^6 1 = 0$, $a^5 2 - a^1 4 + 3a^3 3 + 3a^8 1 = 0$, $2a^7 2 + 2a^1 5 + 4a^3 3 + 4a^9 1 = 0$, $3a^8 2 + 3a^3 5 - a^1 6 + a^1 4 = 0$, $2a^6 4 + 2a^1 7 = 0$, $a^4 6 - a^1 8 = 0$, $a^2 3 = 0$, $a^2 5 + 3a^6 3 = 0$, $2a^4 5 + 4a^7 3 = 0$, $3a^5 5 + a^2 7 = 0$, $a^4 3 = 0$, $a^3 7 = 0$, $a^5 9 = 0$, & les deux cens dix conditions

du Lemme, sera la formule de toutes les équations, dont l'intégrale est $n = \frac{y}{p} + \frac{d_1 p^4 + \&c.}{\int_1 p^4 + \&c.}$.

REMARQUE.

Soit λ le degré du numérateur & du dénominateur de la fonction pc, jamais les fonctions N, M ne seront d'un degré si bas, que lorsque l'intégrale sera $n = \frac{y}{p} + \frac{d_1 p^\lambda + d_2 p^{\lambda-1} x + d_3 p^{\lambda-2} x^2 + d_4 p^{\lambda-3} x^3 + \&c. + x^\lambda}{\int_1 p^\lambda}$.

Soit l'intégrale $n = \frac{y}{p} + \frac{Ap + x}{Bp}$, l'équation différencielle sera $\dot{x} + B\dot{y} = 0$, dans laquelle le degré des fonctions N, M est $= 0$; & il est impossible que le degré de ces fonctions dans l'équation différencielle de cette intégrale-ci $n = \frac{y}{p} + \frac{d_1 p + d_2 x}{\int_1 p + x}$, ne soit pas > 0.

Soit l'intégrale $n = \frac{y}{p} + \frac{Ap^2 + Bpx + x^2}{Cp^2}$, l'équation différencielle sera $\dot{x} + \frac{Cp}{Bp + 2x}\dot{y} = 0$, dans laquelle le degré des fonctions N, M est $= 1$; & il est impossible que le degré de ces fonctions dans l'équation différencielle de cette intégrale-ci $n = \frac{y}{p} + \frac{d_1 p^2 + d_2 px + d_3 x^2}{\int_1 p^2 + \int_2 px + \int_3 x^2}$, ne soit pas > 1.

Soit l'intégrale $n = \frac{y}{p} + \frac{Ap^3 + Bp^2 x + Cpx^2 + x^3}{Dp^3}$, l'équation différencielle sera $\dot{x} + \frac{Dp^2}{Bp^2 + 2Cpx + 3x^2}\dot{y} = 0$, dans laquelle le degré des fonctions N, M est $= 0$, & il est impossible que le degré de ces fonctions dans

l'équation différencielle de cette intégrale-ci $n = \frac{y}{p} + \frac{d1p^1 + d2p^2x + d3px^2 + d4x^3}{\delta 1p^1 + \delta 2p^2x + \delta 3px^2 + \delta 4x^3}$, ne soit pas > 2, &c.

Au moyen de cette remarque & des formules précédentes, il n'y a aucune des équations dont nous traitons ici, que je n'intègre, ou dont je ne démontre l'inintégrabilité. S'il s'agit, par exemple, d'une équation où le degré des fonctions N, M est $= 5$, je commence d'abord par m'assurer que ces fonctions n'ont aucun facteur commun, c'est-à-dire, que l'équation proposée ne peut pas devenir une équation où les fonctions N, M soient d'un degré moindre que 5; j'en ai donné le moyen: ensuite je dis que cette équation appartient à la troisième, ou à la quatrième, ou à la cinquième formule. Je la multiplie donc par $c1p + c2x$, & je la compare avec la troisième formule; si elle n'est pas intégrable par cette formule, je la multiplie par $c1p^3 + c2p^2x + c3px^2 + c4x^3$, & je la compare avec la quatrième formule; si elle n'est pas intégrable par cette formule, je la multiplie par $c1p^5 + c2p^4x + c3p^3x^2 + c4p^2x^3 + c5px^4 + c6x^5$, & je la compare avec la cinquième formule; si elle n'est intégrable par aucune de ces trois formules, il sera démontré qu'elle est inintégrable.

L'on intégrera également ces équations-ci, lorsque les fonctions N, M seront affectées de radicaux, ou bien l'on en démontrera l'inintégrabilité.

Pour qu'on voie le procédé de la méthode jusqu'au bout, voici quelques exemples.

La première équation différencielle $\dot{x} + \frac{b1p + x}{c1p + c2x}\dot{y} = 0$; ne peut appartenir à aucune formule; par conséquent elle est inintégrable généralement.

Soit l'équation $\dot{x} + \frac{\frac{11}{2}p^2 - 10px + 2x^2}{3p^2}\dot{y} = 0$; en comparant cette équation avec la première formule, j'aurai

j'aurai $a^1 1 = 3$, $a^2 1 = \frac{25}{2}$, $a^1 2 + a^3 1 = -10$, $a^3 1 - a^1 2 = 0$.

$a^2 2 = 2$, $a^1 3 = 0$; donc $a^1 1 = 3$, $a^2 1 = \frac{25}{2}$, $a^1 2 = -5$, $a^2 2 = 2$. $a^1 3 = 0$.

$a^3 1 = -5$. En substituant ces valeurs dans la condition de la formule, j'aurai $-5 \cdot -5 - 25 + 0 = 0$; par conséquent l'équation proposée est intégrable par cette formule.

Pour l'intégrer, j'aurai $\partial 1\, d2 - d1\, \partial 2 = 3$, $\partial 2 \partial 1 = -5$, $0 = 0$.

$(\partial 1)^2 = \frac{25}{2}$, $\partial 1\, \partial 2 = -5$; donc $\partial 1 = \frac{5}{\sqrt{2}}$, $(\partial 2)^2 = 2$.

$\partial 2 = -\sqrt{2}$ & $\frac{5}{\sqrt{2}} d2 + \sqrt{2} \cdot d1 = 3$. Soit $d1 = \sqrt{2}$, on aura $d2 = \frac{\sqrt{2}}{5}$, & l'intégrale sera

$$n = \frac{y}{p} + \frac{\sqrt{2} \cdot p + \frac{\sqrt{2}}{5} x}{\frac{5}{\sqrt{2}} p - \sqrt{2}\, x} \text{ ou } n = \frac{y}{p} + \frac{2p + \frac{2}{5} x}{5p - 2x}.$$

Soit l'équation $\dot{x} + \frac{4p^2 - 12px + 9x^2}{p^2 + 4px - 3x^2} \dot{y} = 0$, il est évident que cette équation ne peut pas se rapporter à la première formule, & que pour la rapporter à la seconde aussi généralement qu'elle peut l'être, il suffit de la multiplier par p^2, on aura $a^1 1 = 1$, $a^2 1 = 4$; $a^3 1 = 2$, $a^1 2 + a^4 1 = -12$, $a^2 2 = -3$; $a^4 1 - a^1 2 = 0$.

$-a^1 3 + a^3 2 + a^5 1 = 9$, $a^1 4 + a^4 2 = 0$, $a^3 3 + a^5 1 = 0$. $a^4 2 - a^1 4 = 0$.

$a^2 4 = 0$, $a^2 3 = 0$, $a^1 5 = 0$, $a^3 3 = 0$.

Donc 1.° $a^1 1 = 1$, $a^2 1 = 4$, $a^3 1 = 2$, $a^4 1 = -6$.
$a^1 2 = -6$, $a^2 2 = -3$, $a^4 2 = 0$.
$a^2 3 = 0$, $a^3 3 = 0$,
$a^1 4 = 0$, $a^2 4 = 0$.
$a^1 5 = 0$.

2.° $-a^1 3 + a^3 2 + a^1 1 = 9$,
$a^1 3 + a^1 1 = 0$.

3.° En substituant dans les quinze conditions de la formule, la première donnera $-2.6 + 4.3 + a^1 3 = 0$, c'est-à-dire, $a^1 3 = 0$; donc $a^1 1 = 0$, $a^3 2 = 9$. La seconde & toutes les autres donneront $0 = 0$; par conséquent l'équation proposée est intégrable par la seconde formule, & pour l'intégrer, on aura $a^1 1 = 1$,
$a^1 2 = -6$,
$a^1 3 = 0$,
$a^1 4 = 0$,
$a^1 5 = 0$.

$a^2 1 = 4$, $a^3 1 = 2$, $a^4 1 = -6$, $a^1 1 = 0$,
$a^2 2 = -3$, $a^3 2 = 9$, $a^4 2 = 0$.
$a^2 3 = 0$, $a^3 3 = 0$.
$a^2 4 = 0$.

ou $\partial 1\, d2 - d1\, \partial 2 = 1$, $(\partial 1)^2 = 4$,
$\partial 2 \partial 1 = -6$, $\partial 2\, d3 - d2\, \partial 3 = -3$,
$-\partial 1 \partial 3 = 0$, $0 = 0$,
$\partial 3 \partial 2 = 0$, $(\partial 3)^2 = 0$.
$0 = 0$.

$\partial 1\, d3 - d1\, \partial 3 = 2$, $\partial 1 \partial 2 = -6$, $\partial 1 \partial 3 = 0$.
$(\partial 2)^2 = 9$, $\partial 2 \partial 3 = 0$.
$0 = 0$.

donc $\delta 1 = 2$, $\delta 2 = -3$, $\delta 3 = 0$, $d3 = 1$. Soit $d1 = 1$, on aura $d2 = -1$, & l'intégrale sera $n = \frac{y}{p} + \frac{p^2 - px + x^2}{2p^2 - 3px}$.

Ces deux exemples suffiront, d'autant plus que j'ai trouvé une manière d'intégrer ces équations-ci, ou d'en démontrer l'inintégrabilité, plus simplement que par la méthode générale.

AVERTISSEMENT.

JE nommerai intégrale du premier degré, celle où le numérateur & le dénominateur de la fonction pc seront du premier degré; intégrale du second degré, celle où le numérateur & le dénominateur de pc seront du second degré, &c.

Je nommerai équation différencielle du premier degré, celle où les fonctions N, M seront du premier degré; équation différencielle du second degré, celle où les fonctions N, M seront du second degré, &c.

Le chiffre au dessus de chaque formule d'intégrale, désignera le degré de l'équation différencielle de cette intégrale.

LEMME I.

Les intégrales du premier degré sont $n = \frac{y}{p} + \overset{(2)}{\frac{ap + bx}{ap + x}}$;

$n = \frac{y}{p} + \overset{(0)}{\frac{ap + bx}{p}}$.

Les intégrales du second degré sont $n = \frac{y}{p} + \overset{(4)}{\frac{ap^2 + bpx + cx^2}{(ap + x)(cp + x)}}$, $n = \frac{y}{p} + \overset{(3)}{\frac{ap^2 + bpx + cx^2}{(ap + x)^2}}$,

$$u = \frac{y}{p} + \overset{(2)}{\frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p(\alpha p + x)}}, \quad u = \frac{y}{p} + \overset{(1)}{\frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p^2}}.$$

Les intégrales du troisième degré sont $u = \frac{y}{p} +$

$$\overset{(6)}{\frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{(\alpha p + x)(\beta p + x)(\gamma p + x)}}, \quad u = \frac{y}{p} + \overset{(5)}{\frac{ap^3 +}{(\alpha p + x)^2(\beta p + x)}};$$

$$u = \frac{y}{p} + \overset{(4)}{\frac{ap^3 +}{(\alpha p + x)^3}}, \quad u = \frac{y}{p} + \overset{(4)}{\frac{ap^3 +}{p(\alpha p + x)(\beta p + x)}},$$

$$u = \frac{y}{p} + \overset{(3)}{\frac{ap^3 +}{p(\alpha p + x)^2}}, \quad u = \frac{y}{p} + \overset{(3)}{\frac{ap^2 +}{p^2(\alpha p + x)}},$$

$$u = \frac{y}{p} + \overset{(2)}{\frac{ap^3 +}{p^3}}.$$

Les intégrales du quatrième degré sont $u = \frac{y}{p} +$

$$\overset{(8)}{\frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{(\alpha p + x)(\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)}}; \quad u = \frac{y}{p} +$$

$$\overset{(7)}{\frac{ap^4 +}{(\alpha p + x)^2(\beta p + x)(\gamma p + x)}}, \quad u = \frac{y}{p} + \overset{(6)}{\frac{ap^4 +}{(\alpha p + x)^2(\beta p + x)^2}},$$

$$u = \frac{y}{p} + \overset{(6)}{\frac{ap^4 +}{(\alpha p + x)^3(\beta p + x)}}, \quad u = \frac{y}{p} + \overset{(5)}{\frac{ap^4 +}{(\alpha p + x)^4}};$$

$$u = \frac{y}{p} + \overset{(6)}{\frac{ap^4 +}{p(\alpha p + x)(\beta p + x)(\gamma p + x)}}, \quad u = \frac{y}{p} +$$

$$\overset{(5)}{\frac{ap^4 +}{p(\alpha p + x)^2(\beta p + x)}}, \quad u = \frac{y}{p} + \overset{(4)}{\frac{ap^4 +}{p(\alpha p + x)^3}};$$

$$u = \frac{y}{p} + \overset{(5)}{\frac{ap^4 +}{p^2(\alpha p + x)(\beta p + x)}}, \quad u = \frac{y}{p} + \overset{(4)}{\frac{ap^4 +}{p^2(\alpha p + x)^2}};$$

(4) (3)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 +}{p^3(\alpha p + x)}, \quad n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 +}{p^4}.$$

Les intégrales du cinquième degré sont

(10)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{(\alpha p + x)(\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)},$$

(9)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 +}{(\alpha p + x)^2(\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)},$$

(8)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 +}{(\alpha p + x)^2(\beta p + x)^2(\gamma p + x)}, \quad n = \frac{y}{p} +$$

(8) (7)

$$\frac{ap^5 +}{(\alpha p + x)^3(\beta p + x)(\gamma p + x)}, \quad n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 +}{(\alpha p + x)^3(\beta p + x)^2},$$

(7) (6)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 +}{(\alpha p + x)^4(\beta p + x)}, \quad n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 +}{(\alpha p + x)^5},$$

(8)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 +}{p(\alpha p + x)(\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)},$$

(7)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 +}{p(\alpha p + x)^2(\beta p + x)(\gamma p + x)},$$

(6)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 +}{p(\alpha p + x)^2(\beta p + x)^2}, \quad n = \frac{y}{p} +$$

(6) (5)

$$\frac{ap^5 +}{p(\alpha p + x)^3(\beta p + x)}, \quad n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 +}{p(\alpha p + x)^4},$$

(7)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 +}{p^2(\alpha p + x)(\beta p + x)(\gamma p + x)},$$

(6)
$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 +}{p^2(\alpha p + x)^2(\beta p + x)}, \quad n = \frac{y}{p} +$$
(5) (6)
$$\frac{ap^5 +}{p^2(\alpha p + x)^3}, \quad n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 +}{p^3(\alpha p + x)(\beta p + x)},$$
(5) (5)
$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 +}{p^3(\alpha p + x)^2}, \quad n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 +}{p^4(\alpha p + x)},$$
(4)
$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 +}{p^5}.$$

Les intégrales du sixième degré sont $n = \frac{y}{p} +$

(12)
$$\frac{ap^6 + bp^5x + cp^4x^2 + dp^3x^3 + ep^2x^4 + fpx^5 + gx^6}{(\alpha p + x)(\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)(\zeta p + x)},$$
(11)
$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{(\alpha p + x)^2(\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)},$$
(10)
$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{(\alpha p + x)^2(\beta p + x)^2(\gamma p + x)(\delta p + x)},$$
(9)
$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{(\alpha p + x)^2(\beta p + x)^2(\gamma p + x)^2},$$
(10)
$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{(\alpha p + x)^3(\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)},$$
(9)
$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{(\alpha p + x)^3(\beta p + x)^2(\gamma p + x)}, \quad n = \frac{y}{p} +$$
(8) (9)
$$\frac{ap^6 +}{(\alpha p + x)^3(\beta p + x)^3}, \quad n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{(\alpha p + x)^4(\beta p + x)(\gamma p + x)},$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{(\alpha p + x)^4 (\beta p + x)^2}\ (8),\quad n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{(\alpha p + x)^5 (\beta p + x)}\ (8),\quad n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{(\alpha p + x)^6}\ (7),$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{p(\alpha p + x)(\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)}\ (10),$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{p(\alpha p + x)^2 (\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)}\ (9),$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{p(\alpha p + x)^2 (\beta p + x)^2 (\gamma p + x)}\ (8),$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{p(\alpha p + x)^3 (\beta p + x)(\gamma p + x)}\ (8),$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{p(\alpha p + x)^3 (\beta p + x)^2}\ (7),\quad n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{p(\alpha p + x)^4 (\beta p + x)}\ (7),\quad n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{p(\alpha p + x)^5}\ (6);$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{p^2(\alpha p + x)(\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)}\ (9);$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{p^2(\alpha p + x)^2 (\beta p + x)(\gamma p + x)}\ (8),$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{p^2(\alpha p + x)^2 (\beta p + x)^2}\ (7),\quad n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{p^2(\alpha p + x)^3 (\beta p + x)}\ (7),\quad n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{p^2(\alpha p + x)^4}\ (6),$$

(8)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{p^3(\alpha p + x)(\zeta p + x)(\gamma p + x)};$$

(7)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{p^3(\alpha p + x)^2(\zeta p + x)}, \quad n = \frac{y}{p} +$$

(6) (7)

$$\frac{ap^6 +}{p^3(\alpha p + x)^2}, \quad n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{p^4(\alpha p + x)(\zeta p + x)},$$

(6) (6)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{p^4(\alpha p + x)^2}, \quad n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{p^3(\alpha p + x)},$$

(5)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{p^6}.$$

Les intégrales du septième degré sont $n = \frac{y}{p} +$

(14)

$$\frac{ap7 + bp^6x + cp^5x^2 + dp^4x^3 + ep^3x^4 + fp^2x^5 + gpx^6 + hx7}{(\alpha p + x)(\zeta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)(\zeta p + x)(\eta p + x)};$$

(13)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{(\alpha p + x)^2(\zeta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)(\zeta p + x)};$$

(12)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{(\alpha p + x)^2(\zeta p + x)^2(\gamma p + x)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)},$$

(11)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{(\alpha p + x)^2(\zeta p + x)^2(\gamma p + x)^2(\delta p + x)},$$

(12)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{(\alpha p + x)^3(\zeta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)};$$

(11)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{(\alpha p + x)^3(\zeta p + x)^2(\gamma p + x)(\delta p + x)};$$

$n =$

(10)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{(\alpha p + x)^3 (\beta p + x)^2 (\gamma p + x)^2},$$

(10)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{(\alpha p + x)^3 (\beta p + x)^3 (\gamma p + x)},$$

(11)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{(\alpha p + x)^4 (\beta p + x) (\gamma p + x) (\delta p + x)},$$

(10)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{(\alpha p + x)^4 (\beta p + x)^2 (\gamma p + x)}, \quad n = \frac{y}{p} +$$

(9) (10)

$$\frac{ap^7 +}{(\alpha p + x)^4 (\beta p + x)^3}, \quad n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{(\alpha p + x)^5 (\beta p + x) (\gamma p + x)},$$

(9)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{(\alpha p + x)^5 (\beta p + x)^2}, \quad n = \frac{y}{p} +$$

(9) (8)

$$\frac{ap^7 +}{(\alpha p + x)^6 (\beta p + x)}, \quad n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{(\alpha p + x)^7},$$

(12)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{p(\alpha p + x)(\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)(\zeta p + x)(\eta p + x)},$$

(11)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{p(\alpha p + x)^2 (\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)},$$

(10)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{p(\alpha p + x)^2 (\beta p + x)^2 (\gamma p + x)(\delta p + x)},$$

(9)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{p(\alpha p + x)^2 (\beta p + x)^2 (\gamma p + x)^2},$$

(10)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{p(\alpha p + x)^2 (\beta p + x)^3 (\gamma p + x)(\delta p + x)},$$

(9)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 + }{p(\alpha p + x)^3 (\zeta p + x)^2 (\gamma p + x)}, \quad n = \frac{y}{p} +$$

(8) (9)

$$\frac{ap^7 + }{p(\alpha p + x)^3 (\zeta p + x)^3}, \quad n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 + }{p(\alpha p + x)^4 (\zeta p + x)(\gamma p + x)},$$

(8)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 + }{p(\alpha p + x)^4 (\zeta p + x)^2}, \quad n = \frac{y}{p} +$$

(8) (7)

$$\frac{ap^7 + }{p(\alpha p + x)^5 (\zeta p + x)}, \quad n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 + }{p(\alpha p + x)^6},$$

(11)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 + }{p^2(\alpha p + x)(\zeta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)},$$

(10)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 + }{p^2(\alpha p + x)^2(\zeta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)},$$

(9)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 + }{p^2(\alpha p + x)^2 (\zeta p + x)^2 (\gamma p + x)},$$

(9)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 + }{p^2(\alpha p + x)^3 (\zeta p + x)(\gamma p + x)},$$

(8)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 + }{p^2(\alpha p + x)^3 (\zeta p + x)^2}, \quad n = \frac{y}{p} +$$

(8) (7)

$$\frac{ap^7 + }{p^2(\alpha p + x)^4 (\zeta p + x)}, \quad n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 + }{p^2(\alpha p + x)^5},$$

(10)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 + }{p^3(\alpha p + x)(\zeta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)},$$

(9)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 + }{p^3(\alpha p + x)^2 (\zeta p + x)(\gamma p + x)},$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 + \ldots}{p^3(\alpha p + x)^3(\zeta p + x)^2}\ (8),\quad n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 + \ldots}{p^3(\alpha p + x)^3(\zeta p + x)}\ (8),\quad n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 + \ldots}{p^3(\alpha p + x)^4}\ (7),$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 + \ldots}{p^4(\alpha p + x)(\zeta p + x)(\gamma p + x)}\ (9),$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 + \ldots}{p^4(\alpha p + x)^2(\zeta p + x)}\ (8),\quad n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 + \ldots}{p^4(\alpha p + x)^3}\ (7),\quad n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 + \ldots}{p^5(\alpha p + x)(\zeta p + x)}\ (8),$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 + \ldots}{p^5(\alpha p + x)^2}\ (7),\quad n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 + \ldots}{p^6(\alpha p + x)}\ (7),$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 + \ldots}{p^7}\ (6);$$

LEMME II.

En parcourant ces intégrales l'une après l'autre, je vois tout de suite de quel degré sera l'équation différencielle de chaque intégrale, & je le marque à mesure par le chiffre que je mets au dessus entre deux parenthèses. Je vois, par exemple, que l'équation différencielle de cette intégrale ci

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p(\alpha p + x)^2(\zeta p + x)(\gamma p + x)},$$

sera du septième degré: la démonstration que je vais en donner servira pour tous les autres cas.

Soit donc $u = \frac{y}{p} + \frac{L}{p(\alpha p + x)^2(\zeta p + x)(\gamma p + x)}$,

je mets, pour abréger, L au lieu du numérateur de pc; en différenciant, on aura

$$\frac{\dot{y}}{p} + \frac{(\alpha p+x)^2(\zeta p+x)(\gamma p+x)\frac{\dot{L}}{\dot{x}} - L(\alpha p+x)^2(\zeta p+x) - L(\alpha p+x)^2(\gamma p+x) - 2L(\zeta p+x)(\gamma p+x)(\alpha p+x)}{p(\alpha p+x)^4(\zeta p+x)^2(\gamma p+x)^2}\dot{x} = 0;$$

ou

$$\dot{x} + \frac{(\alpha p+x)^3(\zeta p+x)^2(\gamma p+x)^2}{(\alpha p+x)(\zeta p+x)(\gamma p+x)\frac{\dot{L}}{\dot{x}} - L(\alpha p+x)(\zeta p+x) - L(\alpha p+x)(\gamma p+x) - 2L(\zeta p+x)(\gamma p+x)}\dot{y} = 0.$$

Pour que cette équation pût devenir d'un degré < 7, il faudroit que son dénominateur fût divisible par $\alpha p + x$ ou par $\zeta p + x$, c'est-à-dire, que $2L(\zeta p + x)(\gamma p + x)$ fût divisible par $\alpha p + x$, ou que $L(\alpha p + x)(\gamma p + x)$ fût divisible par $\zeta p + x$ contre l'hypothèse.

LEMME III.

L'équation différencielle du 0 degré ne peut être produite que par l'intégrale $n = \frac{y}{p} + \frac{ap+bx}{p}$.

Celle du premier degré ne peut être produite que par l'intégrale $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2+bpx+cx^2}{p^2}$.

Celle du second degré ne peut être produite que par les trois intégrales $n = \frac{y}{p} + \frac{ap+bx}{ap+x}$, $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2+bpx+cx^2}{p(ap+x)}$, $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3+bp^2x+cpx^2+dx^3}{p^3}$.

Celle du troisième degré ne peut être produite que par les quatre intégrales $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2+bpx+cx^2}{(ap+x)^2}$, $n = \frac{y}{p} +$

$\frac{ap^3+bp^2x+cpx^2+dx^3}{p(ap+x)^2}$, $n=\frac{y}{p}+\frac{ap^3+bp^2x+cp^2x+dx^3}{p^2(ap+x)}$;

$n=\frac{y}{p}+\frac{ap^4+bp^3x+cp^2x^2+dpx^3+ex^4}{p^4}$.

Celle du quatrième degré ne peut être produite que par les sept intégrales $n=\frac{y}{p}+\frac{ap^2+bpx+cx^2}{ap^2+6px+x^2}$, $n=\frac{y}{p}+\frac{ap^3+bp^2x+cpx^2+dx^3}{(ap+x)^3}$, $n=\frac{y}{p}+\frac{ap^3+bp^2x+cpx^2+dx^3}{p(ap^2+6px+x^2)}$;

$n=\frac{y}{p}+\frac{ap^4+bp^3x+cp^2x^2+dpx^3+ex^4}{p(ap+x)^3}$;

$n=\frac{y}{p}+\frac{ap^4+bp^3x+cp^2x^2+dpx^3+ex^4}{p^2(ap+x)^2}$;

$n=\frac{y}{p}+\frac{ap^4+bp^3x+cp^2x^2+dpx^3+ex^4}{p^3(ap+x)}$;

$n=\frac{y}{p}+\frac{ap^5+bp^4x+cp^3x^2+dp^2x^3+epx^4+fx^5}{p^5}$.

Celle du cinquième degré ne peut être produite que par les neuf intégrales $n=\frac{y}{p}+\frac{ap^3+bp^2x+cpx^2+dx^3}{(ap+x)^2(6p+x)}$,

$n=\frac{y}{p}+\frac{ap^4+bp^3x+cp^2x^2+dpx^3+ex^4}{(ap+x)^4}$;

$n=\frac{y}{p}+\frac{ap^4+bp^3x+cp^2x^2+dpx^3+ex^4}{p(ap+x)^3(6p+x)}$;

$n=\frac{y}{p}+\frac{ap^4+bp^3x+cp^2x^2+dpx^3+ex^4}{p^2(ap^2+6px+x^2)}$;

$n=\frac{y}{p}+\frac{ap^5+bp^4x+cp^3x^2+dp^2x^3+epx^4+fx^5}{p(ap+x)^4}$;

$n=\frac{y}{p}+\frac{ap^5+bp^4x+cp^3x^2+dp^2x^3+epx^4+fx^5}{p^2(ap+x)^3}$;

$n=\frac{y}{p}+\frac{ap^5+bp^4x+cp^3x^2+dpx^2x^3+epx^4+fx^5}{p^3(ap+x)^2}$;

$n=\frac{y}{p}+\frac{ap^5+bp^4x+cp^3x^2+dp^2x^3+epx^4+fx^5}{p^4(ap+x)}$;

$$u = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 + bp^5x + cp^4x^2 + dp^3x^3 + ep^2x^4 + fpx^5 + gx^6}{p^6}.$$

Celle du sixième degré ne peut être produite que par les quinze intégrales $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{\alpha p^3 + 6\beta p^2x + 3\gamma px^2 + x^3}$,

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{(\alpha p^2 + 6\beta px + x^2)^2},$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{(\alpha p + x)^3 (6\beta p + x)};$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p(\alpha p^3 + 6\beta p^2x + 3\gamma px^2 + x^3)};$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{(\alpha p + x)^5},$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p(\alpha p^2 + 6\beta px + x^2)^2};$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p(\alpha p + x)^3 (6\beta p + x)};$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p^2(\alpha p + x)^2 (6\beta p + x)},$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p^3(\alpha p^2 + 6\beta px + x^2)},$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 + bp^5x + cp^4x^2 + dp^3x^3 + ep^2x^4 + fpx^5 + gx^6}{p(\alpha p + x)^5},$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 + bp^5x + cp^4x^2 + dp^3x^3 + ep^2x^4 + fpx^5 + gx^6}{p^2(\alpha p + x)^4};$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 + bp^5x + cp^4x^2 + dp^3x^3 + ep^2x^4 + fpx^5 + gx^6}{p^3(\alpha p + x)^3};$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 + bp^5x + cp^4x^2 + dp^3x^3 + ep^2x^4 + fpx^5 + gx^6}{p^4(\alpha p + x)^2};$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 + bp^5x + cp^4x^2 + dp^3x^3 + ep^2x^4 + fpx^5 + gx^6}{p^5(\alpha p + x)};$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 + bp^6x + cp^5x^2 + dp^4x^3 + ep^3x^4 + fp^2x^5 + gpx^6 + hx^7}{p^7},$$

Celle du septième degré ne peut être produite que par les dix-neuf intégrales $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 +}{(\alpha p + x)^2 (\epsilon p^2 + \gamma p x + x^2)}$, $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 +}{(\alpha p + x)^3 (\epsilon p + x)^2}$, $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 +}{(\alpha p + x)^4 (\epsilon p + x)}$, $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 +}{p(\alpha p + x)^2 (\epsilon p^2 + \gamma p x + x^2)}$, $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 +}{p^2 (\alpha p^3 + \epsilon p^2 x + \gamma p x^2 + x^3)}$, $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{(\alpha p + x)^6}$, $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{p(\alpha p + x)^3 (\epsilon p + x)^2}$, $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{p(\alpha p + x)^4 (\epsilon p + x)}$, $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{p^2 (\alpha p^2 + \epsilon p x + x^2)^2}$, $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{p^2 (\alpha p + x)^3 (\epsilon p + x)}$, $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{p^3 (\alpha p + x)^2 (\epsilon p + x)}$, $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{p^4 (\alpha p^2 + \epsilon p x + x^2)}$, $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{p(\alpha p + x)^6}$, $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{p^2 (\alpha p + x)^5}$, $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{p^3 (\alpha p + x)^4}$, $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{p^4 (\alpha p + x)^3}$, $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{p^5 (\alpha p + x)^2}$, $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{p^6 (\alpha p + x)}$, $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^8 +}{p^8}$, &c.

CONCLUSION.

1.° Si l'équation du o degré est $\dot{y} + b\dot{x} = 0$, son intégrale sera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p}$.

2.° Si l'équation du premier degré est $\dot{y} + \frac{bp + acx}{p}\dot{x} = 0$, son intégrale sera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p^2}$; & dans tout autre cas, elle sera inintégrable.

3.° Si l'équation du second degré est $\dot{y} + \frac{(ab-a).p^2}{(ap+x)^2}\dot{x} = 0$, son intégrale sera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap+bx}{ap+x}$. Si elle est $\dot{y} + \frac{(ab-a).p^2 + 2acpx + cx^2}{(ap+x)^2}\dot{x} = 0$, son intégrale sera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2+bpx+cx^2}{(ap+x)}$. Si elle est $\dot{y} + \frac{bp^2+2cpx+3dx^2}{p^2}\dot{x} = 0$, son intégrale sera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3+bp^2x+cpx^2+dx^3}{p^3}$; & dans tout autre cas, elle sera inintégrable.

4.° Si l'équation du troisième degré est $\dot{y} + \frac{(ab-2a).p^3 + (2ac-b).p^2x}{(ap+x)^3}\dot{x} = 0$, son intégrale sera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2+bpx+cx^2}{(ap+x)^2}$. Si elle est $\dot{y} + \frac{(ab-2a)p^3+(2ac-b)p^2x+3adpx^2+dx^3}{(ap+x)^3}\dot{x} = 0$, son intégrale sera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3+bp^2x+cpx^2+dx^3}{p(ap+x)^2}$. Si elle est $\dot{y} + \frac{(ab-a).p^3+2acp^2x+(3ad+c).px^2+2dx^3}{p(ap+x)^2}\dot{x} = 0$, son intégrale sera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3+bp^2x+cpx^2+dx^3}{p^2(ap+x)}$. Si elle est $\dot{y} + \frac{bp^3+2cp^2x+3dpx^2+4ex^3}{p^3}\dot{x} = 0$, son intégrale sera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4+bp^3x+cp^2x^2+dpx^3+ex^4}{p^4}$; & dans tout autre cas, elle sera inintégrable.

5.° Si l'équation du quatrième degré est $\dot{y} + \frac{(ab-6a)p^4+(2ac-2a)p^3x+(-b+6c)p^2x^2}{(ap^2+6px+x^2)^2}\dot{x} = 0$;

son

son intégrale sera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{ap^2 + 6px + x^2}$. Si elle est

$\dot{y} + \frac{(ab - 3a)p^4 + (2ac - 2b)p^3x + (3ad - c)p^2x^2}{(ap + x)^4} \dot{x} = 0$,

son intégrale sera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{(ap + x)^3}$.

Si elle est $\dot{y} + \frac{(ab - 6a)p^4 + (2ac - 2a)p^3x + (3ad + 6c - b)p^2x^2 + 26dpx^3 + dx^4}{(ap^2 + 6px + x^2)^2} \dot{x} = 0$, son intégrale sera

$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p(ap^2 + 6px + x^2)}$. Si elle est

$\dot{y} + \frac{(ab - 3a)p^4 + (2ac - 2b)p^3x + (3ad - c)p^2x^2 + 4acpx^3 + ex^4}{(ap + x)^4} \dot{x} = 0$, son intégrale sera

$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p(ap + x)^3}$. Si elle

est $\dot{y} + \frac{(ab - 2a)p^4 + (2ac - b)p^3x + 3adp^2x^2 + (4ae + d)px^3 + 2ex^4}{p(ap + x)^3} \dot{x} = 0$, son intégrale sera

$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p^2(ap + x)^2}$. Si elle

est $\dot{y} + \frac{(ab - a)p^4 + 2acp^3x + (3ad + c)p^2x^2 + (4ae + 2d)px^3 + 3ex^4}{p^2(ap + x)^2} \dot{x} = 0$, son intégrale sera

$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p^3(ap + x)}$. Si elle est

$\dot{y} + \frac{bp^4 + 2cp^3x + 3dp^2x^2 + 4epx^3 + 5fx^4}{p^4} \dot{x} = 0$,

son intégrale sera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p^5}$; & dans tout autre cas, elle sera inintégrable.

6.° Si l'équation du cinquième degré eſt

$$\dot{y} + \frac{[\alpha\mathfrak{C}b - (\alpha + 2\mathfrak{C}).a]p^5 + (-\mathfrak{C}b + 2\alpha\mathfrak{C}c - 3a)p^4x + (-2b + ac + 3\alpha\mathfrak{C}d)p^3x^2 + [-c + (2\alpha + \mathfrak{C}).d]p^2x^3}{(\alpha p + x)^3(\mathfrak{C}p + x)^2}\dot{x} = 0,$$

ſon intégrale ſera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{(\alpha p + x)^2(\mathfrak{C}p + x)}$.

Si elle eſt $\dot{y} + \frac{(ab - 4a)p^5 + (2ac - b)p^4x + (3ad - 2c)p^3x^2 + (4ae - d)p^2x^3}{(\alpha p + x)^5}\dot{x} = 0$, ſon intégrale ſera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{(\alpha p + x)^4}$. Si elle eſt

$$\dot{y} + \frac{[\alpha\mathfrak{C}b - (\alpha + 2\mathfrak{C}).a]p^5 + (2\alpha\mathfrak{C}c - \mathfrak{C}b - 3a)p^4x + (3\alpha\mathfrak{C}d + \alpha c - 2b)p^3x^2 + [4\alpha\mathfrak{C}e + (2\alpha + \mathfrak{C})d - c]p^2x^3 + (3\alpha + 2\mathfrak{C})epx^4 + ex^5}{(\alpha p + x)^3(\mathfrak{C}p + x)^2}\dot{x} = 0,$$

ſon intégrale ſera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p(\alpha p + x)^2(\mathfrak{C}p + x)}$. Si elle eſt

$$\dot{y} + \frac{(ab - \mathfrak{C}a)p^5 + (2ac - 2a)p^4x + (3ad + \mathfrak{C}c - b)p^3x^2 + (4ae + 2\mathfrak{C}d)p^2x^3 + (3\mathfrak{C}e + d)px^4 + 2ex^5}{p(\alpha p^2 + \mathfrak{C}px + x^2)^2}\dot{x} = 0,$$

ſon intégrale ſera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p^2(\alpha p^2 + \mathfrak{C}px + x^2)}$.

Si elle eſt $\dot{y} + \frac{(ab - 4a)p^5 + (2ac - 3b)p^4x + (3ad - 2c)p^3x^2 + (4ae - d)p^2x^3 + 5afpx^4 + fx^5}{(\alpha p + x)^5}\dot{x} = 0$, ſon intégrale ſera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p(\alpha p + x)^4}$.

Si elle eſt $\dot{y} + \frac{(ab - 3a)p^5 + (2ac - 2b)p^4x + (3ad - c)p^3x^2 + 4acp^2x^3 + (5af + e)px^4 + 2fx^5}{p(\alpha p + x)^4}\dot{x} = 0$, ſon intégrale ſera

$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p^2(ap+x)^3}$.

Si elle eſt $\dot{y} + \frac{(\alpha b - 2a)p^5 + (2\alpha c - b)p^4x + 3\alpha dp^3x^2 + (4\alpha e + d)p^2x^3 + (5\alpha f + 2e)px^4 + 3fx^5}{p^2(ap+x)^3}\dot{x} = 0$, ſon intégrale ſera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p^3(ap+x)^2}$.

Si elle eſt $\dot{y} + \frac{(\alpha b - a)p^5 + 2\alpha cp^4x + (3\alpha d + c)p^3x^2 + (4\alpha e + 2d)p^2x^3 + (5\alpha f + 3e)px^4 + 4fx^5}{p^3(ap+x)^2}\dot{x} = 0$, ſon intégrale ſera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p^4(ap+x)}$.

Si elle eſt

$\dot{y} + \frac{bp^5 + 2cp^4x + 3dp^3x^2 + 4ep^2x^3 + 5fpx^4 + 6gx^5}{p^5}\dot{x} = 0$,

ſon intégrale ſera

$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 + bp^5x + cp^4x^2 + dp^3x^3 + ep^2x^4 + fpx^5 + gx^6}{p^6}$;

& dans tout autre cas, elle ſera inintégrable.

7.° Si l'équation du ſixième degré eſt

$\dot{y} + \frac{(\alpha b - 6a)p^6 + (2\alpha c - 2\gamma a)p^5x + (-\gamma b + 6c + 3\alpha d - 3a)p^4x^2 + (-2b + 2\gamma d)p^3x^3 + (-c + \gamma d)p^2x^4}{(ap^3 + \beta p^2x + \gamma px^2 + x^3)^2}\dot{x} = 0$, ſon intégrale ſera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{ap^3 + \beta p^2x + \gamma px^2 + x^3}$. Si elle eſt

$\dot{y} + \frac{(b\alpha - 2a\beta)p^6 + (2c\alpha - b\beta - 4a)p^5x + (3d\alpha - 3b)p^4x^2 + (4e\alpha + d\beta - 2c)p^3x^3 + (2e\beta - d)p^2x^4}{(ap^2 + \beta px + x^2)^3}\dot{x} = 0$, ſon inté-

grale ſera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{(ap^2 + 6px + x^2)^2}$.

Si elle eſt $\dot{y} + \frac{[ba6 - a.(a + 36)]p^6 + (2ca6 - 2b6 - 4a)p^5x + [3da6 + c.(a - 6) - 3b]p^4x^2 + (4ea6 + 2da - 2c)p^3x^3 + [e.(3a + 6) - d]p^2x^4}{(ap + x)^4 (6p + x)^2} \dot{x} = 0$, l'intégrale ſera

$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{(ap + x)^3 (6p + x)}$.

Si elle eſt $\dot{y} + \frac{(ba - a6)p^6 + (2ca - 2a\gamma)p^5x + (3da + c6 - b\gamma - 3a)p^4x^2 + (4ea + 2d6 - 2b)p^3x^3 + (3e6 + d\gamma - c)p^2x^4 + 2e\gamma px^5 + ex^6}{(ap^3 + 6p^2x + \gamma px^2 + x^3)^2} \dot{x} = 0$, l'intégrale ſera

$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p(ap^3 + 6p^2x + \gamma px^2 + x^3)}$.

Si elle eſt $\dot{y} + \frac{(ba - 5a)p^6 + (2ca - 4b)p^5x + (3da - 3c)p^4x^2 + (4ea - 2d)p^3x^3 + (5fa - e)p^2x^4}{(ap + x)^6} \dot{x} = 0$, l'intégrale ſera

$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{(ap + x)^5}$.

Si elle eſt $\dot{y} + \frac{(ba - a6)p^6 + (2ca - 2a)p^5x + (3da + c6 - b)p^4x^2 + (4ea + 2d6)p^3x^3 + (5fa + 3e6 + d)p^2x^4 + (4f6 + 2e)px^5 + 3fx^6}{(ap^2 + 6px + x^2)^3} \dot{x} = 0$, l'intégrale ſera

$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p(ap^2 + 6px + x^2)^2}$.

Si elle eſt $\dot{y} + \frac{[ba6 - a.(a + 36)]p^6 + (2a66c - 2b6 - 4a)p^5x + [3a66d + c.(a - 6) - 3b]p^4x^2 +$

$(4a\mathfrak{C}e + 2d\alpha - 2c)p^3x^1 + [5fa\mathfrak{C} + e.(3\alpha + \mathfrak{C}) - d]p^2x^4$

$+ f.(4\alpha + 2\mathfrak{C})px^5 + fx^6 \over (\alpha p + x)^4 (\mathfrak{C}p + x)^2$ $\dot{x} = 0$, l'intégrale ſera

$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p(\alpha p + x)^3 (\mathfrak{C}p + x)}$.

Si elle eſt $\dot{y} +$ $[b\alpha\mathfrak{C} - a.(\alpha + 2\mathfrak{C})]p^6 + (2c\alpha\mathfrak{C} -$

$b\mathfrak{C} - 3a)p^5x + (3d\alpha\mathfrak{C} + c\alpha - 2b)p^4x^2 + [4e\alpha\mathfrak{C} +$

$d.(2\alpha + \mathfrak{C}) - c]p^3x^3 + [5fa\mathfrak{C} + e.(3\alpha + 2\mathfrak{C})]p^2x^4 +$

$[f.(4\alpha + 3\mathfrak{C}) + e]px^5 + 2fx^6 \over p(\alpha p + x)^3 (\mathfrak{C}p + x)^2$ $\dot{x} = 0$, l'intégrale ſera

$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p^2(\alpha p + x)^2 (\mathfrak{C}p + x)}$.

Si elle eſt $\dot{y} +$ $(b\alpha - a\mathfrak{C})p^6 + (2c\alpha - 2a)p^5x + (3d\alpha +$

$c\mathfrak{C} - b)p^4x^2 + (4e\alpha + 2d\mathfrak{C})p^3x^3 + (5f\alpha + 3e\mathfrak{C} + d)p^2x^4 +$

$(4f\mathfrak{C} + 2e)px^5 + 3fx^6 \over p^2(\alpha p^2 + \mathfrak{C}px + x^2)^2$ $\dot{x} = 0$, l'intégrale ſera

$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p^3(\alpha p^2 + \mathfrak{C}px + x^2)}$.

Si elle eſt $\dot{y} +$ $(b\alpha - 5a)p^6 + (2c\alpha - 4b)p^5x + (3d\alpha - 3c)p^4x^2 +$

$(4e\alpha - 2d)p^3x^3 + (5f\alpha - e)p^2x^4 + 6g\alpha px^5 + gx^6 \over (\alpha p + x)^6$ $\dot{x} = 0$,

l'intégrale ſera

$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 + bp^5x + cp^4x^2 + dp^3x^3 + ep^2x^4 + fpx^5 + gx^6}{p(\alpha p + x)^5}$,

Si elle eſt $\dot{y} +$ $(b\alpha - 4a)p^6 + (2c\alpha - 3b)p^5x + (3d\alpha - 2c)p^4x^2 +$

$(4e\alpha - d)p^3x^3 + 5fap^2x^4 + (6g\alpha + f)px^5 + 2gx^6 \over p(\alpha p + x)^5$ $\dot{x} = 0$,

l'intégrale ſera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{p^2(\alpha p + x)^4}$. Si elle eſt

$\dot{y} + \frac{(ba-3a)p^6+(2ca-2b)p^5x+(3da-c)p^4x^2+4eap^3x^3+(5fa+e)p^2x^4+(6ga+2f)px^5+3gx^6}{p^2(ap+x)^2}\dot{x} = 0$, l'intégrale sera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6+}{p^3(ap+x)^2}$. Si elle eſt

$\dot{y} + \frac{(ba-2a)p^6+(2ca-b)p^5x+3dap^4x^2+(4ea+d)p^3x^3+(5fa+2e)p^2x^4+(6ga+3f)px^5+4gx^6}{p^3(ap+x)^3}\dot{x} = 0$, l'intégrale ſera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6+}{p^4(ap+x)^2}$. Si elle eſt

$\dot{y} + \frac{(ba-a)p^6+2cap^5x+(3da+c)p^4x^2+(4ea+2d)p^3x^3+(5fa+3e)p^2x^4+(6ga+4f)px^5+5gx^6}{p^4(ap+x)^2}\dot{x} = 0$, l'intégrale ſera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6+}{p^5(ap+x)}$. Si elle eſt

$\dot{y} + \frac{bp^6+2cp^5x+3dp^4x^2+4ep^3x^3+5fp^2x^4+6gpx^5+7hx^6}{p^6}\dot{x} = 0$, l'intégrale ſera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7+}{p^7}$; & dans tout autre cas, elle ſera inintégrable.

L'on pourra donc conſtruire la Table qui ſuit.

TABLE PREMIÉRE.

FORMULES DES FLUXIONS, ET DE LEURS FLUENTES.

0^d

$$\dot{y} + b\dot{x} = 0. \ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p}.$$

1^d

$$\dot{y} + \frac{bp + 2cx}{p}\dot{x} = 0. \ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p^2}.$$

2^d

$$\dot{y} + \frac{(ab - a).p^2}{(ap + x)^2}\dot{x} = 0. \ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{ap + x}.$$

$$\dot{y} + \frac{(ab - a).p^2 + 2acpx + cx^2}{(ap + x)^2}\dot{x} = 0. \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p(ap + x)}.$$

$$\dot{y} + \frac{bp^2 + 2cpx + 3dx^2}{p^2}\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p^3}.$$

3^d

$$\dot{y} + \frac{(ab - 2a).p^3 + (2ac - b).p^2x}{(ap + x)^3}\dot{x} = 0. \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{(ap + x)^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{(ab-2a)p^3+(2ac-b)p^2x+3adpx^2+dx^3}{(ap+x)^3}\dot{x} = 0. \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3+bp^2x+cpx^2+dx^3}{p(ap+x)^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{(ab-a).p^3+2acp^2x+(3ad+c).px^2+2dx^3}{p(ap+x)^2}\dot{x} = 0. \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3+bp^2x+cpx^2+dx^3}{p^2(ap+x)}.$$

$$\dot{y} + \frac{bp^3+2cp^2x+3dpx^2+4ex^3}{p^3}\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4+bp^3x+cp^2x^2+dpx^3+ex^4}{p^4}.$$

4d

$$\dot{y} + \frac{(ab-6a)p^4+(2ac-2a)p^3x+(-b+6c)p^2x^2}{(ap^2+6px+x^2)^2}\dot{x} = 0.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2+bpx+cx^2}{ap^2+6px+x^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{(ab-3a)p^4+(2ac-2b)p^3x+(3ad-c)p^2x^2}{(ap+x)^4}\dot{x} = 0.$$

$$\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3+bp^2x+cpx^2+dx^3}{(ap+x)^3}.$$

$$\dot{y} + \frac{(ab-6a)p^4+(2ac-2a)p^3x+(3ad+6c-b)p^2x^2}{+2\,6dpx^3+dx^4}\dot{x} = 0.$$

$$\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3+bp^2x+cpx^2+dx^3}{p(ap^2+6px+x^2)}.$$

$$\dot{y} + \frac{(ab-3a)p^4+(2ac-2b)p^3x+(3ad-c)p^2x^2}{+4aepx^3+ex^4}\dot{x} = 0.$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4+bp^3x+cp^2x^2+dpx^3+ex^4}{p(ap+x)^4};$$

$\dot{y} +$

$$\dot{y} + \frac{(ab - 2a)p^4 + (2ac - b)p^3x + 3adp^2x^2 + (4ae + d)px^3 + 2ex^4}{p(ap + x)^3}\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p^2(ap + x)^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{(ab - a)p^4 + 2acp^3x + (3ad + c)p^2x^2 + (4ae + 2d)px^3 + 3ex^4}{p^2(ap + x)^2}\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p^3(ap + x)}.$$

$$\dot{y} + \frac{bp^4 + 2cp^3x + 3dp^2x^2 + 4epx^3 + 5fx^4}{p^4}\dot{x} = 0..$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p^5}.$$

5d

$$\dot{y} + \frac{[\alpha\mathcal{C}b - (\alpha + 2\mathcal{C}).a]p^5 + (-\mathcal{C}b + 2\alpha\mathcal{C}c - 3a)p^4x + (-2b + \alpha c + 3\alpha\mathcal{C}d)p^3x^2 + [-c + (2\alpha + \mathcal{C}).d]p^2x^3}{(ap + x)^3(\mathcal{C}p + x)^2}\dot{x} = 0..$$

$$\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{(ap + x)^2(\mathcal{C}p + x)}.$$

$$\dot{y} + \frac{(ab - 4a)p^5 + (2ac - b)p^4x + (3ad - 2c)p^3x^2 + (4ae - d)p^2x^3}{(ap + x)^5}\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{(ap + x)^4}.$$

$$\dot{y} + \frac{[\alpha\mathcal{C}b - (\alpha + 2\mathcal{C}).a]p^5 + (2\alpha\mathcal{C}c - \mathcal{C}b - 3a)p^4x + (3\alpha\mathcal{C}d + \alpha c - 2b)p^3x^2 + (3\alpha + 2\mathcal{C})epx^4 + ex^5}{(ap + x)^3(\mathcal{C}p + x)^2}\dot{x} = 0.$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p(ap + x)^2(\mathcal{C}p + x)}.$$

$$\dot{y} + \frac{(ab-6a)p^5+(2ac-2a)p^4x+(3ad+6c-b)p^3x^2+(4ae+2bd)p^2x^3+(3be+d)px^4+2ex^5}{p(ap^2+bpx+x^2)^2}\dot{x} = 0. \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4+bp^3x+cp^2x^2+dpx^3+ex^4}{p^2(ap^2+bpx+x^2)}.$$

$$\dot{y} + \frac{(ab-4a)p^5+(2ac-3b)p^4x+(3ad-2c)p^3x^2+(4ae-d)p^2x^3+5afpx^4+fx^5}{(ap+x)^5}\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5+bp^4x+cp^3x^2+dp^2x^3+epx^4+fx^5}{p(ap+x)^4}.$$

$$\dot{y} + \frac{(ab-3a)p^5+(2ac-2b)p^4x+(3ad-c)p^3x^2+4acp^2x^3+(5af+e)px^4+2fx^5}{p(ap+x)^4}\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5+bp^4x+cp^3x^2+dp^2x^3+epx^4+fx^5}{p^2(ap+x)^3}.$$

$$\dot{y} + \frac{(ab-2a)p^5+(2ac-b)p^4x+3adp^3x^2+(4ae+d)p^2x^3+(5af+2e)px^4+3fx^5}{p^2(ap+x)^3}\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5+}{p^3(ap+x)^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{(ab-a)p^5+2acp^4x+(3ad+c)p^3x^2+(4ae+2d)p^2x^3+(5af+3e)px^4+4fx^5}{p^3(ap+x)^2}\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5+}{p^4(ap+x)}.$$

$$\dot{y} + \frac{bp^5+2cp^4x+3dp^3x^2+4ep^2x^3+5fpx^4+6gx^5}{p^5}\dot{x} = 0.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5+}{p^6}.$$

6d

$$\dot{y} + \frac{(\alpha b - 6a)p^6 + (2\alpha c - 2\gamma a)p^5x + (-\gamma b + 6c + 3\alpha d - 3a)p^4x^2 + (-2b + 2\beta d)p^3x^3 + (-c + \gamma d)p^2x^4}{(\alpha p^3 + \beta p^2x + \gamma px^2 + x^3)^2}\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{\alpha p^3 + \beta p^2x + \gamma px^2 + x^3}.$$

$$\dot{y} + \frac{(\alpha b - 2\beta a)p^6 + (-\beta b + 2\alpha c - 4a)p^5x + (-3b + 3\alpha d)p^4x^2 + (-2c + \beta d + 4\alpha e)p^3x^3 + (-d + 2\beta e)p^2x^4}{(\alpha p^2 + \beta px + x^2)^3}\dot{x} = 0. \ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{(\alpha p^2 + \beta px + x^2)^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{(\alpha\beta b - \alpha a - 3\beta a)p^6 + (2\alpha\beta c - 2\beta b - 4a)p^5x + (3\alpha\beta d + \alpha c - \beta c - 3b)p^4x^2 + (4\alpha\beta e + 2\alpha d - 2c)p^3x^3 + (3\alpha e + \beta e - d)p^2x^4}{(\alpha p + x)^4(\beta p + x)^2}\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{(\alpha p + x)^3(\beta p + x)}.$$

$$\dot{y} + \frac{(\alpha b - \beta a)p^6 + (2\alpha c - 2\gamma a)p^5x + (3\alpha d + \beta c - \gamma b - 3a)p^4x^2 + (4\alpha e + 2\beta d - 2b)p^3x^3 + (3\beta e + \gamma d - c)p^2x^4 + 2\gamma epx^5 + ex^6}{(\alpha p^3 + \beta p^2x + \gamma px^2 + x^3)^2}\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p(\alpha p^3 + \beta p^2x + \gamma px^2 + x^3)}.$$

$$\dot{y} + \frac{(\alpha b - 5a)p^6 + (2\alpha c - 4b)p^5x + (3\alpha d - 3c)p^4x^2 + (4\alpha e - 2d)p^3x^3 + (5\alpha f - e)p^2x^4}{(\alpha p + x)^6}\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{(\alpha p + x)^5}.$$

$$\dot{y} + \frac{(ab - \mathfrak{G}a)p^6 + (2ac - 2a)p^5x + (3ad + \mathfrak{G}c - b)p^4x^2 + (4ae + 2\mathfrak{G}d)p^3x^3 + (5af + 3\mathfrak{G}e + d)p^2x^4 + (4\mathfrak{G}f + 2e)px^5 + 3fx^6}{(ap^2 + \mathfrak{G}px + x^2)^3}\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p(ap^2 + \mathfrak{G}px + x^2)^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{(a\mathfrak{G}b - aa - 3\mathfrak{G}a)p^6 + (2a\mathfrak{G}c - 2\mathfrak{G}b - 4a)p^5x + (3a\mathfrak{G}d + ac - \mathfrak{G}c - 3b)p^4x^2 + (4a\mathfrak{G}e + 2ad - 2c)p^3x^3 + (5a\mathfrak{G}f + 3ae + \mathfrak{G}e - d)p^2x^4 + (4af + 2\mathfrak{G}f)px^5 + fx^6}{(ap + x)^4(\mathfrak{G}p + x)^2}\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p(ap + x)^3(\mathfrak{G}p + x)}.$$

$$\dot{y} + \frac{(a\mathfrak{G}b - aa - 2\mathfrak{G}a)p^6 + (2a\mathfrak{G}c - \mathfrak{G}b - 3a)p^5x + (3a\mathfrak{G}d + ac - 2b)p^4x^2 + (4a\mathfrak{G}e + 2ad + \mathfrak{G}d - c)p^3x^3 + (5a\mathfrak{G}f + 3ae + 2\mathfrak{G}e)p^2x^4 + (4af + 3\mathfrak{G}f + e)px^5 + 2fx^6}{p(ap + x)^3(\mathfrak{G}p + x)^2}\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p^2(ap + x)^2(\mathfrak{G}p + x)}.$$

$$\dot{y} + \frac{(ab - \mathfrak{G}a)p^6 + (2ac - 2a)p^5x + (3ad + \mathfrak{G}c - b)p^4x^2 + (4ae + 2\mathfrak{G}d)p^3x^3 + (5af + 3\mathfrak{G}e + d)p^2x^4 + (4\mathfrak{G}f + 2e)px^5 + 3fx^6}{p^2(ap^2 + \mathfrak{G}px + x^2)^2}\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p^3(ap^2 + \mathfrak{G}px + x^2)}.$$

$$\dot{y} + \frac{(ab - 5a)p^6 + (2ac - 4b)p^5x + (3ad - 3c)p^4x^2 + (4ae - 2d)p^3x^3 + (5af - e)p^2x^4 + 6agpx^5 + gx^6}{(ap + x)^6} \dot{x} = 0.$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 + bp^5x + cp^4x^2 + dp^3x^3 + ep^2x^4 + fpx^5 + gx^6}{p(ap + x)^5}.$$

$$\dot{y} + \frac{(ab - 4a)p^6 + (2ac - 3b)p^5x + (3ad - 2c)p^4x^2 + (4ae - d)p^3x^3 + 5afp^2x^4 + (6ag + f)px^5 + 2gx^6}{p(ap + x)^5} \dot{x} = 0.$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{p^2(ap + x)^4}.$$

$$\dot{y} + \frac{(ab - 3a)p^6 + (2ac - 2b)p^5x + (3ad - c)p^4x^2 + 4aep^3x^3 + (5af + e)p^2x^4 + (6ag + 2f)px^5 + 3gx^6}{p^2(ap + x)^4} \dot{x} = 0.$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{p^3(ap + x)^3}.$$

$$\dot{y} + \frac{(ab - 2a)p^6 + (2ac - b)p^5x + 3adp^4x^2 + (4ae + d)p^3x^3 + (5af - 2e)p^2x^4 + (6ag + 3f)px^5 + 4gx^6}{p^3(ap + x)^3} \dot{x} = 0.$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{dp^6 +}{p^4(ap + x)^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{(ab - a)p^6 + 2acp^5x + (3ad + c)p^4x^2 + (4ae + 2d)p^3x^3 + (5af + 3e)p^2x^4 (6ag + 4f)px^5 + 5gx^6}{p^4(ap + x)^2} \dot{x} = 0.$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{p^5(ap + x)}.$$

$$\dot{y} + \frac{bp^6 + 2cp^5x + 3dp^4x^2 + 4ep^3x^3 + 5fp^2x^4 + 6gpx^5 + 7hx^6}{p^6} \dot{x} = 0. \quad n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{p7}.$$

Soit, par exemple, l'équation

$$\dot{y} + \frac{-8p^2x^3 + px^4 + x^5}{-4p^5 + 8p^4x - p^3x^2 - 5p^2x^3 + px^4 + x^5}\dot{x} = 0,$$

cette équation ne peut se rapporter qu'à la troisième ou à la cinquième formule de son degré. En la rapportant à la troisième formule, j'aurai

$$-4p^5 + 8p^4x - p^3x^2 - 5p^2x^3 + px^4 + x^5 = (\alpha p + x)^3 (\mathcal{C}p + x)^2 = \alpha^3\mathcal{C}^2p^5 + 3\alpha^2\mathcal{C}^2p^4x + 2\alpha^3\mathcal{C} + 3\alpha\mathcal{C}^2p^3x^2 + \mathcal{C}^2p^2x^3 + 2\mathcal{C}px^4 + x^5; + 6\alpha^2\mathcal{C} + 6\alpha\mathcal{C} + 3\alpha + \alpha^3 + 3\alpha^2$$

donc $\alpha^3\mathcal{C}^2 + 4 = 0$, $3\alpha^2\mathcal{C}^2 + 2\alpha^3\mathcal{C} - 8 = 0$, $3\alpha\mathcal{C}^2 + 6\alpha^2\mathcal{C} + \alpha^3 + 1 = 0$, $\mathcal{C}^2 + 6\alpha\mathcal{C} + 3\alpha^2 + 5 = 0$, $2\mathcal{C} + 3\alpha - 1 = 0$; donc $\mathcal{C} = \frac{1-3\alpha}{2}$; donc $5\alpha^2 - 2\alpha - 7 = 0$; $5\alpha^3 + 6\alpha^2 - 3\alpha - 4 = 0$, $15\alpha^4 - 14\alpha^3 + 3\alpha^2 - 32 = 0$, $9\alpha^5 - 6\alpha^4 + \alpha^3 + 16 = 0$; donc $\alpha^2 = \frac{2\alpha+7}{5}$, $\alpha^2 = \frac{3\alpha+4}{5\alpha+6}$. En égalant ces deux valeurs de α^2, on aura $5\alpha^2 + 16\alpha + 11 = 0$, ou $\alpha^2 = \frac{-16\alpha-11}{5}$; donc $2\alpha + 7 = -16\alpha - 11$; donc $\alpha = -1$.

Cette valeur de α satisfait à toutes nos équations, on aura $\mathcal{C} = 2$. Je substitue ces valeurs de α & de $\mathcal{C}$ dans le numérateur de la formule, pour le comparer ensuite avec celui de l'équation donnée. J'aurai $-2b - 3a = 0$, $-4c - 2b - 3a = 0$; donc $c = 0$. J'aurai $3d + b = 0$, $e = 1$. Soit $b = 0$, j'aurai $d = 0$, $a = 0$, & l'intégrale sera $u = \frac{y}{p} + \frac{x^4}{p(-p+x)^2(2p+x)}$.

Si l'on eut donné à b quelqu'autre valeur, l'on auroit eu la même intégrale sous une autre forme : cet exemple est celui de M. Newton dans son *Traité des Quadratures.*

Soit l'équation

$$\dot{y} + \frac{-12p^5x - 12p^3x^3}{p^6 - 2p^5x - p^4x^2 + 4p^3x^3 - p^2x^4 - 2px^5 + x^6}\dot{x} = 0,$$

le dénominateur du coëfficient de $\dot{x}$ dans cette équation peut se rapporter au dénominateur du coëfficient de $\dot{x}$ de la première, seconde, troisième, quatrième, cinquième, sixième, septième & dixième formule; mais le numérateur du coëfficient de $\dot{x}$ ne peut se rapporter qu'au numérateur de la première, seconde, troisième & cinquième formule; par conséquent si cette équation est intégrable, elle le sera par la première, ou par la seconde, ou par la troisième, ou par la cinquième formule.

Soit donc 1.° $p^6 - 2p^5x - p^4x^2 + 4p^3x^3 - p^2x^4 - 2p^5 + x^6 = (\alpha p^3 + \beta p^2x + \gamma px^2 + x^3)^2 = \alpha^2p^6 + 2\alpha\beta p^5x + \beta^2p^4x^2 + 2\beta\gamma p^3x^3 + \gamma^2p^2x^4 + 2\alpha\gamma + 2\alpha + 2\beta + 2\gamma px^5 + x^6$; donc $\gamma = -1$, $\beta = -1$, $\alpha = 1$. Je substitue ces valeurs dans le numérateur de la formule, pour le comparer avec celui de l'équation. J'aurai $(b + a)p^6 + (2c + 2a)p^5x + (b - c + 3d - 3a)p^4x^2 + (-2b - 2d)p^3x^3 + (-c - d)p^2x^4 = -12p^5x - 12p^3x^3$; donc $b + a = 0$, $c + a = -6$, $b - c + 3d - 3a = 0$, $b + d = 6$, $(c + d) = 0$; donc $b - c = 6$, & $b - c = 0$, ce qui est absurde; par conséquent notre équation n'appartient pas à la première formule.

De l'opération précédente il suit que le dénominateur $p^6 - 2p^5x -$ &c. est un quarré, & que par conséquent notre équation ne peut pas appartenir à la seconde formule; elle ne peut pas non plus appartenir à la cinquième, car nous avons trouvé $\alpha = 1, \mathcal{C} = -1, \gamma = -1$, & dans la cinquième formule α étant $= 1$, $\mathcal{C}$ seroit $= 3$, & $\gamma = 3$; il ne reste donc plus que la troisième formule à laquelle notre équation puisse se rapporter. On aura $p^6 - 2p^5x - p^4x^2 + 4p^3x^3 - p^2x^4 - 2px^5 + x^6 = (\alpha p + x)^4 (\mathcal{C}p + x)^2 = (\alpha^2\mathcal{C}p^3 + 2\alpha\mathcal{C}p^2x + \alpha^2 + \mathcal{C}px^2 + x^3)^2$; donc $\alpha^2\mathcal{C} = 1$, $2\alpha\mathcal{C} + \alpha^2 = -1$, $+ 2\alpha$ $2\alpha + \mathcal{C} = -1$; donc $\mathcal{C} = -2\alpha - 1$; donc $-2\alpha^3 - \alpha^2 = 1$, $3\alpha^2 + 2\alpha = 1$; donc $\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0$; donc $\alpha + 1 = 0$; donc $\alpha = -1$; donc $\mathcal{C} = 1$. Je substitue ces valeurs de α & de $\mathcal{C}$ dans le numérateur de la troisième formule, pour le comparer ensuite avec celui de l'équation. J'aurai $-b - 2a = 0$, $-2c - 2b - 4a = -12$, $-3d - 2c - 3b = 0$, $-4e - 2d - 2c = -12$, $-2e - d = 0$; donc $b = -2a$, $d = -2e$; donc $c = 6$, donc $e - 2 + a = 0$. Soit $e = 2$; donc $a = 0$, $b = 0$, $d = -4$, l'intégrale sera $n = \frac{y}{p} + \frac{6p^2x^2 - 4px^3 + 2x^4}{(-p+x)^3(p+x)}$.

L'on voit qu'il faut bien des conditions pour qu'une de ces équations-ci soit intégrable; mais si elle n'est pas intégrable absolument, elle pourroit être intégrable par logarithmes, & si elle n'est intégrable ni absolument, ni par logarithmes,

logarithmes; elle pourroit être intégrable en partie absolument & en partie par logarithmes.

Quoique tout ceci n'appartienne pas à notre sujet, ayant trouvé la solution complète de ce problème, j'ai cru que je ne ferois pas mal de la mettre ici.

De même que nous avons construit la Table précédente qui contient par ordre toutes les équations différencielles possibles à intégrales absolues, l'on construira la Table suivante qui contient aussi par ordre toutes les équations différencielles possibles à intégrales purement logarithmiques.

TABLE II.

DES FLUXIONS LOGARITHMIQUES,

ET DE LEURS FLUENTES.

1 d

$$\dot{y} + \frac{qp}{Ap + x}\,\dot{x} = 0 \ldots\ n = \frac{y}{p} + q\,l\,\frac{Ap + x}{p}.$$

2 d

$$\ddot{y} + \frac{+ qBp^2 + qpx \atop + rA \quad + r}{(Ap + x)\,(Bp + x)}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ n = \frac{y}{p} + q\,l\,\frac{Ap + x}{p} + r\,l\,\frac{Bp + x}{p}.$$

$$\ddot{y} + \frac{qBp^2 + 2qpx}{Ap^2 + Bpx + x^2}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ n = \frac{y}{p} + q\,l\,\frac{Ap^2 + Bpx + x^2}{p^2}.$$

3^d

$$\dot{y} + \frac{\begin{array}{l} +qBCp^3 + q(B+C)p^2x + qpx^2 \\ +rAC + r(A+C) + r \\ +sAB + s(A+B) + s \end{array}}{(Ap+x)(Bp+x)(Cp+x)}\dot{x} = 0. \ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + ql\frac{Ap+x}{p} + rl\frac{Bp+x}{p} + sl\frac{Cp+x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{\begin{array}{l} +qBCp^3 + q(B+2C)p^2x + 2qpx^2 \\ +rA + rB + r \end{array}}{(Ap^2+Bpx+x^2)(Cp+x)}\dot{x} = 0. \ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + ql\frac{Ap^2+Bpx+x^2}{p^2} + rl\frac{Cp+x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{qBp^3 + 2qCp^2x + 3qpx^2}{Ap^3+Bp^2x+Cpx^2+x^3}\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + ql\frac{Ap^3+Bp^2x+Cpx^2+x^3}{p^3}.$$

4^d

$$\dot{y} + \frac{\begin{array}{l} +qBCDp^4 + q(BC+BD+CD)p^3x \\ +rACD + r(AC+AD+CD) \\ +sABD + s(AB+AD+BD) \\ +tABC + t(AB+AC+BC) \end{array}}{\begin{array}{l} +q(B+C+D)p^2x^2 + qpx^3 \\ +r(A+C+D) + r \\ +s(A+B+D) + s \\ +t(A+B+C) + t \end{array}}\dot{x} = 0. \ldots$$

$$(Ap+x)(Bp+x)(Cp+x)(Dp+x)$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + ql\frac{Ap+x}{p} + rl\frac{Bp+x}{p} + sl\frac{Cp+x}{p} + tl\frac{Dp+x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{\begin{array}{l} +qBCDp^4 + q(BC+BD+2CD)p^3x \\ +rAD + r(A+BD) \\ +sAC + s(A+BC) \end{array}}{\begin{array}{l} +q(B+2C+2D)p^2x^2 + 2qpx^3 \\ +r(B+D) + r \\ +s(B+C) + s \end{array}}\dot{x} = 0. \ldots$$

$$(Ap^2+Bpx+x^2)(Cp+x)(Dp+x)$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + q\,l\,\frac{Ap^2 + Bpx + x^2}{p^2} + r\,l\,\frac{Cp + x}{p} + s\,l\,\frac{Dp + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{\begin{matrix} + qBCp^4 + q(BD + 2C)p^3x + q(B + 2D)p^2x^2 \\ + rAD + r(BD + 2A) + r(D + 2B) \end{matrix}}{\begin{matrix} + 2qpx^3 \\ + 2r \end{matrix}} \dot{x} = 0. \ldots\ldots;$$

$$n = \frac{y}{p} + q\,l\,\frac{Ap^2 + Bpx + x^2}{p^2} + r\,l\,\frac{Cp^2 + Dpx + x^2}{p^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{\begin{matrix} + qBDp^4 + q(2CD + B)p^3x + q(3D + 2C)p^2x^2 \\ + rA + rB + rC \end{matrix}}{\begin{matrix} + 3qpx^3 \\ + r \end{matrix}} \dot{x} = 0. \ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + q\,l\,\frac{Ap^3 + Bp^2x + Cpx^2 + x^3}{p^3} + r\,l\,\frac{Dp + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{qBp^4 + 2qCp^3x + 3qDp^2x^2 + 4qpx^3}{Ap^4 + Bp^3x + Cp^2x^2 + Dpx^3 + x^4} \dot{x} = 0. \ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + q\,l\,\frac{Ap^4 + Bp^3x + Cp^2x^2 + Dpx^3 + x^4}{p^4}.$$

Le coëfficient de $\dot{x}$ de chaque équation différencielle de la première Table, peut se trouver avec le coëfficient de $\dot{x}$ de toutes celles de la seconde; ce qui formera la Table III, où le chiffre mis au dessus de l'équation résultante, marque le degré de cette équation.

Je forme la Table III, en supposant que je ne veux résoudre le problème que je me suis proposé, que pour les équations différencielles depuis le degré 0 jusqu'au degré 4 inclusivement; l'on pourra la former de même pour un degré supérieur lorsqu'on voudra.

TABLE III.

Qui contient les équations intégrables en partie absolument & en partie par logarithmes.

$$\dot{y} + \left(b + \frac{(1)\ qp}{Ap + x}\right)\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \left(b + \frac{(2)\ \begin{matrix} +qBp^2 & +qpx \\ +rA & +r \end{matrix}}{(Ap+x)(Bp+x)}\right)\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \left(b + \frac{(2)\ +qBp^2 + 2qpx}{Ap^2 + Bpx + x^2}\right)\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \left(b + \frac{(3)\ \begin{matrix} +qBCp^3 & +q(B+C)p^2x & +qpx^2 \\ +rAC & +r(A+C) & +r \\ +sAB & +s(A+B) & +s \end{matrix}}{(Ap+x)(Bp+x)(Cp+x)}\right)\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \left(b + \frac{(3)\ \begin{matrix} +qBCp^3 & +q(B+2C)p^2x & +2qpx^2 \\ +rA & +rB & +r \end{matrix}}{(Ap^2+Bpx+x^2)(Cp+x)}\right)\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \left(b + \frac{(3)\ qBp^3 + 2qCp^2x + 3qpx^2}{Ap^3 + Bp^2x + Cpx^2 + x^3}\right)\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \left(b + \frac{(4)\ \begin{matrix} +qBCDp^4 & +q(BC+BD+CD)p^3x \\ +rACD & +r(AC+AD+CD) \\ +sABD & +s(AB+AD+BD) \\ +tABC & +t(AB+AC+BC) \end{matrix}}{\begin{matrix} +q(B+C+D)p^2x^2 & +qpx^3 \\ +r(A+C+D) & +r \\ +s(A+B+D) & +s \\ +t(A+B+C) & +t \end{matrix}}{(Ap+x)(Bp+x)(Cp+x)(Dp+x)}\right)\dot{x} = 0.$$

(4)

$$\dot{y} + \left(b + \frac{\begin{matrix} +qBCDp^4 & +q(BC+BD+2CD)p^3x \\ +rAD & +r(A+BD) \\ +sAC & +s(A+BC) \end{matrix}}{\begin{matrix} +q(B+2C+2D)p^2x^2 & +2qpx^3 \\ +r(B+D) & +r \\ +s(B+C) & +s \end{matrix}} \right) \dot{x} = 0.$$

$$(Ap^2+Bpx+x^2)(Cp+x)(Dp+x)$$

(4)

$$\dot{y} + \left(b + \frac{\begin{matrix} +qBCp^4 & +q(BD+2C)p^3x & +q(B+2D)p^2x^2 \\ +rAD & +r(BD+2A) & +r(D+2B) \end{matrix}}{\begin{matrix} +2qpx^3 \\ +2r \end{matrix}} \right) \dot{x} = 0.$$

$$(Ap^2+Bpx+x^2)(Cp^2+Dpx+x^2)$$

(4)

$$\dot{y} + \left(b + \frac{\begin{matrix} +qBDp^4 & +q(2CD+B)p^3x & +q(2D+2C)p^2x^2 \\ +rA & +rB & +rC \end{matrix}}{\begin{matrix} +3qpx^3 \\ +r \end{matrix}} \right) \dot{x} = 0.$$

$$(Ap^3+Bp^2x+Cpx^2+x^3)(Dp+x)$$

(4)

$$\dot{y} + \left(b + \frac{qBp^4+2qCp^3x+3qDp^2x^2+4qpx^3}{Ap^4+Bp^3x+Cp^2x^2+Dpx^3+x^4} \right) \dot{x} = 0.$$

(2)

$$\dot{y} + \left(\frac{bp+2cx}{p} + \frac{qp}{Ap+x} \right) \dot{x} = 0.$$

(3)

$$\dot{y} + \left(\frac{bp+2cx}{p} + \frac{\begin{matrix} +qBp^2+qpx \\ +rA \quad +r \end{matrix}}{(Ap+x)(Bp+x)} \right) \dot{x} = 0.$$

(3)

$$\dot{y} + \left(\frac{bp+2cx}{p} + \frac{qBp^2+2qpx}{Ap^2+Bpx+x^2} \right) \dot{x} = 0.$$

(4)

$$\dot{y} + \left(\frac{bp + 2cx}{p} + \frac{\begin{matrix} + qBCp^3 & + q(B+C)p^2x \\ + rAC & + r(A+C) \\ + sAB & + s(A+B) \end{matrix}}{\begin{matrix} + qpx^2 \\ + r \\ + s \end{matrix}} \right) \dot{x} = 0.$$
$$(Ap+x)(Bp+x)(Cp+x)$$

(4)

$$\dot{y} + \left(\frac{bp + 2cx}{p} + \frac{\begin{matrix} + qBCp^3 & + q(B+2C)p^2x \\ + rA & + rB \end{matrix}}{\begin{matrix} + 2qpx^2 \\ + r \end{matrix}} \right) \dot{x} = 0.$$
$$(Ap^2 + Bpx + x^2)(Cp+x)$$

(4)

$$\dot{y} + \left(\frac{bp + 2cx}{p} + \frac{qBp^3 + 2qCp^2x + 3qpx^2}{Ap^3 + Bp^2x + Cpx^2 + x^3} \right) \dot{x} = 0.$$

(3)

$$\dot{y} + \left(\frac{(ab-a)p^2}{(ap+x)^2} + \frac{qp}{Ap+x} \right) \dot{x} = 0.$$

(2)

$$\dot{y} + \left(\frac{(ab-a)p^2}{(ap+x)^2} + \frac{qp}{ap+x} \right) \dot{x} = 0.$$

(4)

$$\dot{y} + \left(\frac{(ab-a)p^2}{(ap+x)^2} + \frac{\begin{matrix} + qBp^2 & + qpx \\ + rA & + r \end{matrix}}{(Ap+x)(Bp+x)} \right) \dot{x} = 0.$$

(3)

$$\dot{y} + \left(\frac{(ab-a)p^2}{(ap+x)^2} + \frac{\begin{matrix} + qAp^2 & + qpx \\ + ra & + r \end{matrix}}{(ap+x)(Ap+x)} \right) \dot{x} = 0.$$

(4)

$$\dot{y} + \left(\frac{(ab-a)p^2}{(ap+x)^2} + \frac{qBp^2 + 2qpx}{Ap^2 + Bpx + x^2} \right) \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \left(\frac{(ab-a)p^2}{(ap+x)^2} + \frac{\begin{matrix}(4)\\ +qBap^3 \\ +rAa \\ +sAB\end{matrix} \quad \begin{matrix}\\ +q(B+a)p^2x \\ +r(A+a) \\ +s(A+B)\end{matrix}}{\begin{matrix}+qpx^2 \\ +r \\ +s\end{matrix}} \right) \dot{x} = 0.$$
$$\overline{(ap+x)(Ap+x)(Bp+x)}$$

$$\dot{y} + \left(\frac{(ab-a)p^2}{(ap+x)^2} + \frac{\begin{matrix}(4)\\ +qBap^3 \\ +rA\end{matrix} \quad \begin{matrix}+q(B+2a)p^2x \\ +rB\end{matrix}}{\begin{matrix}+2qpx^2 \\ +r\end{matrix}} \right) \dot{x} = 0.$$
$$\overline{(Ap^2+Bpx+x^2)(ap+x)}$$

$$\dot{y} + \left(\frac{(ab-a)p^2+2acpx+cx^2}{(ap+x)^2} + \frac{qp}{Ap+x} \right) \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \left(\frac{(ab-a)p^2+2acpx+cx^2}{(ap+x)^2} + \frac{qp}{ap+x} \right) \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \left(\frac{(ab-a)p^2+2acpx+cx^2}{(ap+x)^2} + \right.$$
$$\left. \frac{\begin{matrix}(4)\\ +qBp^2 \\ +rA\end{matrix} \quad \begin{matrix}+qpx \\ +r\end{matrix}}{(Ap+x)(Bp+x)} \right) \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \left(\frac{(ab-a)p^2+2acpx+cx^2}{(ap+x)^2} + \right.$$
$$\left. \frac{\begin{matrix}(3)\\ +qap^2 \\ +rA\end{matrix} \quad \begin{matrix}+qpx \\ +r\end{matrix}}{(ap+x)(Ap+x)} \right) \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \left(\frac{(ab-a)p^2+2acpx+cx^2}{(ap+x)^2} + \right.$$
$$\left. \frac{qBp^2+2qpx}{Ap^2+Bpx+x^2} \right) \dot{x} = 0.$$

(4)

$$\ddot{y} + \left(\frac{(ab-a)p^2 + 2acpx + cx^2}{(ap+x)^2} + \frac{\begin{matrix} +qBap^3 & +q(B+a)p^2x & +qpx^2 \\ +rAa & +r(A+a) & +r \\ +sAB & +s(A+B) & +s \end{matrix}}{(ap+x)(Ap+x)(Bp+x)} \right) \dot{x} = 0.$$

(4)

$$\ddot{y} + \left(\frac{(ab-a)p^2 + 2acpx + cx^2}{(ap+x)^2} + \frac{\begin{matrix} +qBap^3 & +q(B+2a)p^2x & +2qpx^2 \\ +rA & +rB & +r \end{matrix}}{(ap+x)(Ap^2+Bpx+x^2)} \right) \dot{x} = 0.$$

(3)

$$\ddot{y} + \left(\frac{bp^2 + 2cpx + 3dx^2}{p^2} + \frac{qp}{Ap+x} \right) \dot{x} = 0.$$

(4)

$$\ddot{y} + \left(\frac{bp^2 + 2cpx + 3dx^2}{p^2} + \frac{\begin{matrix} +qBp^2 & +qpx \\ +rA & +r \end{matrix}}{(Ap+x)(Bp+x)} \right) \dot{x} = 0.$$

(4)

$$\ddot{y} + \left(\frac{bp^2 + 2cpx + 3dx^2}{p^2} + \frac{qBp^2 + 2qpx}{Ap^2 + Bpx + x^2} \right) \dot{x} = 0.$$

(4)

$$\ddot{y} + \left(\frac{(ab-2a)p^3 + (2ac-b)p^2x}{(ap+x)^2} + \frac{qp}{Ap+x} \right) \dot{x} = 0.$$

(3)

$$\ddot{y} + \left(\frac{(ab-2a)p^3 + (2ac-b)p^2x}{(ap+x)^2} + \frac{qp}{ap+x} \right) \dot{x} = 0.$$

(4)

$$\ddot{y} + \left(\frac{(ab-2a)p^3 + (2ac-b)p^2x}{(ap+x)^2} + \frac{\begin{matrix} +qap^2 & +qpx \\ +rA & +r \end{matrix}}{(ap+x)(Ap+x)} \right) \dot{x} = 0.$$

$\dot{y} +$

(4)

$$\dot{y} + \left(\frac{(\alpha b - 2a)p^3 + (2\alpha c - b)p^2 x + 3\alpha d p x^2 + d x^3}{(\alpha p + x)^3} + \frac{qp}{Ap + x} \right) \dot{x} = 0.$$

(3)

$$\dot{y} + \left(\frac{(\alpha b - 2a)p^3 + (2\alpha c - b)p^2 x + 3\alpha d p x^2 + d x^3}{(\alpha p + x)^3} + \frac{qp}{\alpha p + x} \right) \dot{x} = 0.$$

(4)

$$\dot{y} + \left(\frac{(\alpha b - 2a)p^3 + (2\alpha c - b)p^2 x + 3\alpha d p x^2 + d x^3}{(\alpha p + x)^3} + \frac{\begin{matrix} + q\alpha p^2 + qpx \\ + rA + r \end{matrix}}{(\alpha p + x)(Ap + x)} \right) \dot{x} = 0.$$

(4)

$$\dot{y} + \left(\frac{(\alpha b - a)p^3 + 2\alpha c p^2 x + (3\alpha d + c)p x^2 + 2 d x^3}{p(\alpha p + x)^2} + \frac{qp}{Ap + x} \right) \dot{x} = 0.$$

(3)

$$\dot{y} + \left(\frac{(\alpha b - a)p^3 + 2\alpha c p^2 x + (3\alpha d + c)p x^2 + 2 d x^3}{p(\alpha p + x)^2} + \frac{qp}{\alpha p + x} \right) \dot{x} = 0.$$

(4)

$$\dot{y} + \left(\frac{(\alpha b - a)p^3 + 2\alpha c p^2 x + (3\alpha d + c)p x^2 + 2 d x^3}{p(\alpha p + x)^2} + \frac{\begin{matrix} + q\alpha p^2 + qpx \\ + rA + r \end{matrix}}{(\alpha p + x)(Ap + x)} \right) \dot{x} = 0.$$

(4)

$$\dot{y} + \left(\frac{bp^3 + 2cp^2 x + 3dpx^2 + 4ex^3}{p^3} + \frac{qp}{Ap + x} \right) \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \Big(\frac{(ab - 6a)p^4 + (2ac - 2a)p^3x + (-b + 6c)p^2x^2}{(ap^2 + 6px + x^2)^2} + \frac{q6p^2 + 2qpx}{ap^2 + 6px + x^2} \Big) \dot{x} = 0. \quad (4)$$

$$\dot{y} + \Big(\frac{(ab - 3a)p^4 + (2ac - 2b)p^3x + (3ad - c)p^2x^2}{(ap + x)^4} + \frac{qp}{ap + x} \Big) \dot{x} = 0. \quad (4)$$

$$\dot{y} + \Big(\frac{(ab - 6a)p^4 + (2ac - 2a)p^3x + (3ad + 6c - b)p^2x^2 + 4aepx^3 + ex^4}{(ap^2 + 6px + x^2)^2} + \frac{q6p^2 + 2qpx}{ap^2 + 6px + x^2} \Big) \dot{x} = 0. \quad (4)$$

$$\dot{y} + \Big(\frac{(ab - a)p^4 + (2ac - 2b)p^3x + (3ad - c)p^2x^2}{4aepx^3 + ex^4} + \frac{qp}{ap + x} \Big) \dot{x} = 0. \quad (4)$$

$$\dot{y} + \Big(\frac{(ab - 2a)p^4 + (2ac - b)p^3x + 3adp^2x^2 + (4ae + d)px^3 + 2ex^4}{p(ap + x)^3} + \frac{qp}{ap + x} \Big) \dot{x} = 0. \quad (4)$$

$$\dot{y} + \Big(\frac{(ab - a)p^4 + 2acp^3x + (3ad + c)p^2x^2 + (4ae + 2d)px^3 + 3ex^4}{p^2(ap + x)^2} + \frac{qp}{ap + x} \Big) \dot{x} = 0.$$

Ayant ces trois Tables, l'on en tirera la Table IV, qui contient la solution complète du problème que nous nous sommes proposé.

TABLE IV.

0 d

$$\dot{y} + b\dot{x} = 0 \ldots : \ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p};$$

1 d

$$\dot{y} + \frac{bp + 2cx}{p}\dot{x} = 0 \ldots . n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p^2},$$

$$\dot{y} + \frac{qp}{Ap + x}\dot{x} = 0 \ldots . n = \frac{y}{p} + ql\frac{Ap + x}{p},$$

$$\dot{y} + \frac{(bA + q)p + bx}{Ap + x}\dot{x} = 0 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + ql\frac{Ap + x}{p},$$

2 d

$$\dot{y} + \frac{bp^2 + 2cpx + 3dx^2}{p^2}\dot{x} = 0 \ldots \ldots \ldots : : \ldots \ldots \ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p^2},$$

$$\dot{y} + \frac{(bA + q)p^2 + (b + 2cA)px + 2cx^2}{p(Ap + x)}\dot{x} = 0 \ldots : \ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p^2} + ql\frac{Ap + x}{p},$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha - a)p^2}{(\alpha p + x)^2}\dot{x} = 0 \ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{\alpha p + x},$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha + q\alpha - a)p^2 + qpx}{(\alpha p + x)^2}\dot{x} = 0 \ldots \ldots \ldots : \ldots \ldots \ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{\alpha p + x} + ql\frac{\alpha p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha - a)p^2 + 2c\alpha px + cx^2}{(\alpha p + x)^2}\dot{x} = 0. \quad \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p(\alpha p + x)},$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha p + q\alpha - a)p^2 + (2c\alpha + q)px + cx^2}{(\alpha p + x)^2}\dot{x} = 0.$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p(\alpha p + x)} + ql\frac{\alpha p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{qBp^2 + 2qpx}{Ap^2 + Bpx + x^2}\dot{x} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + ql\frac{Ap^2 + Bpx + x^2}{p^2};$$

$$\dot{y} + \frac{(bA + qB)p^2 + (bB + 2q)px + bx^2}{Ap^2 + Bpx + x^2}\dot{x} = 0.$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + ql\frac{Ap^2 + Bpx + x^2}{p^2},$$

$$\dot{y} + \frac{(qB + rA)p^2 + (q + r)px}{(Ap + x)(Bp + x)}\dot{x} = 0. \quad \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + ql\frac{Ap + x}{p} + rl\frac{Bp + x}{p},$$

$$\dot{y} + \frac{(bAB + qB + rA)p^2 + [b(A + B) + q + r]px + bx^2}{(Ap + x)(Bp + x)}\dot{x} = 0.$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + ql\frac{Ap + x}{p} + rl\frac{Bp + x}{p}.$$

3^d

$$\dot{y} + \frac{bp^3 + 2cp^2x + 3dpx^2 + 4ex^3}{p^3}\dot{x} = 0. \quad \ldots\ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + x^4}{p^4}.$$

$$\dot{y} + \frac{(bA + q)p^3 + (b + 2cA)p^2x + (2c + 3dA)px^2 + 3dx^3}{p^2(Ap + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p^3} + ql\frac{Ap + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha - a)p^3 + 2c\alpha p^2 x + (3d\alpha + c)px^2 + 2dx^3}{p(\alpha p + x)^2}\dot{x} = 0.$$

$$\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p^2(\alpha p + x)}.$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha + q\alpha - a)p^3 + (2c\alpha + q)p^2x + (3d\alpha + c)px^2 + 2dx^3}{p(\alpha p + x)^2}\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p^2(\alpha p + x)} + ql\frac{\alpha p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{(bA + qB)p^3 + (bB + 2cA + 2q)p^2x + (b + 2cB)px^2 + 2cx^3}{p(Ap^2 + Bpx + x^2)}\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p^2} + ql\frac{Ap^2 + Bpx + x^2}{p^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{(bAB + qB + rA)p^3 + [b(A + B) + 2cAB + q + r]p^2x + [b + 2c(A + B)]px^2 + 2cx^3}{p(Ap + x)(Bp + x)}\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p^2} + ql\frac{Ap + x}{p} + rl\frac{Bp + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{(2b\alpha - 2a)p^3 + (2c\alpha - b)p^2x}{(\alpha p + x)^3}\dot{x} = 0. \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{(\alpha p + x)^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha + q\alpha^2 - b)p^3 + (2\alpha c + 2q\alpha - b)p^2x + qpx^2}{(\alpha p + x)^3}\dot{x} = 0.$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{(\alpha p + x)^2} + ql\frac{\alpha p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha - 2a)p^3 + (2c\alpha - b)p^2x + 3d\alpha px^2 + dx^3}{(\alpha p + x)^3}\dot{x} = 0.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p(\alpha p + x)^2}\dot{x}$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha + q\alpha^2 - 2a)p^3 + (2c\alpha + 2q\alpha - b)p^2x + (3d\alpha + q)px^2 + dx^3}{(\alpha p + x)^3}\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p(\alpha p + x)^2} + ql\frac{\alpha p + x}{p},$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha A - aA + q\alpha^2)p^3 + (b\alpha - a + 2q\alpha)p^2x + qpx^2}{(\alpha p + x)^2(Ap + x)}\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{\alpha p + x} + ql\frac{Ap + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha A - aA + q\alpha^2 + r\alpha A)p^3 + [b\alpha - a + 2q\alpha + r(\alpha + A)]p^2x + (q + r)px^2}{(\alpha p + x)^2(Ap + x)}\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{\alpha p + x} + ql\frac{Ap + x}{p} + rl\frac{\alpha p + x}{p};$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha A - aA + q\alpha^2)p^3 + (b\alpha - a + 2q\alpha + 2c\alpha A)p^2x + [c(2\alpha + A) + q]px^2 + cx^3}{(\alpha p + x)^2(Ap + x)}\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p(\alpha p + x)} + ql\frac{Ap + x}{p};$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha A - aA + q\alpha^2 + r\alpha A)p^3 + [b\alpha - a + 2q\alpha + 2c\alpha A + r(\alpha + A)]p^2x + [c(2\alpha + A) + q + r]px^2 + cx^3}{(\alpha p + x)^2(Ap + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p(\alpha p + x)} + ql\frac{Ap + x}{p} + rl\frac{\alpha p + x}{p},$$

$$\dot{y} + \frac{qBp^3 + 2qCp^2x + 3qpx^2}{Ap^3 + Bp^2x + Cpx^2 + x^3}\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + ql\frac{Ap^3 + Bp^2x + Cpx^2 + x^3}{p^3};$$

$$\dot{y} + \frac{(qB + bA)p^3 + (2qC + bB)p^2x + (3q + bC)px^2 + bx^3}{Ap^3 + Bp^2x + Cpx^2 + x^3}\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + ql\frac{Ap^3 + Bp^2x + Cpx^2 + x^3}{p^3}.$$

$$\dot{y} + \frac{(qBC + rA)p^3 + [q(B + 2C) + rB]p^2x + (2q + r)px^2}{(Ap^2 + Bpx + x^2)(Cp + x)}\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + ql\frac{Ap^2 + Bpx + x^2}{p^2} + rl\frac{Cp + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{(qBC + rA + bAC)p^3 + [q(B + 2C) + rB + b(BC + A)]p^2x + [2q + r + b(B + C)]px^2 + bx^3}{(Ap^2 + Bpx + x^2)(Cp + x)}\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + ql\frac{Ap^2 + Bpx + x^2}{p^2} + rl\frac{Cp + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{(qBC + rAC + sAB)p^3 + [q(B + C) + r(A + C) + s(A + B)]p^2x + (q + r + s)px^2}{(Ap + x)(Bp + x)(Cp + x)}\dot{x} = 0. \ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + ql\frac{Ap + x}{p} + rl\frac{Bp + x}{p} + sl\frac{Cp + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{(qBC + rAC + sAB + bABC)p^3 + [q(B + C) + r(A + C) + s(A + B) + b(AB + AC + BC)]p^2x + [q + r + s + b(A + B + C)]px^2 + bx^3}{(Ap + x)(Bp + x)(Cp + x)}\dot{x} = 0. \ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + ql\frac{Ap + x}{p} + rl\frac{Bp + x}{p} + sl\frac{Cp + x}{p}.$$

4d

$$\dot{y} + \frac{bp^4 + 2cp^3x + 3dp^2x^2 + 4epx^3 + 5fx^4}{p^4}\,\dot{x} = 0. \ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p^5}.$$

$$\dot{y} + \frac{(bA + q)p^4 + (2cA + b)p^3x + (3dA + 2c)p^2x^2 + (4eA + 3d)px^3 + 4ex^4}{p^4(Ap + x)}\,\dot{x} = 0. \ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p^4} + ql\,\frac{Ap + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha - a)p^4 + 2c\alpha p^3x + (3d\alpha + c)p^2x^2 + (4e\alpha + 2d)px^3 + 3ex^4}{p^2(\alpha p + x)^2}\,\dot{x} = 0. \ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p^3(\alpha p + x)}.$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha - a + q\alpha)p^4 + (2c\alpha + q)p^3x + (3d\alpha + c)p^2x^2 + (4e\alpha + 2d)px^3 + 3ex^4}{p^2(\alpha p + x)^2}\,\dot{x} = 0. \ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p^3(\alpha p + x)} + ql\,\frac{\alpha p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{(bA + qB)p^4 + (bB + 2cA + 2q)p^3x + (b + 2cB + 3dA)p^2x^2 + (2c + 3dB)px^3 + 3dx^4}{p^3(Ap^2 + Bpx + x^2)}\,\dot{x} = 0. \ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p^3} + ql\,\frac{Ap^2 + Bpx + x^2}{p^2};$$

$\dot{y} +$

$$\dot{y} + \frac{(bAB + qB + rA)p^4 + [b(A+B) + 2cAB + q + r]p^3x}{+ [b + 2c(A+B) + 3dAB]p^2x^2 + [2c + 3d(A+B)]px^3 + 3dx^4}{p^2(Ap+x)(Bp+x)}\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p^3} + ql\frac{Ap+x}{p} + rl\frac{Bp+x}{p},$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha - 2a)p^4 + (2c\alpha - b)p^3x + 3d\alpha p^2x^2 + (4e\alpha + d)px^3 + 2ex^4}{p(\alpha p+x)^3}\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p^2(\alpha p+x)^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha - 2a + q\alpha^2)p^4 + (2c\alpha - b + 2q\alpha)p^3x + (3d\alpha + q)p^2x^2 + (4e\alpha + d)px^3 + 2ex^4}{p(\alpha p+x)^3}\dot{x} = 0. \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p^2(\alpha p+x)^2} + ql\frac{\alpha p+x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha A - aA + q\alpha^2)p^4 + (2c\alpha A + b\alpha - a + 2q\alpha)p^3x + [3d\alpha A + c(A+2\alpha) + q]p^2x^2 + [d(3\alpha + 2A) + c]px^3 + 2dx^4}{p(\alpha p+x)^2(Ap+x)}\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p^2(\alpha p+x)^2} + ql\frac{Ap+x}{p};$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha A - aA + q\alpha^2 + r\alpha A)p^4 + [2c\alpha A + b\alpha - a + 2q\alpha + r(\alpha + A)]p^3x + [3d\alpha A + c(A+2\alpha) + q + r]p^2x^2 + [d(3\alpha + 2A) + c]px^3 + 2dx^4}{p(\alpha p+x)^2(Ap+x)}\dot{x} = 0. \ldots\ldots$$

$$u = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p^2(ap+x)} + ql\frac{Ap+x}{p} +$$
$$rl\frac{ap+x}{p};$$

$$\dot{y} + \frac{(bA+qB)p^4 + (bB+2cA+2qC)p^3x +}{p(Ap^3+Bp^2x+Cpx^2+x^3)}$$
$$\frac{(bC+2cB+3q)p^2x^2 + (b+2cC)px^3 + 2cx^4}{p(Ap^3+Bp^2x+Cpx^2+x^3)}\dot{x} = 0 \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots u = \frac{y}{p} + \frac{ap^2+bpx+cx^2}{p^2} +$$
$$ql\frac{Ap^3+Bp^2x+Cpx^2+x^3}{p^3}.$$

$$\dot{y} + \frac{(bAC+qBC+rA)p^4 + [b(A+BC)+2cAC+}{q(B+2C)+rB]p^3x + [b(A+C)+2c(A+BC)+2q+r]p^2x^2}$$
$$\frac{+[b+2c(B+C)]px^3 + 2cx^4}{p(Ap^2+Bpx+x^2)(Cp+x)}\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots u = \frac{y}{p} + \frac{ap^2+bpx+cx^2}{p^2} +$$
$$ql\frac{Ap^2+Bpx+x^2}{p^2} + rl\frac{Cp+x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{(bABC+qBC+rAC+sAB)p^4 + [b(AB+AC+BC)}{+2cABC+q(B+C)+r(A+C)+s(A+B)]p^3x +}$$
$$\frac{[b(A+B+C)+2c(AB+AC+BC)+q+r+s]p^2x^2}{+[b+2c(A+B+C)]px^3 + 2cx^4}\dot{x} = 0 \ldots\ldots$$
$$\frac{}{p(Ap+x)(Bp+x)(Cp+x)}$$

$$\ldots u = \frac{y}{p} + \frac{ap^2+bpx+cx^2}{p^2} + ql\frac{Ap+x}{p} +$$
$$rl\frac{Bp+x}{p} + sl\frac{Cp+x}{p};$$

$$\dot{y} + \frac{(ba-3a)p^4 + (2ca-2b)p^3x + (3da-c)p^2x^2}{(ap+x)^4}\dot{x} = 0.$$

$$\ldots\ldots\ldots u = \frac{y}{p} + \frac{ap^3+bp^2x+cpx^2+dx^3}{(ap+x)^3};$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha - 3a + q\alpha^3)p^4 + (2c\alpha - 2b + 3q\alpha^2)p^3x + (3d\alpha - c + 3q\alpha)p^2x^2 + qpx^3}{(ap+x)^4}\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{(ap+x)^3} + q\,l\,\frac{ap+x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha - 3a)p^4 + (2c\alpha - 2b)p^3x + (3d\alpha - c)p^2x^2 + 4e\alpha px^3 + ex^4}{(ap+x)^4}\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p(ap+x)^3}.$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha - 3a + q\alpha^3)p^4 + (2c\alpha - 2b + 3q\alpha^2)p^3x + (3d\alpha - c + 3q\alpha)p^2x^2 + (4e\alpha + q)px^3 + ex^4}{(ap+x)^4}\dot{x} = 0 \ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p(ap+x)^3} + q\,l\,\frac{ap+x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha A - 2aA + q\alpha^3)p^4 + [2c\alpha A + b(\alpha - A) - 2a + 3q\alpha^2]p^3x + (2c\alpha - b + 3q\alpha)p^2x^2 + qpx^3}{(ap+x)^3\,(Ap+x)}\dot{x} = 0 \ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{(ap+x)^2} + q\,l\,\frac{Ap+x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha A - 2aA + q\alpha^3 + r\alpha^2A)p^4 + [2c\alpha A + b(\alpha - A) - 2a + 3q\alpha^2 + r(\alpha^2 + 2\alpha A)]p^3x + [2c\alpha - b + 3q\alpha + r(2\alpha + A)]p^2x^2 + (q+r)px^3}{(ap+x)^3\,(Ap+x)}\dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{(ap+x)^2} + q\,l\,\frac{Ap+x}{p} + r\,l\,\frac{ap+x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{(baA - 2aA + q\alpha^3)p^4 + [2c\alpha A + b(\alpha - A) - 2a + 3q\alpha^2]p^3x + (2c\alpha - b + 3q\alpha + 3d\alpha A)p^2x^2 + [d(A + 3\alpha) + q]px^3 + dx^4}{(\alpha p + x)^3 (Ap + x)} \dot{x} = 0.$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p(\alpha p + x)^2} + ql\frac{Ap + x}{p},$$

$$\dot{y} + \frac{(baA - 2aA + q\alpha^3 + r\alpha^2A)p^4 + [2c\alpha A + b(\alpha - A) - 2a + 3q\alpha^2 + r(\alpha^2 + 2\alpha A)]p^3x + [2c\alpha - b + 3q\alpha + 3d\alpha A + r(2\alpha + A)]p^2x^2 + [d(A + 3\alpha) + q + r]px^3 + dx^4}{(\alpha p + x)^3 (Ap + x)} \dot{x} = 0.$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p(\alpha p + x)^2} + ql\frac{Ap + x}{p} + rl\frac{\alpha p + x}{p};$$

$$\dot{y} + \frac{(ba - a\mathcal{C})p^4 + (2c\alpha - 2a)p^3x + (c\mathcal{C} - b)p^2x^2}{(\alpha p^2 + \mathcal{C}px + x^2)^2} \dot{x} = 0;$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{\alpha p^2 + \mathcal{C}px + x^2},$$

$$\dot{y} + \frac{(ba - a\mathcal{C} + q\alpha\mathcal{C})p^4 + [2c\alpha - 2a + q(2\alpha + \mathcal{C}^2)]p^3x + (c\mathcal{C} - b + 3q\mathcal{C})p^2x^2 + 2qpx^3}{(\alpha p^2 + \mathcal{C}px + x^2)^2} \dot{x} = 0.$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{\alpha p^2 + \mathcal{C}px + x^2} + ql\frac{\alpha p^2 + \mathcal{C}px + x^2}{p^2},$$

$$\dot{y} + \frac{(ba - a\mathcal{C})p^4 + (2c\alpha - 2a)p^3x + (c\mathcal{C} - b + 3d\alpha)p^2x^2 + 2d\mathcal{C}px^3 + dx^4}{(\alpha p^2 + \mathcal{C}px + x^2)^2} \dot{x} = 0.$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p(\alpha p^2 + \mathcal{C}px + x^2)},$$

$$\ddot{y} + \frac{(b\alpha - a\zeta + q\alpha\zeta)p^4 + [2c\alpha - 2a + q(2\alpha + \zeta^2)]p^3x +}{(c\zeta - b + 3d\alpha + 3q\zeta)p^2x^2 + (2d\zeta + 2q)px^3 + dx^4}\dot{x} = 0.$$
$$\overline{(\alpha p^2 + \zeta px + x^2)^2}$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p(\alpha p^2 + \zeta px + x^2)} + ql\frac{\alpha p^2 + \zeta px + x^2}{p^2}.$$

$$\ddot{y} + \frac{[b\alpha\zeta - a(\alpha + \zeta) + q\alpha\zeta^2]p^4 + [2c\alpha\zeta - 2a}{+ q(2\alpha\zeta + \zeta^2)]p^3x + [c(\alpha + \zeta) - b + q(\alpha + 2\zeta)]p^2x^2}$$
$$+ qpx^3 \qquad \dot{x} = 0.$$
$$\overline{(\alpha p + x)^2(\zeta p + x)^2}$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{(\alpha p + x)(\zeta p + x)} + ql\frac{\alpha p + x}{p}.$$

$$\ddot{y} + \frac{[b\alpha\zeta - a(\alpha + \zeta) + q\alpha\zeta^2 + r\alpha^2\zeta]p^4 + [2c\alpha\zeta - 2a}{+ q(2\alpha\zeta + \zeta^2) + r(2\alpha\zeta + \alpha^2)]p^3x + [c(\alpha + \zeta) - b + q(\alpha + 2\zeta)}$$
$$+ r(\zeta + 2\alpha)]p^2x^2 + (q + r)px^3 \qquad \dot{x} = 0.$$
$$\overline{(\alpha p + x)^2(\zeta p + x)^2}$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{(\alpha p + x)(\zeta p + x)} + ql\frac{\alpha p + x}{p} +$$
$$rl\frac{\zeta p + x}{p}.$$

$$\ddot{y} + \frac{[b\alpha\zeta - a(\alpha + \zeta) + q\alpha\zeta^2)]p^4 + [2c\alpha\zeta - 2a}{+ q(2\alpha\zeta + \zeta^2)]p^3x + [3d\alpha\zeta + c(\alpha + \zeta) - b + q(\alpha + 2\zeta)]p^2x^2}$$
$$+ [2d(\alpha + \zeta) + q]px^3 + dx^4 \qquad \dot{x} = 0.$$
$$\overline{(\alpha p + x)^2(\zeta p + x)^2}$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p(\alpha p + x)(\zeta p + x)} +$$
$$ql\frac{\alpha p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{[b\alpha\mathfrak{C} - a(\alpha+\mathfrak{C}) + q\alpha\mathfrak{C}^2 + n\alpha^2\mathfrak{C}]p^4 + [2c\alpha\mathfrak{C} - 2a}{+ q(2\alpha\mathfrak{C} + \mathfrak{C}^2) + r(2\alpha\mathfrak{C} + \alpha^2)]p^3x + [3d\alpha\mathfrak{C} + c(\alpha+\mathfrak{C})}$$
$$- b + q(\alpha + 2\mathfrak{C}) + r(\mathfrak{C}^2 + 2\alpha)]p^2x^2 + [2d(\alpha+\mathfrak{C}) + q + r]px^3$$
$$+ dx^4 \qquad \dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots\ldots;$$
$$\overline{(\alpha p + x)^2\,(\mathfrak{C}p + x)^2}$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p(\alpha p + x)(\mathfrak{C}p + x)} + ql\,\frac{\alpha p + x}{p} +$$
$$rl\,\frac{\mathfrak{C}p + x}{p};$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha A + q\alpha^2 B - aA)p^4 + [b\alpha B - aB +}{q(2\alpha B + 2\alpha^2)]p^3x + [b\alpha - a + q(B + 4\alpha)]p^2x^2 +}$$
$$\frac{2qpx^3}{(\alpha p + x)^2\,(Ap^2 + Bpx + x^2)}\,\dot{x} = 0. \ldots\ldots;$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{\alpha p + x} + ql\,\frac{Ap^2 + Bpx + x^2}{p^2} +$$
$$rl\,\frac{\alpha p + x}{p};$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha A - aA + qB\alpha^2)p^4 + [2c\alpha A + b\alpha B - aB +}{q(2\alpha B + 2\alpha^2)]p^3x + [2(A + 2\alpha B) + b\alpha - a + q(B + 4\alpha)]p^2x^2 +}$$
$$+ [c(B + 2\alpha) + 2q]px^3 + cx^4 \qquad \dot{x} = 0. \ldots\ldots;$$
$$\overline{(\alpha p + x)^2\,(Ap^2 + Bpx + x^2)}$$

$$\ddot{x} \ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p(ap + x)} + q\,l\,\frac{Ap^2 + Bpx + x^2}{p^2}.$$

$$\ddot{y} + \frac{(b\alpha A - aA + qB\alpha^2 + r\alpha A)p^4 + [2c\alpha A + b\alpha B - aB + q(2\alpha B + 2\alpha^2) + r(A + \alpha B)]p^3x + [c(A + 2\alpha B) + b\alpha - a + q(B + 4\alpha) + r(\alpha + B)]p^2x^2 + [c(B + 2\alpha) + 2q + r]px^3 + cx^4}{(ap + x)^2(Ap^2 + Bpx + x^2)}\dot{x} = 0.$$

$$\ddot{x} \ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p(ap + x)} + q\,l\,\frac{Ap^2 + Bpx + x^2}{p^2} + r\,l\,\frac{ap + x}{p}.$$

$$\ddot{y} + \frac{(b\alpha AB - aAB + q\alpha^2 B + r\alpha^2 A)p^4 + [b(\alpha A + \alpha B) - a(A + B) + q(2B\alpha + \alpha^2) + r(2A\alpha + \alpha^2)]p^3x + [b\alpha - a + q(B + 2\alpha) + r(A + 2\alpha)]p^2\dot{x}^2 + (q + r)px^3}{(ap + x)^2(Ap + x)(Bp + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\ddot{x} \ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + q\,l\,\frac{Ap + x}{p} + r\,l\,\frac{Bp + x}{p}.$$

$$\ddot{y} + \frac{(b\alpha AB - aAB + q\alpha^2 B + r\alpha^2 A + s\alpha AB)p^4 + [b(\alpha A + \alpha B) - a(A + B) + q(2B\alpha + \alpha^2) + r(2A\alpha + \alpha^2) + s(AB + A\alpha + B\alpha)]p^3x + [b\alpha - a + q(2\alpha + B) + r(2\alpha + A) + s(A + B + \alpha)]p^2x^2 + (q + r + s)px^3}{(ap + x)^2(Ap + x)(Bp + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\ddot{x} \ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{ap + x} + q\,l\,\frac{Ap + x}{p} + r\,l\,\frac{Bp + x}{p} + s\,l\,\frac{ap + x}{p};$$

$$\dot{y} + \frac{\begin{array}{lll} +b\alpha ABp^4 & +2c\alpha ABp^3x & +c(AB+2\alpha A+2\alpha B)p^2x^2 \\ -aAB & +b\alpha A+\alpha B & +b\alpha \\ +q\alpha^2B & -a(A+B) & -a \\ +r\alpha^2A & +q(2\alpha B+\alpha^2) & +q(2\alpha+B) \\ & +r(2\alpha A+\alpha^2) & +r(2\alpha+A) \end{array}}{+c(A+B+2\alpha)px^3+cx^4 \;+q \;+r \;\overline{(\alpha p+x)^2(Ap+x)(Bp+x)}}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2+bpx+cx^2}{p(\alpha p+x)} + ql\frac{Ap+x}{p} + rl\frac{Bp+x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{\begin{array}{lll} +b\alpha ABp^4 & +2c\alpha ABp^3x & +c(AB+2\alpha A+2\alpha B)p^2x^2 \\ -aAB & +b(\alpha A+\alpha B) & +b\alpha \\ +q\alpha^2B & -a(A+B) & -a \\ +r\alpha^2A & +q(2\alpha B+\alpha^2) & +q(2\alpha+B) \\ +s\alpha AB & +r(2\alpha A+\alpha^2) & +r(2\alpha+A) \\ & +s(A\alpha+B\alpha+AB) & +s(\alpha+A+B) \end{array}}{+c(A+B+2\alpha)px^3+cx^4 \;+q \;+r \;+s \;\overline{(\alpha p+x)^2(Ap+x)(Bp+x)}}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2+bpx+cx^2}{p(\alpha p+x)} + ql\frac{Ap+x}{p} + rl\frac{Bp+x}{p} + sl\frac{\alpha p+x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{qBp^4+2qCp^3x+3qDp^2x^2+4qpx^3}{Ap^4+Bp^3x+Cp^2x^2+Dpx^3+x^4}\,\dot{x} = 0 \ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + ql\frac{Ap^4+Bp^3x+Cp^2x^2+Dpx^3+x^4}{p^4}.$$

$$\dot{y} + \frac{(bA+qB)p^4+(bB+2qC)p^3x+(bC+3qD)p^2x^2+}{(bD+4q)px^3+bx^4 \;\overline{Ap^4+Bp^3x+Cp^2x^2+Dpx^3+x^4}}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap+bx}{p} + ql\frac{Ap^4+Bp^3x+Cp^2x^2+Dpx^3+x^4}{p^4}.$$

$\dot{y} +$

$$\dot{y} + \frac{(qBD + rA)p^4 + [q(2CD + B) + rB]p^3x + [q(3D + 2C) + rC]p^2x^2 + (3q + r)px^3}{(Ap^3 + Bp^2x + Cpx^2 + x^3)(Dp + x)}\dot{x} = 0. \ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + ql\frac{Ap^3 + Bp^2x + Cpx^2 + x^3}{p^3} + rl\frac{Dp + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{(bAD + qBD + rA)p^4 + [b(A + BD) + q(2CD + B) + rB]p^3x + [b(B + CD) + q(3D + 2C) + rC]p^2x^2 + [b(C + D) + 3q + r]px^3 + bx^4}{(Ap^3 + Bp^2x + Cpx^2 + x^3)(Dp + x)}\dot{x} = 0. \ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + ql\frac{Ap^3 + Bp^2x + Cpx^2 + x^3}{p^3} + rl\frac{Dp + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{(qBC + rAD)p^4 + [q(BD + 2C) + r(BD + 2A)]p^3x + [q(B + 2D) + r(D + 2B)]p^2x^2 + (2q + 2r)px^3}{(Ap^2 + Bpx + x^2)(Cp^2 + Dpx + x^2)}\dot{x} = 0.$$

$$\ldots \ldots n = \frac{y}{p} + ql\frac{Ap^2 + Bpx + x^2}{p^2} + rl\frac{Cp^2 + Dpx + x^2}{p^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{(bAC + qBC + rAD)p^4 + [b(AD + BC) + q(BD + 2C) + r(BD + 2A)]p^3x + [b(A + C + BD) + q(B + 2D) + r(D + 2B)]p^2x^2 + [b(B + D) + 2q + 2r]px^3 + bx^4}{(Ap^2 + Bpx + x^2)(Cp^2 + Dpx + x^2)}\dot{x} = 0.$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + ql\frac{Ap^2 + Bpx + x^2}{p^2} + rl\frac{Cp^2 + Dpx + x^2}{p^2}.$$

$$\ddot{y} + \frac{\begin{array}{ll} +qBCDp^4 & +q(BC+BD+2CD)p^3x \\ +rAD & +r(BD+A) \\ +sAC & +s(BC+A) \end{array}}{\begin{array}{ll} +q(B+2C+2D)p^2x^2 & +2qpx^3 \\ +r(B+D) & +r \\ +s(B+C) & +s \end{array}} \dot{x} = 0. \ldots$$

$$\ldots u = \frac{y}{p} + ql\frac{Ap^2+Bpx+x^2}{p^2} + rl\frac{Cp+x}{p} + sl\frac{Dp+x}{p}.$$

$$\ddot{y} + \frac{\begin{array}{ll} +bACDp^4 & +b(AC+AD+BCD)p^3x \\ +qBCD & +q(BC+BD+2CD) \\ +rAD & +r(BD+A) \\ +sAC & +s(BC+A) \end{array}}{\begin{array}{ll} +b(A+BC+BD+CD)p^2x^2 & +b(B+C+D)px^3+bx^4 \\ +q(B+2C+2D) & +2q \\ +r(B+D) & +r \\ +s(B+C) & +s \end{array}} \dot{x} = 0.$$

$$\ldots u = \frac{y}{p} + \frac{ap+bx}{p} + ql\frac{Ap^2+Bpx+x^2}{p^2} + rl\frac{Cp+x}{p} + sl\frac{Dp+x}{p}.$$

$$\ddot{y} + \frac{\begin{array}{ll} +qBCDp^4 & +q(BC+BD+CD)p^3x \\ +rACD & +r(AC+AD+CD) \\ +sABD & +s(AB+AD+BD) \\ +tABC & +t(AB+AC+BC). \end{array}}{\begin{array}{ll} +q(B+C+D)p^2x^2 & +qpx^3 \\ +r(A+C+D) & +r \\ +s(A+B+D) & +s \\ +t(A+B+C) & +t \end{array}} \dot{x} = 0. \ldots$$

$$\ldots\ldots u = \frac{y}{p} + ql\frac{Ap+x}{p} + rl\frac{Bp+x}{p} + sl\frac{Cp+x}{p} + tl\frac{Dp+x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{\begin{array}{ll} +bACDBp^4 & +b(ABC+ABD+ACD+BCD)p^3x \\ +qBCD & +q(BC+BD+CD) \\ +rACD & +r(AC+AD+CD) \\ +sABD & +s(AB+AD+BD) \\ +tABC & +t(AB+AC+BC) \end{array}}{\begin{array}{l} +b(AB+AC+AD+BC+BD+CD)p^2x^2 \\ +q(B+C+D) \\ +r(A+C+D) \\ +s(A+B+D) \\ +t(A+B+C) \end{array}}$$

$$\frac{\begin{array}{l} +b(A+B+C+D)px^3+bx^4 \\ +q \\ +r \\ +s \\ +t \end{array}}{(Ap+x)(Bp+x)(Cp+x)(Dp+x)}\dot{x} = 0 \ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap+bx}{p} + ql\frac{Ap+x}{p} +$$

$$rl\frac{Bp+x}{p} + sl\frac{Cp+x}{p} + tl\frac{Dp+x}{p};$$

J'ai voulu faire connoître la méthode qui m'avoit conduit, à cause de l'usage que l'on pourra en faire pour intégrer les élémens affectés de radicaux; car il eut suffi de donner la Table suivante, dans laquelle N désigne le numérateur du coëfficient de x dans l'équation différencielle donnée, & où, à la suite de chaque formule d'équation différencielle, est celle de son intégrale.

TABLE V.

0^d

$$\dot{y} + N\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p}.$$

1^d

$$\dot{y} + \frac{N}{p}\dot{x} = 0 \ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p^2},$$

$$\dot{y} + \frac{N}{\alpha p + x}\dot{x} = 0 \ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + ql\,\frac{\alpha p + x}{p}.$$

2^d

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2}\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p^3}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)}\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p^2} + ql\,\frac{\alpha p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2}\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p(\alpha p + x)} + ql\,\frac{\alpha p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{\alpha p^2 + \epsilon px + x^2}\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + ql\,\frac{\alpha p^2 + \epsilon px + x^2}{p^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)(\epsilon p + x)}\,\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + ql\,\frac{\alpha p + x}{p} + rl\,\frac{\epsilon p + x}{p}.$$

3d

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2}\,\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p^4}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p + x)}\,\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p^3} + ql\,\frac{\alpha p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^2}\,\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p^2(\alpha p + x)} + ql\,\frac{\alpha p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^2 + \epsilon px + x^2)}\,\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p^2} + ql\,\frac{\alpha p^2 + \epsilon px + x^2}{p^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)(\epsilon p + x)}\,\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p^2} + ql\,\frac{\alpha p + x}{p} + rl\,\frac{\epsilon p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3}\,\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p(\alpha p + x)^2} + ql\,\frac{\alpha p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(ap+x)^2(\mathfrak{C}p+x)}\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2+bpx+cx^2}{p(ap+x)} + ql\frac{ap+x}{p} + rl\frac{\mathfrak{C}p+x}{p};$$

$$\dot{y} + \frac{N}{ap^3+\mathfrak{C}p^2x+\gamma px^2+x^3}\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap+bx}{p} + ql\frac{ap^3+\mathfrak{C}p^2x+\gamma px^2+x^3}{p^3};$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(ap^2+\mathfrak{C}px+x^2)(\gamma p+x)}\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap+bx}{p} + ql\frac{ap^2+\mathfrak{C}px+x^2}{p^2} + rl\frac{\gamma p+x}{p};$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(ap+x)(\mathfrak{C}p+x)(\gamma p+x)}\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap+bx}{p} + ql\frac{ap+x}{p} + rl\frac{\mathfrak{C}p+x}{p} + sl\frac{\gamma p+x}{p};$$

4^d

$$\dot{y} + \frac{N}{p^4}x = 0. \ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5+bp^4x+cp^3x^2+dp^2x^3+epx^4+fx^5}{p^5};$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^3(ap+x)}\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4+bp^3x+cp^2x^2+dpx^3+ex^4}{p^4} + ql\frac{ap+x}{p};$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p + x)^2}\,\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p^3(\alpha p + x)} + ql\,\frac{\alpha p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p^2 + \beta px + x^2)}\,\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p^3} + ql\,\frac{\alpha p^2 + \beta px + x^2}{p^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p + x)(\beta p + x)}\,\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p^3} + ql\,\frac{\alpha p + x}{p} + rl\,\frac{\beta p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^3}\,\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p^2(\alpha p + x)^2} + ql\,\frac{\alpha p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^2(\beta p + x)}\,\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p^2(\alpha p + x)} + ql\,\frac{\alpha p + x}{p} + rl\,\frac{\beta p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^3 + \beta p^2x + \gamma px^2 + x^3}\,\dot{x} = 0. \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + ex^2}{p^2} + ql\,\frac{\alpha p^3 + \beta p^2x + \gamma px^2 + x^3}{p^3},$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^2 + \epsilon p x + x^2)(\gamma p + x)}\,\dot{x} = 0. \ldots;$$

$$\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{\alpha p^2 + b p x + c x^2}{p^2} + q\,l\,\frac{\alpha p^2 + \epsilon p x + x^2}{p^2} + r\,l\,\frac{\gamma p + x}{p},$$

$$\ddot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)(\epsilon p + x)(\gamma p + x)}\,\dot{x} = 0. \ldots;$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{\alpha p^2 + b p x + c x^2}{p^2} + q\,l\,\frac{\alpha p + x}{p} + r\,l\,\frac{\epsilon p + x}{p} + s\,l\,\frac{\gamma p + x}{p},$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^4}\,\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{\alpha p^4 + b p^3 x + c p^2 x^2 + d p x^3 + e x^4}{p(\alpha p + x)^3} + q\,l\,\frac{\alpha p + x}{p};$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \epsilon p x + x^2)^2}\,\dot{x} = 0. \ldots n = \frac{y}{p} + \frac{\alpha p^3 + b p^2 x + c p x^2 + d x^3}{p(\alpha p^2 + \epsilon p x + x^2)} + q\,l\,\frac{\alpha p^2 + \epsilon p x + x^2}{p^2};$$

$$\ddot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3(\epsilon p + x)}\,\dot{x} = 0. \ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{\alpha p^3 + b p^2 x + c p x^2 + d x^3}{p(\alpha p + x)^2} + q\,l\,\frac{\alpha p + x}{p} + r\,l\,\frac{\epsilon p + x}{p};$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2(\epsilon p + x)^2}\,\dot{x} = 0. \ldots n = \frac{y}{p} + \frac{\alpha p^3 + b p^2 x + c p x^2 + d x^3}{p(\alpha p + x)(\epsilon p + x)} + q\,l\,\frac{\alpha p + x}{p} + r\,l\,\frac{\epsilon p + x}{p};$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2(\epsilon p^2 + \gamma p x + x^2)}\,\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{\alpha p^2 + b p x + c x^2}{p(\alpha p + x)} + q\,l\,\frac{\alpha p + x}{p} + r\,l\,\frac{\epsilon p^2 + \gamma p x + x^2}{p^2}.$$

$\dot{y} +$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 (\mathfrak{C} p + x) (\gamma p + x)} \dot{x} = 0. \ldots.$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p(\alpha p + x)} + q l \frac{\alpha p + x}{p} +$$

$$r l \frac{\mathfrak{C} p + x}{p} + s l \frac{\gamma p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{\alpha p^4 + \mathfrak{C} p^3 x + \gamma p^2 x^2 + \mathfrak{d} p x^3 + x^4} \dot{x} = 0. \ldots.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} +$$

$$q l \frac{\alpha p^4 + \mathfrak{C} p^3 x + \gamma p^2 x^2 + \mathfrak{d} p x^3 + x^4}{p^4}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^3 + \mathfrak{C} p^2 x + \gamma p x^2 + x^3) (\mathfrak{d} p + x)} \dot{x} = 0. \ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + q l \frac{\alpha p^3 + \mathfrak{C} p^2 x + \gamma p x^2 + x^3}{p^3} +$$

$$r l \frac{\mathfrak{d} p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \mathfrak{C} p x + x^2) (\gamma p^2 + \mathfrak{d} p x + x^2)} \dot{x} = 0. \ldots.$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + q l \frac{\alpha p^2 + \mathfrak{C} p x + x^2}{p^2} +$$

$$r l \frac{\gamma p^2 + \mathfrak{d} p x + x^2}{p^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \mathfrak{C} p x + x^2) (\gamma p + x) (\mathfrak{d} p + x)} \dot{x} = 0. \ldots.$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + q l \frac{\alpha p^2 + \mathfrak{C} p x + x^2}{p^2} +$$

$$r l \frac{\gamma p + x}{p} + s l \frac{\mathfrak{d} p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x) (\mathfrak{C} p + x) (\gamma p + x) (\mathfrak{d} p + x)} \dot{x} = 0. \ldots.$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + q l \frac{\alpha p + x}{p} +$$

$$r l \frac{\mathfrak{C} p + x}{p} + s l \frac{\gamma p + x}{p} + t l \frac{\mathfrak{d} p + x}{p}.$$

5d

$$\dot{y} + \frac{N}{p^5}\,\dot{x} = 0. \ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 + bp^5 +}{p^6}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^4(ap+x)}\,\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x +}{p^5} + ql\,\frac{ap+x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^3(ap+x)^2}\,\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x +}{p^4(ap+x)} + ql\,\frac{ap+x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^3(ap^2+Cpx+x^2)}\,\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x +}{p^4} + ql\,\frac{ap^2+Cpx+x^2}{p^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^3(ap+x)(Cp+x)}\,\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots \ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x +}{p^4} + ql\,\frac{ap+x}{p} + rl\,\frac{Cp+x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(ap+x)^3}\,\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x +}{p^3(ap+x)^2} + ql\,\frac{ap+x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(ap+x)^2(Cp+x)}\,\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots \ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x +}{p^3(ap+x)} + ql\,\frac{ap+x}{p} + rl\,\frac{Cp+x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(ap^3 + 6p^2x + \gamma px^2 + x^3)}\dot{x} = 0 \ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x +}{p^3} + ql\frac{ap^3 + 6p^2x + \gamma px^2 + x^3}{p^3}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(ap^2 + 6px + x^2)(\gamma p + x)}\dot{x} = 0 \ldots \ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 +}{p^3} + ql\frac{ap^2 + 6px + x^2}{p^2} + rl\frac{ap + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(ap + x)(6p + x)(\gamma p + x)}\dot{x} = 0 \ldots \ldots \ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 +}{p^3} + ql\frac{ap + x}{p} + rl\frac{6p + x}{p} + sl\frac{\gamma p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(ap + x)^4}\dot{x} = 0 \ldots \ldots \ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 +}{p^2(ap + x)^3} + ql\frac{ap + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(ap^2 + 6px + x^2)^2}\dot{x} = 0 \ldots \ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x +}{p^2(ap^2 + 6px + x^2)} + ql\frac{ap^2 + 6px + x^2}{p^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(ap + x)^3(6p + x)}\dot{x} = 0 \ldots \ldots \ldots \ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x +}{p^2(ap + x)^2} + ql\frac{ap + x}{p} + rl\frac{6p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(ap + x)^2(6p + x)^2}\dot{x} = 0 \ldots \ldots \ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x +}{p^2(ap + x)(6p + x)} + ql\frac{ap + x}{p} + rl\frac{6p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^2 (\alpha p^2 + \gamma p x + x^2)} \dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{\alpha p^3 + b p^2 x +}{p^2(\alpha p + x)} + q\, l \frac{\alpha p + x}{p} + r\, l \frac{\mathcal{C} p^2 + \gamma p x + x^2}{p^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^2 (\mathcal{C} p + x)(\gamma p + x)} \dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{\alpha p^3 + b p^2 x +}{p^2(\alpha p + x)} + q\, l \frac{\alpha p + x}{p} + r\, l \frac{\mathcal{C} p + x}{p} + s\, l \frac{\gamma p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^4 + \mathcal{C} p^3 x + \gamma p^2 x^2 + \delta p x^3 + x^4)} \dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{\alpha p^2 + b p x + c x^2}{p^2} + q\, l \frac{\alpha p^4 + \mathcal{C} p^3 x + \gamma p^2 x^2 + \delta p x^3 + x^4}{p^4},$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^3 + \mathcal{C} p^2 x + \gamma p x^2 + x^3)(\delta p + x)} \dot{x} = 0 \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{\alpha p^2 + b p x + c x^2}{p^2} + q\, l \frac{\alpha p^3 + \mathcal{C} p^2 x + \gamma p x^2 + x^3}{p^3} + r\, l \frac{\delta p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^2 + \mathcal{C} p x + x^2)(\gamma p^2 + \delta p x + x^2)} \dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{\alpha p^2 + b p x + c x^2}{p^2} + q\, l \frac{\alpha p^2 + \mathcal{C} p x + x^2}{p^2} + r\, l \frac{\gamma p^2 + \delta p x + x^2}{p^2},$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^2 + \mathcal{C} p x + x^2)(\gamma p + x)(\delta p + x)} \dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{\alpha p^2 + b p x + c x^2}{p^2} + q\, l \frac{\alpha p^2 + \mathcal{C} p x + x^2}{p^2} + r\, l \frac{\gamma p + x}{p} + s\, l \frac{\delta p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)(\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)}\dot{x} = 0 \ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p^2} + q\,l\,\frac{\alpha p + x}{p} +$$

$$r\,l\,\frac{\beta p + x}{p} + s\,l\,\frac{\gamma p + x}{p} + t\,l\,\frac{\delta p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^5}\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p(\alpha p + x)^4} +$$

$$q\,l\,\frac{\alpha p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^4(\beta p + x)}\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p(\alpha p + x)^3} +$$

$$q\,l\,\frac{\alpha p + x}{p} + r\,l\,\frac{\beta p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3(\beta p + x)^2}\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p(\alpha p + x)^2(\beta p + x)} +$$

$$q\,l\,\frac{\alpha p + x}{p} + r\,l\,\frac{\beta p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \beta px + x^2)^2(\gamma p + x)}\dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p(\alpha p^2 + \beta px + x^2)} +$$

$$q\,l\,\frac{\alpha p^2 + \beta px + x^2}{p^2} + r\,l\,\frac{\gamma p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3(\beta p^2 + \gamma px + x^2)}\dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + epx^2 + dx^3}{p(\alpha p + x)^2} +$$

$$q\,l\,\frac{\alpha p + x}{p} + r\,l\,\frac{\beta p^2 + \gamma px + x^2}{p^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3 (\epsilon p + x)(\gamma p + x)} \dot{x} = 0. \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p(\alpha p + x)^2} +$$

$$q\, l\, \frac{\alpha p + x}{p} + r\, l\, \frac{\epsilon p + x}{p} + s\, l\, \frac{\gamma p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 (\epsilon p + x)^2 (\gamma p + x)} \dot{x} = 0. \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p(\alpha p + x)(\epsilon p + x)} +$$

$$q\, l\, \frac{\alpha p + x}{p} + r\, l\, \frac{\epsilon p + x}{p} + s\, l\, \frac{\gamma p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 (\epsilon p^3 + \gamma p^2 x + \delta p x^2 + x^3)} \dot{x} = 0. \ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p(\alpha p + x)} + q\, l\, \frac{\alpha p + x}{p} +$$

$$r\, l\, \frac{\epsilon p^3 + \gamma p^2 x + \delta p x^2 + x^3}{p^3}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 (\epsilon p^2 + \gamma p x + x^2)(\delta p + x)} \dot{x} = 0. \ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p(\alpha p + x)} + q\, l\, \frac{\alpha p + x}{p} +$$

$$r\, l\, \frac{\epsilon p^2 + \gamma p x + x^2}{p^2} + s\, l\, \frac{\delta p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 (\epsilon p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)} \dot{x} = 0. \ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p(\alpha p + x)} + q\, l\, \frac{\alpha p + x}{p} +$$

$$r\, l\, \frac{\epsilon p + x}{p} + s\, l\, \frac{\gamma p + x}{p} + t\, l\, \frac{\delta p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{\alpha p^5 + \epsilon p^4 x + \gamma p^3 x^2 + \delta p^2 x^3 + \varepsilon p x^4 + x^5} \dot{x} = 0.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} +$$

$$q\, l\, \frac{\alpha p^5 + \epsilon p^4 x + \gamma p^3 x^2 + \delta p^2 x^3 + \varepsilon p x^4 + x^5}{p^5}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^4 + \zeta p^3 x + \gamma p^2 x^2 + \delta p x^3 + \varepsilon^4)(\varepsilon p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + ql\frac{\alpha p^4 +}{p^4} + rl\frac{\varepsilon p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^3 + \zeta p^2 x + \gamma p x^2 + x^3)(\delta p^2 + \varepsilon p x + x^2)} \dot{x} = 0...$$

$$..... n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + ql\frac{\alpha p^3 +}{p^3} + rl\frac{\delta p^2 + \varepsilon p x + x^2}{p^2} +$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^3 + \zeta p^2 x + \gamma p x^2 + x^3)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)} \dot{x} = 0...$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + ql\frac{\alpha p^3 +}{p^3} + rl\frac{\delta p + x}{p} + sl\frac{\varepsilon p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \zeta p x + x^2)(\gamma p^2 + \delta p x + x^2)(\varepsilon p + x)} \dot{x} = 0...$$

$$....n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{ap + x} + ql\frac{\alpha p^2 + \zeta p x + x^2}{p^2} + rl\frac{\gamma p^2 + \delta p x + x^2}{p^2} + sl\frac{\varepsilon p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \zeta p x + x^2)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)} \dot{x} = 0...$$

$$...n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + ql\frac{\alpha p^2 + \zeta p x + x^2}{p^2} + rl\frac{\gamma p + x}{p} + sl\frac{\delta p + x}{p} + tl\frac{\varepsilon p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)(\zeta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)} \dot{x} = 0...$$

$$..... n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + ql\frac{ap + x}{p} + rl\frac{\zeta p + x}{p} + sl\frac{\gamma p + x}{p} + tl\frac{\delta p + x}{p} + ul\frac{\varepsilon p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^6}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^5(\alpha p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^4(\alpha p + x)^2}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^4(\alpha p^2 + \beta px + x^2)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^4(\alpha p + x)(\beta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^3(\alpha p + x)^3}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^3(\alpha p + x)^2(\beta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^3(\alpha p^3 + \beta p^2 x + \gamma px^2 + x^3)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^3(\alpha p^2 + \beta px + x^2)(\gamma p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^3(\alpha p + x)(\beta p + x)(\gamma p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p + x)^4}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p^2 + \beta px + x^2)^2}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p + x)^3(\beta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p + x)^2(\beta p + x)^2}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p + x)^2(\beta p^2 + \gamma px + x^2)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p + x)^2(\delta p + x)(\gamma p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p^4 + \beta p^3 x + \gamma p^2 x^2 + \delta px^3 + x^4)}\dot{x} = 0.$$

$\dot{y} +$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p^3 + \epsilon p^2 x + \gamma p x^2 + x^3)(\delta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p^2 + \epsilon p x + x^2)(\gamma p^2 + \delta p x + x^2)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p^2 + \epsilon p x + x^2)(\gamma p + x)(\delta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p + x)(\epsilon p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^3}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^4(\epsilon p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^3(\epsilon p + x)^2}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^2 + \epsilon p x + x^2)^2(\gamma p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^2(\epsilon p^2 + \gamma p x + x^2)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^2(\epsilon p + x)(\gamma p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^2(\epsilon p + x)^2(\gamma p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^2(\epsilon p^3 + \gamma p^2 x + \delta p x^2 + x^3)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^2(\epsilon p^2 + \gamma p x + x^2)(\delta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^4(\epsilon p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^5 + \epsilon p^4 x + \gamma p^3 x^2 + \delta p^2 x^3 + \varepsilon p x^4 + x^5)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^4 + \epsilon p^3 x + \gamma p^2 x^2 + \delta p x^3 + x^4)(\varepsilon p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^3 + \epsilon p^2 x + \gamma p x^2 + x^3)(\delta p^2 + \varepsilon p x + x^2)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^3 + \zeta p^2 x + \gamma p x^2 + x^3)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^2 + \zeta p x + x^2)(\gamma p^2 + \delta p x + x^2)(\varepsilon p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^2 + \zeta p x + x^2)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)(\zeta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^6}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \zeta p x + x^2)^3}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^5(\zeta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^4(\zeta p + x)^2}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3(\zeta p + x)^3}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^3 + \zeta p^2 x + \gamma p x^2 + x^3)^2}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \zeta p x + x^2)^2(\gamma p + x)^2}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^4(\zeta p^2 + \gamma p x + x^2)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^4(\zeta p + x)(\gamma p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3(\zeta p + x)^2(\gamma p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2(\zeta p + x)^2(\gamma p + x)^2}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3(\zeta p^3 + \gamma p^2 x + \delta p x^2 + x^3)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \zeta p x + x^2)^2(\gamma p^2 + \delta p x + x^2)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \epsilon p x + x^2)^2 (\gamma p + x)(\delta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3 (\epsilon p^2 + \gamma p x + x^2)(\delta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$y + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 (\epsilon p + x)^2 (\gamma p^2 + \epsilon p x + x^2)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3 (\epsilon p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 (\epsilon p + x)^2 (\gamma p + x)(\delta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 (\epsilon p^4 + \gamma p^3 x + \delta p^2 x^2 + \varepsilon p x^3 + x^4)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 (\epsilon p^3 + \gamma p^2 x + \delta p x^2 + x^3)(\varepsilon p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 (\epsilon p^2 + \gamma p x + x^2)(\delta p^2 + \varepsilon p x + x^2)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 (\epsilon p^2 + \gamma p x + x^2)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 (\epsilon p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{\alpha p^6 + \epsilon p^5 x + \gamma p^4 x^2 + \delta p^3 x^3 + \varepsilon p^2 x^4 + \zeta p x^5 + x^6} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^5 + \epsilon p^4 x + \gamma p^3 x^2 + \delta p^2 x^3 + \varepsilon p x^4 + x^5)(\zeta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^4 + \epsilon p^3 x + \gamma p^2 x^2 + \delta p x^3 + x^4)(\varepsilon p^2 + \zeta p x + x^2)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^3 + \epsilon p^2 x + \gamma p x^2 + x^3)(\delta p^3 + \varepsilon p^2 x + \zeta p x^2 + x^3)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^3 + \epsilon p^2 x + \gamma p x^2 + x^3)(\delta p^2 + \varepsilon p x + x^2)(\zeta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \epsilon p x + x^2)(\gamma p^2 + \delta p x + x^2)(\varepsilon p^2 + \zeta p x + x^2)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^4 + \epsilon p^3 x + \gamma p^2 x^2 + \delta p x^3 + x^4)(\varepsilon p + x)(\zeta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^3 + \beta p^2 x + \gamma p x^2 + x^3)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)(\zeta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)(\gamma p^2 + \delta p x + x^2)(\varepsilon p + x)(\zeta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)(\zeta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)(\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)(\zeta p + x)} \dot{x} = 0.$$

7^d

$$\dot{y} + \frac{N}{p^7} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^6(\alpha p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^5(\alpha p + x)^2} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^5(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^5(\alpha p + x)(\beta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^4(\alpha p + x)^3} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^4(\alpha p + x)^2(\beta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^4(\alpha p^3 + \beta p^2 x + \gamma p x^2 + x^3)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^4(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)(\gamma p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^4(\alpha p + x)(\beta p + x)(\gamma p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^3(\alpha p + x)^4} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^3(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)^2} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^3(\alpha p + x)^3(\mathfrak{C}p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^3(\alpha p + x)^2(\mathfrak{C}p + x)^2}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^3(\alpha p + x)^2(\mathfrak{C}p^2 + \gamma px + x^2)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^3(\alpha p + x)^2(\mathfrak{C}p + x)(\gamma p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^3(\alpha p^4 + \mathfrak{C}p^3x + \gamma p^2x^2 + \delta px^3 + x^4)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^3(\alpha p^3 + \mathfrak{C}p^2x + \gamma px^2 + x^3)(\delta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^3(\alpha p^2 + \mathfrak{C}px + x^2)(\gamma p^2 + \delta px + x^2)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^3(\alpha p^2 + \mathfrak{C}px + x^2)(\gamma p + x)(\delta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^3(\alpha p + x)^2(\mathfrak{C}p + x)(\gamma p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p + x)^5}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p + x)^4(\mathfrak{C}p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p + x)^3(\mathfrak{C}p + x)^2}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p^2 + \mathfrak{C}px + x^2)^2(\gamma p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p + x)^3(\mathfrak{C}p^2 + \gamma px + x^2)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p + x)^2(\mathfrak{C}p + x)(\gamma p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p + x)^2(\mathfrak{C}p + x)^2(\gamma p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p + x)^2(\mathfrak{C}p^3 + \gamma p^2x + \delta px^2 + x^3)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(ap+x)^2(\epsilon p^2+\gamma px+x^2)(\delta p+x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(ap+x)^2(\epsilon p+x)(\gamma p+x)(\delta p+x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(ap^5+\epsilon p^4x+\gamma p^3x^2+\delta p^2x^3+\varepsilon px^4+x^5)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(ap^4+\epsilon p^3x+\gamma p^2x^2+\delta px^3+x^4)(\varepsilon p+x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(ap^3+\epsilon p^2x+\gamma px^2+x^3)(\delta p^2+\varepsilon px+x^2)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(ap^3+\epsilon p^2x+\gamma px^2+x^3)(\delta p+x)(\varepsilon p+x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(ap^2+\epsilon px+x^2)(\gamma p^2+\delta px+x^2)(\varepsilon p+x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(ap^2+\epsilon px+x^2)(\gamma p+x)(\delta p+x)(\varepsilon p+x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(ap+x)(\epsilon p+x)(\gamma p+x)(\delta p+x)(\varepsilon p+x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(ap+x)^6}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(ap^2+\epsilon px+x^2)^3}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(ap+x)^5(\epsilon p+x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(ap+x)^4(\epsilon p+x)^2}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(ap+x)^3(\epsilon p+x)^3}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(ap^3+\epsilon p^2x+\gamma px^2+x^3)^2}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(ap^2+\epsilon px+x^2)^2(\gamma p+x)^2}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(ap+x)^4(\epsilon p^2+\gamma px+x^2)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^4 (\mathfrak{C}p + x)(\gamma p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^3 (\mathfrak{C}p + x)^2 (\gamma p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^2 (\mathfrak{C}p + x)^2 (\gamma p + x)^2} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^3 (\mathfrak{C}p^3 + \gamma p^2 x + \mathfrak{d} p x^2 + x^3)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^2 + \mathfrak{C}px + x^2)^2 (\gamma p^2 + \mathfrak{d} px + x^2)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^2 + \mathfrak{C}px + x^2)^2 (\gamma p + x)(\mathfrak{d} p + x)} \dot{y} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^3 (\mathfrak{C}p^2 + \gamma px + x^2)(\mathfrak{d} p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^2 (\mathfrak{C}p + x)^2 (\gamma p^2 + \mathfrak{d} px + x^2)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^3 (\mathfrak{C}p + x)(\gamma p + x)(\mathfrak{d} p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^2 (\mathfrak{C}p + x)^2 (\gamma p + x)(\mathfrak{d} p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^2 (\mathfrak{C}p^4 + \gamma p^3 x + \mathfrak{d} p^2 x^2 + \mathfrak{e} p x^3 + x^4)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^2 (\mathfrak{C}p^3 + \gamma p^2 x + \mathfrak{d} p x^2 + x^3)(\mathfrak{e} p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^2 (\mathfrak{C}p^2 + \gamma px + x^2)(\mathfrak{d} p^2 + \mathfrak{e} px + x^2)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^2 (\mathfrak{C}p^2 + \gamma px + x^2)(\mathfrak{d} p + x)(\mathfrak{e} p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^2 (\mathfrak{C}p + x)(\gamma p + x)(\mathfrak{d} p + x)(\mathfrak{e} p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^5 + \mathfrak{C}p^5 x + \gamma p^4 x^2 + \mathfrak{d} p^3 x^3 + \mathfrak{e} p^2 x^4 + \zeta p x^5 + x^6} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^5 + \mathfrak{C}p^4 x + \gamma p^3 x^2 + \mathfrak{d} p^2 x^3 + \mathfrak{e} p x^4 + x^5)(\zeta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^4 + \epsilon p^3 x + \gamma p^2 x^2 + \delta p x^3 + x^4)(\varepsilon p^2 + \zeta p x + x^2)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^3 + \epsilon p^2 x + \gamma p x^2 + x^3)(\delta p^3 + \varepsilon p^2 x + \zeta p x^2 + x^3)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^3 + \epsilon p^2 x + \gamma p x^2 + x^3)(\delta p^2 + \varepsilon p x + x^2)(\zeta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^2 + \epsilon p x + x^2)(\gamma p^2 + \delta p x + x^2)(\varepsilon p^2 + \zeta p x + x^2)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^4 + \epsilon p^3 x + \gamma p^2 x^2 + \delta p x^3 + x^4)(\varepsilon p + x)(\zeta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^3 + \epsilon p^2 x + \gamma p x^2 + x^3)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)(\zeta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^2 + \epsilon p x + x^2)(\gamma p^2 + \delta p x + x^2)(\varepsilon p + x)(\zeta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^2 + \epsilon p x + x^2)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)(\zeta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)(\epsilon p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)(\zeta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^7}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^6(\epsilon p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^5(\epsilon p + x)^2}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^4(\epsilon p + x)^3}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \epsilon p x + x^2)^3(\gamma p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3(\epsilon p^2 + \gamma p x + x^2)^2}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^5(\epsilon p^2 + \gamma p x + x^2)}\dot{y} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2(\epsilon p + x)(\gamma p + x)}\dot{x} = 0.$$

$\dot{y} +$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^4 (\beta p + x)^2 (\gamma p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3 (\beta p + x)^3 (\gamma p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3 (\beta p + x)^2 (\gamma p + x)^2} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)^2 (\delta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^4 (\beta p^2 + \gamma p x + \delta p x^2 + x^3)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)^2 (\gamma p + x)^2 (\delta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^4 (\beta p^2 + \gamma p x + x^2) (\delta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3 (\beta p + x)^2 (\gamma p^2 + \delta p x + x^2)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^4 (\beta p + x) (\gamma p + x) (\delta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3 (\beta p + x)^2 (\gamma p + x) (\delta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 (\beta p + x)^2 (\gamma p + x)^2 (\delta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3 (\beta p^3 + \gamma p^2 x + \delta p x^2 + \varepsilon p x^3 + x^4)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)^2 (\gamma p^2 + \delta p x + \varepsilon p x^2 + x^3)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3 (\beta p^3 + \gamma p^2 x + \delta p x^2 + x^3) (\varepsilon p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 (\beta p + x)^2 (\gamma p^2 + \delta p x + \varepsilon p x^2 + x^3) (\varepsilon p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)^2 (\gamma p^2 + \delta p x + x^2) (\varepsilon p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3 (\beta p^2 + \gamma p x + x^2) (\delta p^2 + \varepsilon p x + x^2)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \mathfrak{C} p x + x^2)^2 (\gamma p + x)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3 (\mathfrak{C} p^2 + \gamma p x + x^2)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 (\mathfrak{C} p + x)^2 (\gamma p^2 + \delta p x + x^2)(\varepsilon p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 (\mathfrak{C} p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 (\mathfrak{C} p + x)^2 (\gamma p + x)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 (\mathfrak{C} p^3 + \gamma p^2 x + \delta p x^2 + \varepsilon p x^3 + \zeta p x^4 + x^5)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 (\mathfrak{C} p^4 + \gamma p^3 x + \delta p^2 x^2 + \varepsilon p x^3 + x^4)(\zeta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 (\mathfrak{C} p^3 + \gamma p^2 x + \delta p x^2 + x^3)(\varepsilon p^2 + \zeta p x + x^2)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 (\mathfrak{C} p^3 + \gamma p^2 x + \delta p x^2 + x^3)(\varepsilon p + x)(\zeta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 (\mathfrak{C} p^2 + \gamma p x + x^2)(\delta p^2 + \varepsilon p x + x^2)(\zeta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 (\mathfrak{C} p^2 + \gamma p x + x^2)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)(\zeta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 (\mathfrak{C} p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)(\zeta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{\alpha p^7 + \mathfrak{C} p^6 x + \gamma p^5 x^2 + \delta p^4 x^3 + \varepsilon p^3 x^4 + \zeta p^2 x^5 + \eta p x^6 + x^7} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^6 + \mathfrak{C} p^5 x +)(\eta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^5 + \mathfrak{C} p^4 x +)(\zeta p^2 + \eta p x + x^2)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^4 +)(\varepsilon p^3 +)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^5 +)(\zeta p + x)(\eta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^4 + \quad)\ (\varepsilon p^2 + \zeta p x + x)\ (\eta p + x)}\ \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\quad p^3 + \quad)\ (\delta p^3 + \quad)\ (\eta p + x)}\ \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^5 + \quad)\ (\delta p^2 + \varepsilon p x + x)\ (\quad p^2 + \eta p x + x^2)}\ \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^4 + \quad)\ (\varepsilon p + x)\ (\zeta p + x)\ (\eta p + x)}\ \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^3 + \mathcal{C} p^2 x + \gamma p x^2 + x^3)\ (\delta p^2 + \varepsilon p x + x^2)\ (\zeta p + x)\ (\eta p + x)}\ \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \zeta p x + x^2)\ (\gamma p^2 + \delta p x + x^2)\ (\varepsilon p^2 + \zeta p x + x^2)\ (\eta p + x)}\ \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^3 + \mathcal{C} p^2 x + \gamma p x^2 + x^3)\ (\delta p + x)\ (\varepsilon p + x)\ (\zeta p + x)\ (\eta p + x)}\ \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \mathcal{C} p x + x^2)\ (\gamma p^2 + \delta p x + x^2)\ (\varepsilon p + x)\ (\zeta p + x)\ (\eta p + x)}\ \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \mathcal{C} p x + x^2)\ (\gamma p + x)\ (\delta p + x)\ (\varepsilon p + x)\ (\zeta p + x)\ (\eta p + x)}\ \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)\ (\mathcal{C} p + x)\ (\gamma p + x)\ (\delta p + x)\ (\varepsilon p + x)\ (\zeta p + x)\ (\eta p + x)}\ \dot{x} = 0.$$

8 d

Pour avoir toutes les formules de ce degré, l'on récrira premièrement toutes celles du degré précédent, en multipliant par p le dénominateur de chaque formule; après quoi on aura

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^8}\ \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \mathcal{C} p x + x^2)^4}\ \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^7\ (\mathcal{C} p + x)}\ \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^6\ (\mathcal{C} p + x)^2}\ \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^5 (\mathfrak{C} p + x)^3} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^4 (\mathfrak{C} p + x)^4} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \mathfrak{C} p x + x^2)^3 (\gamma p + x)^2} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^4 (\mathfrak{C} p^2 + \gamma p x + x^2)^2} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^6 (\mathfrak{C} p^2 + \gamma p x + x^2)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^6 (\mathfrak{C} p + x) (\gamma p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^5 (\mathfrak{C} p + x)^2 (\gamma p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^4 (\mathfrak{C} p + x)^3 (\gamma p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^4 (\mathfrak{C} p + x)^2 (\gamma p + x)^2} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3 (\mathfrak{C} p + x)^3 (\gamma p + x)^2} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^4 + \mathfrak{C} p^3 x + \gamma p^2 x^2 + \delta p x^3 + x^4)^2} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^3 + \mathfrak{C} p^2 x + \gamma p x^2 + x^3)^2 (\delta p + x)^2} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^5 (\mathfrak{C} p^3 + \gamma p^2 x + \delta p x^2 + x^3)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \mathfrak{C} p x + x^2)^3 (\gamma p^2 + \delta p x + x^2)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \mathfrak{C} p x + x^2)^2 (\gamma p^2 + \delta p x + x^2)^2} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \mathfrak{C} p x + x^2)^3 (\gamma p + x) (\delta p + x)} \ddot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3 (\mathfrak{C} p^2 + \gamma p x + x^2)^2 (\delta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \zeta p x + x^2)^2 (\gamma p + x)^2 (\delta p + x)^2} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^5 (\zeta p^2 + \gamma p x + x) (\delta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^4 (\zeta p + x)^2 (\gamma p^2 + \delta p x + x^2)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3 (\zeta p + x)^3 (\gamma p^2 + \delta p x + x^2)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^5 (\zeta p + x) (\gamma p + x) (\delta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^4 (\zeta p + x)^2 (\gamma p + x) (\delta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3 (\zeta p + x)^3 (\gamma p + x) (\delta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3 (\zeta p + x)^2 (\gamma p + x)^2 (\delta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 (\zeta p + x)^2 (\gamma p + x)^2 (\delta p + x)^2} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^4 (\zeta p^4 + \gamma p^3 x + \delta p^2 x^2 + \varepsilon p x^3 + x^4)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^3 + \zeta p^2 x + \gamma p x^2 + x^3)^2 (\delta p^2 + \varepsilon p x + x^2)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^3 + \zeta p^2 x + \gamma p x^2 + x^3)^2 (\delta p + x) (\varepsilon p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^4 (\zeta p^3 + \gamma p^2 x + \delta p x^2 + x^3) (\varepsilon p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3 (\zeta p + x)^2 (\gamma p^3 + \delta p^2 x + \varepsilon p x^2 + x^3)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \zeta p x + x^2)^2 (\gamma p + x)^2 (\delta p^2 + \varepsilon p x + x^2)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^4 (\zeta p^2 + \gamma p x + x^2) (\delta p^2 + \varepsilon p x + x^2)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \zeta p x + x^2)^2 (\gamma p + x)^2 (\delta p + x) (\varepsilon p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^4 (\mathfrak{C} p^2 + \gamma p x + x^2)(\mathfrak{d} p + x)(\varepsilon p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3 (\mathfrak{C} p + x)^2 (\gamma p^2 + \mathfrak{d} p x + x^2)(\varepsilon p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 (\mathfrak{C} p + x)^2 (\gamma p + x)^2 (\mathfrak{d} p^2 + \varepsilon p x + x^2)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^4 (\mathfrak{C} p + x)(\gamma p + x)(\mathfrak{d} p + x)(\varepsilon p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3 (\mathfrak{C} p + x)^2 (\gamma p + x)(\mathfrak{d} p + x)(\varepsilon p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 (\mathfrak{C} p + x)^2 (\gamma p + x)^2 (\mathfrak{d} p + x)(\varepsilon p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^5 (\mathfrak{C} p^5 + \gamma p^4 x + \mathfrak{d} p^3 x^2 + \varepsilon p^2 x^3 + \zeta p x^4 + x^5)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \mathfrak{C} p x + x^2)^3 (\gamma p^4 + \mathfrak{d} p^3 x + \varepsilon p^2 x^2 + \zeta p x^3 + x^4)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3 (\mathfrak{C} p^2 + \gamma p^1 x + \mathfrak{d} p^2 x^2 + \varepsilon p x^3 + x^4)(\zeta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 (\mathfrak{C} p + x)^2 (\gamma p^4 + \mathfrak{d} p^3 x + \varepsilon p^2 x^2 + \zeta p x^3 + x^4)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \mathfrak{C} p x + x^2)^2 (\gamma p^3 + \mathfrak{d} p^2 x + \varepsilon p x^2 + x^3)(\zeta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x^3)(\mathfrak{C} p^3 + \gamma p^2 x + \mathfrak{d} p x^2 + x^3)(\varepsilon p^2 + \zeta p x + x^2)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \mathfrak{C} p x + x^2)^2 (\gamma p^2 + \mathfrak{d} p x + x^2)(\varepsilon p^2 + \zeta p x + x^2)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3 (\mathfrak{C} p^3 + \gamma p^2 x + \mathfrak{d} p x^2 + x^3)(\varepsilon p + x)(\zeta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 (\mathfrak{C} p + x)^2 (\gamma p^3 + \mathfrak{d} p^2 x + \varepsilon p x^2 + x^3)(\zeta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \mathfrak{C} p x + x^2)^2 (\gamma p^2 + \mathfrak{d} p x + x^2)(\varepsilon p + x)(\zeta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3 (\mathfrak{C} p^2 + \gamma p x + x^2)(\mathfrak{d} p^2 + \varepsilon p x + x^2)(\zeta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p+x)^2(\mathfrak{C}p+x)^2(\gamma p^2+\delta px+x^2)(\varepsilon p^2+\zeta px+x^2)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2+\mathfrak{C}px+x^2)^2(\gamma p+x)(\delta p+\varepsilon)(x+\zeta)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p+x)^3(\mathfrak{C}p^2+\gamma px+x^2)(\varepsilon p+x)(\delta p+x)(x+\zeta)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p+x)^2(\mathfrak{C}p+x)^2(\gamma p^2+\delta px+x^2)(\varepsilon p+x)(x+\zeta)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p+x)^2(\mathfrak{C}p+x)(\gamma p+x)(\delta p+x)(x+\varepsilon)(x+\zeta)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p+x)^2(\mathfrak{C}p+x)^2(\gamma p+x)(\delta p+x)(x+\varepsilon)(x+\zeta)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p+x)^2(\mathfrak{C}p^6+\gamma p^5x+\delta p^4x^2+\varepsilon p^3x^3+\zeta p^2x^4+npx^5+x^6)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p+x)^2(\mathfrak{C}p^5+\gamma p^4x+\delta p^3x^2+\varepsilon p^2x^3+\zeta px^4+x^5)(np+x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p+x)^2(\mathfrak{C}p^4+\gamma p^3x+\delta p^2x^2+\varepsilon px^3+x^4)(\zeta p^2+npx+x^2)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p+x)^2(\mathfrak{C}p^3+\gamma p^2x+\delta px^2+x^3)(\varepsilon p^2+\zeta px+nx^2+x^3)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p+x)^2(\mathfrak{C}p^4+\gamma p^3x+\delta p^2x^2+\varepsilon px^3+x^4)(\zeta p+x)(np+x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p+x)^2(\mathfrak{C}p^3+\gamma p^2x+\delta px^2+x^3)(\varepsilon p^2+\zeta px+x^2)(np+x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p+x)^2(\mathfrak{C}p^2+\gamma px+x^2)(\delta p^2+\varepsilon px+x^2)(\zeta p^2+npx+x^2)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p+x)^2(\mathfrak{C}p^3+\gamma p^2x+\delta px^2+x^3)(x+\varepsilon)(\zeta p+x)(np+x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p+x)^2(\mathfrak{C}p^2+\gamma px+x^2)(\delta p^2+\varepsilon px+x^2)(\zeta p+x)(np+x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p+x)^2(\mathfrak{C}p^2+\gamma px+x^2)(\delta p+x)(\varepsilon p+x)(\zeta p+x)(np+x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p+x)^2(\mathfrak{C}p+x)(\gamma p+x)(\delta p+x)(\varepsilon p+x)(\zeta p+x)(np+x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{\alpha p^9+\mathfrak{C}p^7x+\gamma p^6x^2+\delta p^5x^3+\varepsilon p^4x^4+\zeta p^3x^5+np^2x^6+\theta px^7+x^8}\dot{x} = 0$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^{7} +)\ (\theta p + x)}\ \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^{6} +)\ (\eta p^{2} + \theta p x + x^{2})}\ \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^{5} +)\ (\zeta p^{3} +)}\ \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^{4} +)\ (\varepsilon p^{4} +)}\ \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^{6} +)\ (\eta p + x)\ (\theta p + x)}\ \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^{5} +)\ (\zeta p^{2} + \eta p x + x^{2})\ (\theta p + x)}\ \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^{4} +)\ (\varepsilon p^{3} +)\ (\theta p + x)}\ \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^{4} +)\ (\varepsilon p^{2} + \zeta p x + x^{2})\ (\eta p^{2} + \theta p x + x^{2})}\ \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^{3} +)\ (\delta p^{3} +)\ (\eta p^{2} + \theta p x + x^{2})}\ \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^{5} +)\ (\zeta p + x)\ (\eta p + x)\ (\theta p + x)}\ \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^{4} +)\ (\varepsilon p^{2} + \zeta p x + x^{2})\ (\eta p + x)\ (\theta p + x)}\ \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^{3} +)\ (\delta p^{3} +)\ (\eta p + x)\ (\theta p + x)}\ \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^{3} +)\ (\delta p^{2} + \varepsilon p x + x^{2})\ (\zeta p^{2} + \eta p x + x^{2})\ (\theta p + x)}\ \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^{2} +)\ (\gamma p^{2} +)\ (\varepsilon p^{2} +)\ (\eta p^{2} +)}\ \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^{4} +)\ (\varepsilon p + x)\ (\zeta p + x)\ (\eta p + x)\ (\theta p + x)}\ \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^{3} +)\ (\delta p^{2} + \varepsilon p x + x^{2})\ (\zeta p + x)\ (\eta p + x)\ (\theta p + x)}\ \dot{x} = 0.$$

$\dot{y} +$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \epsilon p x + x^2)(\gamma p^2 + \delta p x + x^2)(\varepsilon p^2 + \zeta p x + x^2)} \dot{x} = 0.$$

$$\overline{(\eta p + x)(\theta p + x)}$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \epsilon p x + x^2)(\gamma p^2 + \delta p x + x^2)(\varepsilon p^2 + \zeta p x + x^2)} \dot{x} = 0.$$

$$\overline{(\eta p + x)(\theta p + x)}$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \epsilon p x + x^2)(\gamma p^2 + \delta p x + x^2)(\varepsilon + x)(\zeta + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\overline{(\eta p + x)(\theta p + x)}$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \epsilon p x + x^2)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\varepsilon + x)(\zeta + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\overline{(\eta p + x)(\theta p + x)}$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)(\epsilon p + x)(\gamma p + x)(\delta + x)(\varepsilon + x)(\zeta + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\overline{(\eta + x)(\theta p + x)}$$

APPLICATION DE LA MÉTHODE AUX ÉQUATIONS AUX SECONDES DIFFÉRENCES.

FORMULES de toutes les Équations possibles aux secondes différences sans radicaux.

PREMIÈRE SUITE.
$$\ddot{y} + \frac{b_1\dot{x}^2 + b_2\dot{x}\dot{y} + b_3\dot{y}^2}{c_1 p + c_2 x + c_3 y} = 0,$$

$$\ddot{y} + \frac{\begin{array}{llll} + b_1 p\dot{x}^2 & + b_4 p\dot{x}\dot{y} & + b_7 p\dot{y}^2 & \\ + b_2 x & + b_5 x & + b_8 x & \\ + b_3 y & + b_6 y & + b_9 y & \end{array}}{c_1 p^2 + c_2 px + c_3 py + c_4 x^2 + c_5 xy + c_6 y^2} = 0,$$

$$\ddot{y} + \frac{\begin{array}{llll} + b_1 p^2\dot{x}^2 & + b_7 p^2\dot{x}\dot{y} & + b_{13} p^2\dot{y}^2 & \\ + b_2 px & + b_8 px & + b_{14} px & \\ + b_3 py & + b_9 py & + b_{15} py & \\ + b_4 x^2 & + b_{10} x^2 & + b_{16} x^2 & \\ + b_5 xy & + b_{11} xy & + b_{17} xy & \\ + b_6 y^2 & + b_{12} y^2 & + b_{18} y^2 & \end{array}}{\begin{array}{l} c_1 p^3 + c_2 p^2 x + c_3 p^2 y + c_4 px^2 + c_5 pxy + \\ c_6 py^2 + c_7 x^3 + c_8 x^2 y + c_9 xy^2 + c_{10} y^3 \end{array}} = 0, \text{ \&c.}$$

SECONDE SUITE.
$$\ddot{y} + \frac{b_1\dot{x}^3 + b_2\dot{x}^2\dot{y} + b_3\dot{x}\dot{y}^2 + b_4\dot{y}^3}{\begin{array}{l} + c_1 p\dot{x} + c_4 p\dot{y} \\ + c_2 x + c_5 x \\ + c_3 y + c_6 y \end{array}} = 0,$$

$$\ddot{y} + \frac{\begin{array}{llll} + b_1 p\dot{x}^3 & + b_4 p\dot{x}^2\dot{y} & + b_7 p\dot{x}\dot{y}^2 & + b_{10} p\dot{y}^3 \\ + b_2 x & + b_5 x & + b_8 x & + b_{11} x \\ + b_3 y & + b_6 y & + b_9 y & + b_{12} y \end{array}}{\begin{array}{l} + c_1 p^2\dot{x} + c_7 p^2\dot{y} \\ + c_2 px + c_8 px \\ + c_3 py + c_9 py \\ + c_4 x^2 + c_{10} x^2 \\ + c_5 xy + c_{11} xy \\ + c_6 y^2 + c_{12} y^2 \end{array}} = 0,$$

$$\ddot{y} + \frac{\begin{array}{llll} + b1p^3\dot{x}^1 & + b7p^2\dot{x}^2\dot{y} & + b13p^2\dot{x}\dot{y}^2 & + b19p^2\dot{y}^3 \\ + b2p\dot{x} & + b8p\dot{x} & + b14p\dot{x} & + b20p\dot{x} \\ + b3p\dot{y} & + b9p\dot{y} & + b15p\dot{y} & + b21p\dot{y} \\ + b4\dot{x}^2 & + b10\dot{x}^2 & + b16\dot{x}^2 & + b22\dot{x}^2 \\ + b5\dot{x}\dot{y} & + b11\dot{x}\dot{y} & + b17\dot{x}\dot{y} & + b23\dot{x}\dot{y} \\ + b6\dot{y}^2 & + b12\dot{y}^2 & + b18\dot{y}^2 & + b24\dot{y}^2 \end{array}}{\begin{array}{ll} + c1p^3\dot{x} & + c11p^2\dot{y} \\ + c2p^2\dot{x} & + c12p^2\dot{x} \\ + c3p^2\dot{y} & + c13p^2\dot{y} \\ + c4p\dot{x}^2 & + c14p\dot{x}^2 \\ + c5p\dot{x}\dot{y} & + c15p\dot{x}\dot{y} \\ + c6p\dot{y}^2 & + c16p\dot{y}^2 \\ + c7\dot{x}^3 & + c17\dot{x}^3 \\ + c8\dot{x}^2\dot{y} & + c18\dot{x}^2\dot{y} \\ + c9\dot{x}\dot{y}^2 & + c19\dot{x}\dot{y}^2 \\ + c10\dot{y}^3 & + c20\dot{y}^3 \end{array}} = 0, \text{ \&c.}$$

III.e SUITE. $$\ddot{y} + \frac{b1\dot{x}^4 + b2\dot{x}^3\dot{y} + b3\dot{x}^2\dot{y}^2 + b4\dot{x}\dot{y}^3 + b5\dot{y}^4}{\begin{array}{lll} + c1p\dot{x}^2 & + c4p\dot{x}\dot{y} & + c7p\dot{y}^2 \\ + c2\dot{x} & + c5\dot{x} & + c8\dot{x} \\ + c3\dot{y} & + c6\dot{y} & + c9\dot{y} \end{array}} = 0,$$

$$\ddot{y} + \frac{\begin{array}{lllll} + b1p\dot{x}^4 & + b4p\dot{x}^3\dot{y} & + b7p\dot{x}^2\dot{y}^2 & + b10p\dot{x}\dot{y}^3 & + b14p\dot{y}^4 \\ + b2\dot{x} & + b5\dot{x} & + b8\dot{x} & + b12\dot{x} & + b15\dot{x} \\ + b3\dot{y} & + b6\dot{y} & + b9\dot{y} & + b13\dot{y} & + b16\dot{y} \end{array}}{\begin{array}{llll} + c1p^2\dot{x}^2 & + c7p^2\dot{x}\dot{y} & + c13p^2\dot{y}^2 & \\ + c2p\dot{x} & + c8p\dot{x} & + c14p\dot{x} & \\ + c3p\dot{y} & + c9p\dot{y} & + c15p\dot{y} & \\ + c4\dot{x}^2 & + c10\dot{x}^2 & + c16\dot{x}^2 & \\ + c5\dot{x}\dot{y} & + c11\dot{x}\dot{y} & + c17\dot{x}\dot{y} & \\ + c6\dot{y}^2 & + c12\dot{y}^2 & + c18\dot{y}^2 & \end{array}} = 0, \text{ \&c.}$$

IV.e SUITE. $$\ddot{y} + \frac{b1\dot{x}^5 + b2\dot{x}^4\dot{y} + b3\dot{x}^3\dot{y}^2 + b4\dot{x}^2\dot{y}^3 + b5\dot{x}\dot{y}^4 + b6\dot{y}^5}{\begin{array}{llll} + c1p\dot{x}^3 & + c4p\dot{x}^2\dot{y} & + c7p\dot{x}\dot{y}^2 & + c10p\dot{y}^3 \\ + c2\dot{x} & + c5\dot{x} & + c8\dot{x} & + c11\dot{x} \\ + c3\dot{y} & + c6\dot{y} & + c9\dot{y} & + c12\dot{y} \end{array}} = 0, \text{ \&c.}$$

FORMULES de toutes les Intégrales possibles d'équations aux secondes différences sans radicaux.

PREMIÈRE SUITE. $$n = \frac{\begin{array}{ll} + a1p\dot{x} & + a4p\dot{y} \\ + a2\dot{x} & + a5\dot{x} \\ + a3\dot{y} & + a6\dot{y} \end{array}}{\begin{array}{ll} + \alpha1p\dot{x} & + \alpha4p\dot{y} \\ + \alpha2\dot{x} & + \alpha5\dot{x} \\ + \alpha3\dot{y} & + \alpha6\dot{y} \end{array}},$$

$$n = \frac{\begin{array}{ll} +a1p^3\dot{x} & +a7p^2\dot{y} \\ +a2px & +a8px \\ +a3py & +a9py \\ +a4x^2 & +a10x^2 \\ +a5xy & +a11xy \\ +a6y^2 & +a12y^2 \end{array}}{\begin{array}{ll} +a1p^2\dot{x} & +a7p^2\dot{y} \\ +a2px & +a8px \\ +a3py & +a9py \\ +a4x^2 & +a10x^2 \\ +a5xy & +a11xy \\ +a6y^2 & +a12y^2 \end{array}}, \quad n = \frac{\begin{array}{ll} +a1p^3\dot{x} & +a11p^3\dot{y} \\ +a2p^2x & +a12p^2x \\ +a3p^2y & +a13p^2y \\ +a4px^2 & +a14px^2 \\ +a5pxy & +a15pxy \\ +a6py^2 & +a16py^2 \\ +a7x^3 & +a17x^3 \\ +a8x^2y & +a18x^2y \\ +a9xy^2 & +a19xy^2 \\ +a10y^3 & +a20y^3 \end{array}}{\begin{array}{ll} +a1p^3\dot{x} & +a11p^3\dot{y} \\ +a2p^2x & +a12p^2x \\ +a3p^2y & +a13p^2y \\ +a4px^2 & +a14px^2 \\ +a5pxy & +a15pxy \\ +a6py^2 & +a16py^2 \\ +a7x^3 & +a17x^3 \\ +a8x^2y & +a18x^2y \\ +a9xy^2 & +a19xy^2 \\ +a10y^3 & +a20y^3 \end{array}}, \text{ &c.}$$

IIe SUITE. $$n = \frac{\begin{array}{lll} +a1p\dot{x}^2 & +a4p\ddot{xy} & +a7py^2 \\ +a2x & +a5x & +a8x \\ +a3y & +a6y & +a9y \end{array}}{\begin{array}{lll} +a1p\dot{x}^2 & +a4p\dot{x}\dot{y} & +a7py^2 \\ +a2x & +a5x & +a8x \\ +a3y & +a6y & +a9y \end{array}},$$

$$n = \frac{\begin{array}{lll} +a1p^2\dot{x}^2 & +a7p^2\dot{x}\dot{y} & +a13p^2\dot{y}^2 \\ +a2px & +a8px & +a14px \\ +a3py & +a9py & +a15py \\ +a4x^2 & +a10x^2 & +a16x^2 \\ +a5xy & +a11xy & +a17xy \\ +a6y^2 & +a12y^2 & +a18y^2 \end{array}}{\begin{array}{lll} +a1p^2\dot{x}^2 & +a7p^2\dot{x}\dot{y} & +a13p^2\dot{y}^2 \\ +a2px & +a8px & +a14px \\ +a3py & +a9py & +a15py \\ +a4x^2 & +a10x^2 & +a16x^2 \\ +a5xy & +a11xy & +a17xy \\ +a6y^2 & +a12y^2 & +a18y^2 \end{array}}, \text{ &c.}$$

IIIe SUITE. $$n = \frac{\begin{array}{llll} +a1p\dot{x}^3 & +a4p\dot{x}^2\dot{y} & +a7p\dot{x}\ddot{y}^2 & +a10p\dot{y}^3 \\ +a2x & +a5x & +a8x & +a11x \\ +a3y & +a6y & +a9y & +a12y \end{array}}{\begin{array}{llll} +a1p\dot{x}^3 & +a4p\dot{x}^2\dot{y} & +a7p\dot{x}\ddot{y}^2 & +a10p\dot{y}^3 \\ +a2x & +a5x & +a8x & +a11x \\ +a3y & +a6y & +a9y & +a12y \end{array}}.$$

I.

Soit $n = \frac{+a1p\dot{x}+a4p\dot{y}+a2x+a5x+a3y+a6y}{+\alpha 1p\dot{x}+\alpha 4p\dot{y}+\alpha 2x+\alpha 5x+\alpha 3y+\alpha 6y}$ en différenciant, on aura l'équation $\ddot{y} + \frac{+a'1p\dot{x}^2+(-a'2+a'1+a41)p\dot{x}\dot{y}-a'2y+a'2x+(-a42+a'3)y}{+(-a'3+a'4+a'51)p\dot{x}\dot{y}^2+(-a'3+a42)x-a'5y+a'4p\dot{y}^3+a'5x} = 0$, qui, en supposant $+a'1p^2\dot{x}+(a'2+a41)px+(a'3+a51)py+a'2x^2+(a'3+a42)xy+a'3y^2$

en supposant les quinze premières conditions du Lemme, sera la formule de toutes les équations dont l'intégrale est $n =$, &c.

Il n'y a que les deux premières équations de la première Suite, & les deux premières de la seconde, qui puissent appartenir à la première formule, & dont par conséquent l'intégrale puisse être celle de cette formule.

Soit $n = \frac{+a1p^2\dot{x}+a7p^2\dot{y}+a2px+a8px+a3py+a9py+a4x^2+a10x^2+a5xy+a11xy+a6y^2+a12y^2}{+\alpha 1p^2\dot{x}+\alpha 7p^2\dot{y}+\alpha 2px+\alpha 8px+\alpha 3py+\alpha 9py+\alpha 4x^2+\alpha 10x^2+\alpha 5xy+\alpha 11xy+\alpha 6y^2+\alpha 12y^2}$ en différenciant, on aura l'équa-

$$
\begin{aligned}
&+ a^{11} p^{1} \dot{x}^{3} \\
&+ 2a^{31} p^{2} x \\
&+ (-a^{12} + a^{41}) p^{2} y \\
&+ a^{52} p x^{2} \\
&+ 2a^{13} p x y \\
&+ (-a^{42} + a^{23}) p y^{2} \\
&- a^{14} x^{3} \\
&- 2a^{24} x y^{2} \\
&- a^{15} y^{3}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&+ (-a^{52} + a^{21} + a^{71}) p^{3} \dot{x}^{2} \dot{y} \\
&+ (-2a^{14} + a^{32} + a^{41} + 2a^{91}) p^{2} x \\
&+ (-a^{72} - a^{25} + a^{53} + 2a^{51} + a^{101}) p^{2} y \\
&+ (a^{62} - a^{44} - a^{13} + a^{32}) p x^{2} \\
&+ (-2a^{54} + 2a^{73} + 2a^{42}) p x y \\
&+ (-a^{102} - a^{45} + a^{33} + a^{26} + a^{83}) p y^{2} \\
&+ a^{14} x^{3} \\
&+ (-a^{74} + a^{55} + 2a^{24}) x^{2} y \\
&+ (-2a^{64} + a^{15} + 2a^{46}) x y^{2} \\
&+ (-a^{75} + a^{56}) y^{3}
\end{aligned}
$$

tion $\ddot{y} +$ —— $=$ o,

$$
\begin{aligned}
&+ (-a^{43} + a^{17} + a^{81}) p^{3} \dot{x} \dot{y}^{2} \\
&+ (-a^{53} - a^{25} + 2a^{17} + a^{72} + a^{101}) p^{2} x \\
&+ (-a^{18} - 2a^{16} + a^{47} + 2a^{111}) p^{2} y \\
&+ (-a^{73} + a^{28} - a^{35} + a^{54} + a^{92}) p x^{2} \\
&+ (2a^{19} - 2a^{26} + 2a^{102}) p x y \\
&+ (a^{93} - a^{48} - a^{36}) p y^{2} \\
&+ (-a^{35} + a^{74}) x^{3} \\
&+ (-a^{110} - 2a^{46} + 2a^{84}) x^{2} y \\
&+ (a^{75} - 2a^{210} - a^{36}) x y^{2} \\
&- a^{111} y^{3}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&+ a^{27} p^{1} \dot{y}^{3} \\
&+ (a^{18} + a^{47}) p^{2} x \\
&+ 2a^{57} p^{2} y \\
&+ (-a^{19} + a^{18}) p x^{2} \\
&+ 2a^{48} p x y \\
&+ a^{39} p y^{2} \\
&+ a^{110} x^{3} \\
&+ 2a^{210} x^{2} y \\
&+ a^{111} x y^{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ a^{61} p^{4} \dot{x} \\
&+ (a^{52} + a^{71}) p^{3} x \\
&+ (a^{43} + a^{81}) p^{3} y \\
&+ (a^{34} + a^{62} + a^{91}) p^{2} x^{2} \\
&+ (a^{25} + a^{53} + a^{72} + a^{101}) p^{2} x y \\
&+ (a^{16} + a^{63} + a^{41}) p^{2} y^{2} \\
&+ (a^{44} + a^{82}) p x^{3} \\
&+ (a^{35} + a^{54} + a^{73} + a^{92}) p x^{2} y \\
&+ (a^{26} + a^{45} + a^{83} + a^{102}) p x y^{2} \\
&+ (a^{36} + a^{43}) p y^{3} \\
&+ a^{46} x^{4} \\
&+ (a^{15} + a^{74}) x^{3} y \\
&+ (a^{46} + a^{5} + a^{48}) x^{2} y^{2} \\
&+ (a^{56} + a^{75}) x y^{3} \\
&+ a^{66} y^{4}
\end{aligned}
$$

qui, en ſuppoſant les quatre cents quatre-vingt-quinze conditions du Lemme, ſera la formule de toutes les équations dont l'intégrale eſt $n =$, &c.

Il n'y a que les quatre premières équations de la première Suite, & les quatre premières de la ſeconde, qui puiſſent appartenir à la ſeconde formule, & dont par conſéquent l'intégrale puiſſe être celle de cette formule.

$$\text{Soit } n = \frac{+a_1 p\dot{x}^2 + a_4 p\dot{x}\dot{y} + a_7 p\dot{y}^2 + a_2 x + a_5 x + a_8 x + a_3 y + a_6 y + a_9 y}{+a_1 p\dot{x}^2 + a_4 p\dot{x}\dot{y} + a_7 p\dot{y}^2 + a_2 x + a_5 x + a_8 x + a_3 y + a_6 y + a_9 y}$$

en différenciant, on aura l'équation

$$\ddot{y} + \frac{+a^3_1 p\dot{x}^5 + (-a^2_2 + a^4_1 + a^2_1)p\dot{x}^4\dot{y} - a^1_2 y + a^1_2 x + (-a^4_2 + a^2_3)y}{+(-a^5_2 + a^1_4 - a^1_3 + a^7_1 + a^5_1)p\dot{x}^3\dot{y}^2 + (-a^2_3 + a^4_2)x + (-a^7_2 - a^1_5 + a^5_3)y}$$

$$+(-a^2_5 - a^4_3 + a^4_4 + a^2_4 + a^8_1)p\dot{x}^2\dot{y}^3 + (-a^5_3 + a^1_5 + a^7_2)x + (-a^4_5 + a^2_6)y$$

$$+(a^1_7 - a^1_6 + a^5_4)p\dot{x}\dot{y}^4 + a^2_7 p\dot{y}^5 + (-a^2_6 + a^4_5)x + a^1_8 x - a^1_8 y$$

$$= 0;$$

$$\begin{array}{lll} +a^3_1 p^2\dot{x}^3 & +2a^6_1 p^2\dot{x}^2\dot{y} & +a^1_4 p^2\dot{x}\dot{y}^2 \\ +(a^2_2 + a^4_1)p\dot{x} & +(2a^3_2 + 2a^7_1)p\dot{x} & +(a^4_4 + a^2_5)p\dot{x} \\ +(a^2_3 + a^5_1)p\dot{y} & +(2a^4_3 + 2a^8_1)p\dot{y} & +(a^7_4 + a^2_6)p\dot{y} \\ +a^3_2 x^2 & +2a^6_2 x^2 & +a^5_5 x^2 \\ +(a^2_3 + a^4_2)xy & +(2a^5_3 + 2a^7_2)xy & +(a^4_5 + a^2_6)xy \\ +a^3_3 y^2 & +2a^6_3 y^2 & +a^3_6 y^2 \end{array}$$

qui, en supposant les cent vingt-six conditions du Lemme, sera la formule de toutes les équations dont l'intégrale est $n =$, &c.

Il n'y a que les deux premières équations de la première Suite, les deux premières de la seconde, les deux premières de la troisième, & les deux premières de la quatrième, qui puissent appartenir à cette seconde-première formule, & dont par conséquent l'intégrale puisse être celle de cette formule.

II.

Pour pouvoir rapporter l'équation

$$\ddot{y} + \frac{b_1\dot{x}^2 + b_2\dot{x}\dot{y} + b_3\dot{y}^2}{c_1 p + c_2 x + c_3 y} = 0$$ à la première formule,

il faut la multiplier par $+ c1\,p\dot{x} + c4\,p\dot{y}$, on aura
$+ c2\,\dot{x} + c5\,\dot{x}$
$+ c3\,\dot{y} + c6\,\dot{y}$

$$\ddot{y} + \frac{\begin{array}{lll} + c1b1p\dot{x}^3 + (c1b2 + c4b1)p\dot{x}^2\dot{y} + (c1b3 + c4b2)p\dot{x}\dot{y}^2 + c4b3p\dot{y}^3 & & \\ + c2b1\dot{x} + (c2b2 + c5b1)\dot{x} & + (c2b3 + c5b2)\dot{x} & + c5b3\dot{x} \\ + c3b1\dot{y} + (c3b2 + c6b1)\dot{y} & + (c3b3 + c6b2)\dot{y} & + c6b3\dot{y} \end{array}}{\begin{array}{ll} + c1\mathcal{C}1p^2\dot{x}^2 & + c4\mathcal{C}1p^2\dot{y}^2 \\ + (c1\mathcal{C}2 + c2\mathcal{C}1)p\dot{x} & + (c4\mathcal{C}2 + c5\mathcal{C}1)p\dot{x} \\ + (c1\mathcal{C}3 + c3\mathcal{C}1)p\dot{y} & + (c4\mathcal{C}3 + c6\mathcal{C}1)p\dot{y} \\ + c2\mathcal{C}2\dot{x}^2 & + c5\mathcal{C}2\dot{x}^2 \\ + (c2\mathcal{C}3 + c3\mathcal{C}2)\dot{x}\dot{y} & + (c5\mathcal{C}3 + c6\mathcal{C}2)\dot{x}\dot{y} \\ + c3\mathcal{C}3\dot{y}^2 & + c6\mathcal{C}3\dot{y}^2 \end{array}} = 0;$$

& en comparant avec la formule, on aura

$a'1 = c1\,b1$, $\quad - a'2 = c3\,b1$,
$\qquad\qquad a'2 = c2\,b2 + c5\,b1$

$- a^2 2 + a^2 1 + a^4 1 = c1\,b2 + c4\,b1$,
$a^2 2 + a^4 1 = c1\,\mathcal{C}2 + c2\,\mathcal{C}1$

$- a^4 2 + a^2 3 = c3\,b2 + c6\,b1$,
$- a^2 3 + a^4 2 = c2\,b3 + c5\,b2$
$a^2 3 + a^4 2 = c2\,\mathcal{C}3 + c3\,\mathcal{C}2$

$- a'3 + a'4 + a^5 1 = c1\,b3 + c4\,b2$,
$a'3 + a'1 = c1\,\mathcal{C}3 + c3\,\mathcal{C}1$

$- a'5 = c3\,b3 + c6\,b2$, $\quad a^2 4 = c4\,b3$
$a'5 = c5\,b3$

$a^3 1 = c1\,\mathcal{C}1$, $\quad a^3 2 = c2\,\mathcal{C}2$, $\quad a^3 3 = c3\,\mathcal{C}3$, &
$c2\,b1 = 0$, $c6\,b3 = 0$, $c4\mathcal{C}1 = 0$, $c4\mathcal{C}2 + c5\mathcal{C}1 = 0$, $c4\mathcal{C}3 + c6\mathcal{C}1 = 0$, $c5\mathcal{C}2 = 0$, $c5\mathcal{C}3 + c6\mathcal{C}2 = 0$, $c6\mathcal{C}3 = 0$, $c3\,b1 + c2\,b2 + c5\,b1 = 0$, $c3\,b2 + c6\,b1 + c2\,b3 + c5\,b2 = 0$, $c3\,b3 + c6\,b2 + c5\,b3 = 0$.

Que

Que $c2$ ne ſoit pas $= 0$, on aura $b1 = 0$, $b2 = 0$, $b3 = 0$, par conſéquent $c2$ eſt néceſſairement $= 0$; on trouvera que $c6$, $c4$, $c5$, $c3$, ſont auſſi néceſſairement $= 0$.

Soit $c1 = 1$, on aura $a'1 = b1$, $a^3 1 = \mathfrak{C}1$,

$$a'2 = 0 \quad a^3 2 = 0 \quad a^4 2 = 0$$
$$a^2 3 = 0 \quad a^3 3 = 0$$
$$a^2 4 = 0$$
$$a'5 = 0$$

$$- a^2 2 + a^2 1 + a^4 1 = b2;$$
$$a^2 2 + a^4 1 = \mathfrak{C}2$$

$$- a'3 + a'4 + a^5 1 = b3;$$
$$a'3 + a^5 1 = \mathfrak{C}3$$

& en ſubſtituant dans les conditions de la formule, on aura $- a^2 1\, a^2 2 + b1\, a'3 = 0$, $a^4 1\, a^2 2 + b1\, a'4 = 0$, $a^4 1\, a'3 + a^2 1\, a'4 = 0$, $a^3 1\, a^2 2 = 0$, $a^3 1\, a'3 = 0$, $a^5 1\, a'4 = 0$.

Premier Cas. Soit $a^5 1 = 0$, on aura $a'3 = \mathfrak{C}3$; $a'4 = b3 + \mathfrak{C}3$, $- a^2 1\, a^2 2 + b1\, \mathfrak{C}3 = 0$, $a^4 1\, a^2 2 + b1\,(b3 + \mathfrak{C}3) = 0$, $\mathfrak{C}3\, a^4 1 + (b3 + \mathfrak{C}3)\, a^2 1 = 0$, $a^2 2 + a^4 1 = \mathfrak{C}2$, $2a^4 1 + a^2 1 = b2 + \mathfrak{C}2$; donc $a^4 1 = \frac{(b2 + \mathfrak{C}2)(b3 + \mathfrak{C}3)}{2b3 + \mathfrak{C}3}$, $a^2 1 = \frac{-\mathfrak{C}3\,(b2 + \mathfrak{C}2)}{2b3 + \mathfrak{C}3}$; $a^2 2 = \frac{b3\,\mathfrak{C}2 - b2\,(b3 + \mathfrak{C}3)}{2b3 + \mathfrak{C}3}$, & $b1\,(2b3 + \mathfrak{C}3)^2 = (b2 + \mathfrak{C}2)\,[b3\,.\,(b2 - \mathfrak{C}2) + b2\,\mathfrak{C}3]$.

Second Cas. Soit $a^2 2 = 0$, $a'3 = 0$, $a'4 = 0$, on aura $a^5 1 = b3$, $a^4 1 = \mathfrak{C}2$, $a^2 1 = b2 - \mathfrak{C}2$, & $\mathfrak{C}3 = b3$.

Soit, par exemple, dans le premier Cas, $b2 = -4$, $b3 = 3$, $\mathcal{C}2 = 5$, $\mathcal{C}3 = -7$, on aura $b1 = 1$. Soit $\mathcal{C}1 = 2$, l'équation à intégrer sera

$$\ddot{y} + \frac{\dot{x}^2 - 4\dot{x}\dot{y} + 3\dot{y}^2}{2p + 5x - 7y} = 0,$$ & on aura

$a'1 = 1$, $a^2 1 = -7$, $a^3 1 = 2$, $a^4 1 = 4$, $a^5 1 = 0$;
$a'2 = 0$ $a^2 2 = 1$ $a^3 2 = 0$ $a^4 2 = 0$
$a'3 = -7$ $a^2 3 = 0$ $a^3 3 = 0$
$a'4 = -4$ $a^2 4 = 0$
$a'5 = 0$

ou $\alpha 1\,a2 - a1\,\alpha 2 = 1$; $\alpha 1\,a3 - a1\,\alpha 3 = -7$,
$\alpha 2\,a3 - a2\,\alpha 3 = 0$ $\alpha 2\,a4 - a2\,\alpha 4 = 1$,
$\alpha 3\,a4 - a3\,\alpha 4 = -7$ $\alpha 3\,a5 - a3\,\alpha 5 = 0$
$\alpha 4\,a5 - a4\,\alpha 5 = -4$ $\alpha 4\,a6 - a4\,\alpha 6 = 0$
$\alpha 5\,a6 - a5\,\alpha 6 = 0$

$\alpha 1\,a4 - a1\,\alpha 4 = 2$, $\alpha 1\,a5 - a1\,\alpha 5 = 4$;
$\alpha 2\,a5 - a2\,\alpha 5 = 0$ $\alpha 2\,a6 - a2\,\alpha 6 = 0$,
$\alpha 3\,a6 - a3\,\alpha 6 = 0$

$\alpha 1\,a6 - a1\,\alpha 6 = 0$.

Donc $\alpha 1 = \frac{1 + a1\,\alpha 2}{a2}$; en substituant cette valeur de $\alpha 1$, on aura $\alpha 2\,a3 - a2\,\alpha 3 = \frac{-7a2 - a3}{a1} = 0$,

$$\alpha 2\,a4 - a2\,\alpha 4 = \frac{2a2 - a4}{a1} = 1;$$

$$\alpha 2\,a5 - a2\,\alpha 5 = \frac{4a2 - a5}{a1} = 0;$$

$$\alpha 2\,a6 - a2\,\alpha 6 = \frac{-a6}{a1} = 0.$$

$\alpha 2 = \frac{1 + a2\,\alpha 4}{f4}$; en substituant cette valeur de $\alpha 2$;

on aura $a3\,a4 - a3\,a4 = \frac{-a3}{a2} = 7$,

$a4\,a5 - a4\,a5 = \frac{-a5}{a2} = -4$;

$a4\,a6 - a4\,a6 = \frac{-a6}{a2} = 0$.

$a3 = \frac{-7 + a3\,a4}{a4}$; en substituant cette valeur de $a3$, on aura $a4\,a5 - a4\,a5 = \frac{7a5}{a3} = -4$,

$a4\,a6 - a4\,a6 = \frac{7a6}{a3} = 0$.

$a4 = \frac{-4 + a4\,a5}{a5}$; en substituant cette valeur de $a4$, on aura $a5\,a6 - a5\,a6 = \frac{4a6}{a4} = 0$.

Donc $7a2 + a3 = 0$, $2a2 - a4 = a1$, $4a2 - a5 = 0$, $a6 = 0$, $4a3 + 7a5 = 0$. Soit $a3 = 7$, on aura $a2 = -1$, $a5 = -4$. Soit $a1 = 0$, on aura $a4 = -2$; en substituant pour $a1$, $a2$, $a3$, $a4$, $a5$, $a6$, leurs valeurs, on aura $a1 = -1$, $7a2 + a3 = 0$, $-2a2 + a4 = 1$, $-4a2 + a5 = 0$, $a6 = 0$, $-2a3 - 7a4 = -7$, $-4a3 - 7a5 = 0$, $-4a4 + 2a5 = -4$. Soit $a2 = 0$, on aura $a3 = 0$, $a4 = 1$, $a5 = 0$, & l'intégrale sera $n = \frac{-xx + 7yx - 2py - 4xy}{-px + py}$.

Soit l'équation $\ddot{y} + \frac{x^3 + 2x\dot{y} - 3y^2}{p - 5x - 3y} = 0$, donc $b1 = 1$, $b2 = 2$, $b3 = -3$, $61 = 1$; $62 = -5$, $63 = -3$.

Comme les coefficiens de cette équation satisfont aux deux

cas, la formule $n = \dfrac{\begin{matrix} + a1\,p\dot{x} & + a4\,p\dot{y} \\ + a2\,x & + a5\,x \\ + a3\,y & + a6\,y \end{matrix}}{\begin{matrix} + a1\,p\dot{x} & + a4\,p\dot{y} \\ + a2\,x & + a5\,x \\ + a3\,y & + a6\,y \end{matrix}}$, contient les deux intégrales que nous allons déterminer.

Par le premier cas, nous aurons $a'1 = 1$, $a^2 1 = 1$,
$a'2 = 0$ $a^2 2 = -3$
$a'3 = -3$ $a^2 3 = 0$
$a'4 = -6$ $a^2 4 = 0$
$a'5 = 0$

$a^3 1 = 1$; $a^4 1 = -2$, $a^5 1 = 0$, ou
$a^3 2 = 0$ $a^4 2 = 0$
$a^3 3 = 0$

$\alpha 1\,a2 - a1\,\alpha 2 = 1$, $\alpha 1\,a3 - a1\,\alpha 3 = 1$;
$\alpha 2\,a3 - a2\,\alpha 3 = 0$ $\alpha 2\,a4 - a2\,\alpha 4 = -3$
$\alpha 3\,a4 - a3\,\alpha 4 = -3$ $\alpha 3\,a5 - a3\,\alpha 5 = 0$
$\alpha 4\,a5 - a4\,\alpha 5 = -6$ $\alpha 4\,a6 - a4\,\alpha 6 = 0$
$\alpha 5\,a6 - a5\,\alpha 6 = 0$

$\alpha 1\,a4 - a1\,\alpha 4 = 1$, $\alpha 1\,a5 - a1\,\alpha 5 = -2$;
$\alpha 2\,a5 - a2\,\alpha 5 = 0$ $\alpha 2\,a6 - a2\,\alpha 6 = 0$
$\alpha 3\,a6 - a3\,\alpha 6 = 0$

$\alpha 1\,a6 - a1\,\alpha 6 = 0$.

Donc $\alpha 1 = \dfrac{1 + a1\,\alpha 2}{a2}$; en substituant, on aura

$$\alpha 2\,a3 - a2\,\alpha 3 = \frac{a2 - a3}{a1} = 0,$$

$$\alpha 2\,a4 - a2\,\alpha 4 = \frac{a2 - a4}{a1} = -3;$$

$$\alpha 2\,a5 - a2\,\alpha 5 = \frac{-2a2 - a5}{a1} = 0,$$

$$\alpha 2\,a6 - a2\,\alpha 6 = \frac{-a6}{a1} = 0.$$

$\alpha 2 = \frac{a2a3}{a3}$; $\alpha 3\,a4 - a3\alpha 4 = \frac{-3a3}{a2} = -3$.

$\alpha 3 = \frac{-3+a3a4}{a4}$; $\alpha 4\,a5 - a4\alpha 5 = \frac{3a5}{a3} = -6$,

$\alpha 4\,a6 - a4\alpha 6 = \frac{3a6}{a3} = 0$.

$\alpha 4 = \frac{-6+a4a5}{a5}$; $\alpha 5\,a6 - a5\alpha 6 = \frac{6a6}{a4}$.

Donc $a2 - a3 = 0$, $a2 - a4 + 3a1 = 0$, $2a2 + a5 = 0$, $a6 = 0$, $a5 + 2a3 = 0$. Soit $a2 = 0$, on aura $a3 = 0$, $a5 = 0$. Soit $a1 = 1$, on aura $a4 = 3$; en ſubſtituant ces valeurs, on aura $\alpha 2 = -1$, $\alpha 3 = -1$, $3\alpha 1 - \alpha 4 = 1$, $\alpha 5 = 2$, $\alpha 6 = 0$. Soit $\alpha 1 = 0$, on aura $\alpha 4 = -1$, & l'intégrale ſera $u = \frac{px + 3py}{-xx - yx - py + 2xy}$.

Par le ſecond cas, nous aurons

$a^1 1 = 1$, $a^2 1 = 7$, $a^3 1 = 1$, $a^4 1 = -5$, $a^5 1 = -3$,
$a^1 2 = 0$ $a^2 2 = 0$ $a^3 2 = 0$ $a^4 2 = 0$
$a^1 3 = 0$ $a^2 3 = 0$ $a^3 3 = 0$
$a^1 4 = 0$ $a^2 4 = 0$
$a^1 5 = 0$

ou $\alpha 1\,a2 - a1\alpha 2 = 1$, $\alpha 1\,a3 - a1\alpha 3 = 7$,
$\alpha 2\,a3 - a2\alpha 3 = 0$ $\alpha 2\,a4 - a2\alpha 4 = 0$
$\alpha 3\,a4 - a3\alpha 4 = 0$ $\alpha 3\,a5 - a3\alpha 5 = 0$
$\alpha 4\,a5 - a4\alpha 5 = 0$ $\alpha 4\,a6 - a4\alpha 6 = 0$
$\alpha 5\,a6 - a5\alpha 6 = 0$

$\alpha 1\,a4 - a1\alpha 4 = 1$, $\alpha 1\,a5 - a1\alpha 5 = -5$,
$\alpha 2\,a5 - a2\alpha 5 = 0$ $\alpha 2\,a6 - a2\alpha 6 = 0$
$\alpha 3\,a6 - a3\alpha 6 = 0$

$\alpha 1\,a6 - a1\alpha 6 = -3$.

Donc $\alpha 1 = \frac{1 + a1\,a2}{a2}$; en substituant, on aura

$$\alpha 2\,a3 - a2\,a3 = \frac{7a2 - a3}{a1} = 0,$$

$$\alpha 2\,a4 - a2\,a4 = \frac{a2 - a4}{a1} = 0,$$

$$\alpha 2\,a5 - a2\,a5 = \frac{-5a2 - a5}{a1} = 0,$$

$$\alpha 2\,a6 - a2\,a6 = \frac{-3a2 - a6}{a1} = 0.$$

Soit $a6 = 3$, on aura $a2 = -1$, $a5 = 5$; $a4 = -1$, $a3 = -7$. Soit $a1 = 0$; en substituant ces valeurs, on aura $\alpha 1 = -1$. Soit $\alpha 2 = 0$, $\alpha 3 = 0$, $\alpha 4 = 0$, $\alpha 5 = 0$, $\alpha 6 = 0$, l'intégrale sera $m = \frac{-x\dot{x} - 7y\dot{x} - p\dot{y} + 5x\dot{y} + 3y\dot{y}}{-p\dot{x}}$.

Les deux intégrales aux premières différences d'une équation aux secondes étant données, on aura l'intégrale finie de cette équation.

Par exemple ici, de la première de nos deux intégrales je tire $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{np - 2nx + 3p}{-nx - ny - p}$, & de la seconde je tire $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{-p + 5x + 3y}{-mp + x + 7y}$;

j'aurai l'équation $\frac{np - 2nx + 3p}{-nx - ny - p} = \frac{-p + 5x + 3y}{-mp + x + 7y}$ ou $(-mn - 3m - 1)p^2 + (2mn + 8)px + (6n + 24)py + 3nx^2 - 6nxy + 3ny^2 = 0$, qui sera l'intégrale de l'équation $\ddot{y} + \frac{\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{y} - 3\dot{y}^2}{p - 5x - 3y} = 0$.

Pour pouvoir rapporter cette équation-ci

$$\ddot{y} + \frac{\begin{matrix} + b1\dot{x}^2 & + b4\dot{x}\dot{y} & + b7\dot{y}^2 \\ + b2x & + b5x & + b8x \\ + b3y & + b6y & + b9y \end{matrix}}{c1p^2 + c2px + c3py + c4x^2 + c5xy + c6y^2} = 0,$$ à la

première formule, il faut la multiplier par $\dot{x}$; on aura

$$\ddot{y} + \frac{\begin{matrix} +b_1p\dot{x}^3 & +b_4p\dot{x}^2\dot{y} & +b_7p\dot{x}\dot{y}^2 \\ +b_2\dot{x} & +b_5\dot{x} & +b_8\dot{x} \\ +b_3y & +b_6y & +b_9y \end{matrix}}{\begin{matrix} +6_1p^2\dot{x} \\ +6_2p\dot{x} \\ +6_3p\dot{y} \\ +6_4\dot{x}^2 \\ +6_5\dot{x}\dot{y} \\ +6_6\dot{y}^2 \end{matrix}} = 0$$

; & en comparant avec la formule, on aura $a'1 = b1$, $b2 = 0$;

$-a'2 = b3$, $-a^2 2 + a^2 1 + a^4 1 = b4$,
$a'2 = b5$ $a^2 2 + a^4 1 = 6_2$

$-a^4 2 + a^2 3 = b6$, $-a'3 + a'4 + a^5 1 = b7$,
$-a^2 3 + a^4 2 = b8$ $a'3 + a'1 = 6_3$
$a^2 3 + a^4 2 = 6_5$

$-a'5 = b9$, $a^2 4 = 0$, $a^3 1 = 6_1$, $a^3 2 = 6_4$,
$a'5 = 0$

$a^3 3 = 6_6$.

Donc 1.° $b2 = 0$, $b3 + b5 = 0$, $b6 + b8 = 0$, $b9 = 0$.

2.° $a'1 = b1$, $a^3 1 = 6_1$,
$a'2 = -b3$, $a^3 2 = 6_4$, $a^4 2 = \frac{1}{2}(6_5 - b6)$,
$a^2 3 = \frac{1}{2}(6_5 + b6)$, $a^3 3 = 6_6$,
$a^2 4 = 0$,
$a^1 5 = 0$.

3.° $-a^2 2 + a^2 1 + a^4 1 = b4$,
$a^2 2 + a^4 1 = 6_2$

$-a'3 + a'4 + a'1 = b7$,
$a'3 + a'1 = 6_3$

4.° en substituant dans les conditions de la formule,

$-b3\,6_1 - a^2 1\,a^2 2 + b1\,a^2 3 = 0$,
$-b3\,a^4 1 - 6_4 a^2 1 + \frac{1}{2} b1\,(6_5 + b6) = 0$,
$a^4 1\,a^2 2 - 6_1 6_4 + b1\,a'4 = 0$,

$a^4 1\, a' 3 - \frac{1}{2} \mathcal{C} 1\, (\mathcal{C} 5 + b 6) + a^2 1\, a' 4 = 0$;
$\mathcal{C} 4\, a' 3 - \frac{1}{2} (\mathcal{C} 5 + b 6)\, a^2 2 - b 3\, a' 4 = 0$,
$- b 3\, a^5 1 - \frac{1}{2} (\mathcal{C} 5 - b 6)\, a^2 1 + b 1\, \mathcal{C} 6 = 0$,
$a^5 1\, a^2 2 - \frac{1}{2} \mathcal{C} 1\, (\mathcal{C} 5 - b 6) = 0$,
$a^5 1\, a' 3 - \mathcal{C} 1\, \mathcal{C} 6 = 0$, $\frac{1}{2} (\mathcal{C} 5 - b 6)\, a' 3 - \mathcal{C} 6\, a^2 2 = 0$;
$\mathcal{C} 4\, a^5 1 - \frac{1}{2} (\mathcal{C} 5 - b 6)\, a^4 1 = 0$,
$\frac{1}{2} (\mathcal{C} 5 + b 6)\, a^5 1 - \mathcal{C} 6\, a^4 1 = 0$,
$\frac{1}{4} (\mathcal{C} 5 - b 6)\, (\mathcal{C} 5 + b 6) - \mathcal{C} 4\, \mathcal{C} 6 = 0$;
$a^5 1\, a' 4 = 0$, $\frac{1}{2} (\mathcal{C} 5 - b 6)\, a' 4 = 0$, $\mathcal{C} 6\, a' 4 = 0$.

Au moyen de ces équations, lorſque les coëfficiens $b 1$, $b 2$, $b 3$, $b 4$, $b 5$, $b 6$, $b 7$, $b 8$, $b 9$, $\mathcal{C} 1$, $\mathcal{C} 2$, $\mathcal{C} 3$, $\mathcal{C} 4$, $\mathcal{C} 5$, $\mathcal{C} 6$, ſeront donnés, & que l'équation ſera intégrable par la première formule, on aura ſon intégrale.

Pour pouvoir rapporter l'équation

$$\ddot{y} + \frac{\begin{array}{l} b 1 \dot{x}^3 + b 2 \dot{x}^2 \dot{y} + b 3 \dot{x} \dot{y}^2 + b 4 \dot{y}^3 \\ + \mathcal{C} 1\, p \dot{x} + \mathcal{C} 4\, p \dot{y} \\ + \mathcal{C} 2\, x + \mathcal{C} 5\, x \\ + \mathcal{C} 3\, y + \mathcal{C} 6\, y \end{array}}{}$$

à la première formule;

il faut la multiplier par $c 1\, p + c 2\, x + c 3\, y$; on aura

$$\ddot{y} + \frac{\begin{array}{llll} + c 1\, b 1\, p \dot{x}^3 & + c 1\, b 2\, p \dot{x}^2 \dot{y} & + c 1\, b 3\, p \dot{x} \dot{y}^2 & + c 1\, b 4\, p \dot{y}^3 \\ + c 2\, b 1\, x & + c 2\, b 2\, x & + c 2\, b 3\, x & + c 2\, b 4\, x \\ + c 3\, b 1\, y & + c 3\, b 2\, y & + c 3\, b 3\, y & + c 3\, b 4\, y \\ + c 1\, \mathcal{C} 1\, p^2 \dot{x} & & + c 1\, \mathcal{C} 4\, p^2 \dot{y} & \\ + (c 1\, \mathcal{C} 2 + c 2\, \mathcal{C} 1)\, p x & & + (c 1\, \mathcal{C} 5 + c 2\, \mathcal{C} 4)\, p x & \\ + (c 1\, \mathcal{C} 3 + c 3\, \mathcal{C} 1)\, p y & & + (c 1\, \mathcal{C} 6 + c 3\, \mathcal{C} 4)\, p y & \\ + c 2\, \mathcal{C} 2\, x^2 & & + c 2\, \mathcal{C} 5\, x^2 & \\ + (c 2\, \mathcal{C} 3 + c 3\, \mathcal{C} 2)\, x & & + (c 2\, \mathcal{C} 6 + c 3\, \mathcal{C} 5)\, x y & \\ + c 3\, \mathcal{C} 3\, y^2 & & + c 3\, \mathcal{C} 6\, y^2 & \end{array}}{} = 0$$

; & en comparant avec la formule, on aura $a' 1 = c 1\, b 1$, $c 2\, b 1 = 0$,

$- a' 2 = c 3\, b 1$, $- a^2 2 + a^2 1 + a^4 1 = c 1\, b 2$,
$a' 2 = c 2\, b 2$ $a^2 2 + a^4 1 = c 1\, \mathcal{C} 2 + c 2\, \mathcal{C} 1$.

$- a^4 2 + a^2 3 = c 3\, b 2$,
$- a^2 3 + a^4 2 = c 2\, b 3$
$a^2 3 + a^4 2 = c 2\, \mathcal{C} 3 + c 3\, \mathcal{C} 2$

$- a' 3$

$$\begin{array}{rrr} -a'3 + a'4 + a'1 = c1\,b3, & -a'5 = c3\,b3, \\ a'3 + a'1 = c1\,\mathcal{C}3 + c3\,\mathcal{C}1 & a'5 = c2\,b4 \end{array}$$

$a^2 4 = c1\,b4$, $c3\,b4 = 0$, $a^3 1 = c1\,\mathcal{C}1$, $a^3 2 = c2\,\mathcal{C}2$, $a^3 3 = c3\,\mathcal{C}3$, $c1\,\mathcal{C}4 = 0$, $c1\,\mathcal{C}5 + c2\,\mathcal{C}4 = 0$, $c1\,\mathcal{C}6 + c3\,\mathcal{C}4 = 0$, $c2\,\mathcal{C}5 = 0$, $c2\,\mathcal{C}6 + c3\,\mathcal{C}5 = 0$, $c3\,\mathcal{C}6 = 0$.

Que $\mathcal{C}4$ ne ſoit pas $= 0$, on aura $c1 = 0$, $c2 = 0$, $c3 = 0$; par conſéquent $\mathcal{C}4$ eſt néceſſairement $= 0$. On trouvera de la même manière que $\mathcal{C}5$ & $\mathcal{C}6$ ſont auſſi néceſſairement $= 0$; l'on a $c2\,b1 = 0$, $c2\,b2 + c3\,b1 = 0$, $c2\,b3 + c3\,b2 = 0$, $c3\,b3 + c2\,b4 = 0$, $c3\,b4 = 0$.

Que $c2$ ne ſoit pas $= 0$, on aura $b1 = 0$, $b2 = 0$, $b3 = 0$, $b4 = 0$; par conſéquent $c2$ eſt néceſſairement $= 0$. On prouvera de la même manière que $c3$ eſt auſſi néceſſairement $= 0$. Par conſéquent, pour que la première équation de la ſeconde Suite, puiſſe appartenir à la première formule, il faut qu'elle ſoit repréſentée généralement par $\ddot{y} + \frac{b1\dot{x}^3 + b2\dot{x}^2\dot{y} + b3\dot{x}\dot{y}^2 + b4\dot{y}^3}{+\mathcal{C}1p\dot{x} + \mathcal{C}2x + \mathcal{C}3y} = 0$; & pour la rapporter à cette formule auſſi généralement qu'elle peut l'être, il ſuffit de la multiplier par p; on aura

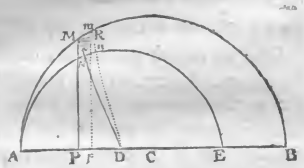
$$\begin{array}{lll} a'1 = b1, & a^3 1 = \mathcal{C}1, & \\ a'2 = 0 & a^4 2 = 0, & a^3 2 = 0, \\ a^2 3 = 0 & a^3 3 = 0 & \\ a^2 4 = b4 & & \\ a'5 = 0 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -a^2 2 + a^2 1 + a^4 1 = b2; \\ \quad a^2 2 + a^4 1 = \mathcal{C}2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -a'3 + a'4 + a'1 = b3; \\ \quad a'3 + a'1 = \mathcal{C}3. \end{array}$$

& en substituant dans les conditions de la formule, on aura $-a^2 1\, a^2 2 + b1\, a^1 3 = 0$, $a^4 1\, a^2 2 + b1\, a^1 4 = 0$, $a^4 1\, a^1 3 + a^2 1\, a^1 4 = 0$, $a^3 1\, a^2 2 + b1\, b4 = 0$, $a^3 1\, a^1 3 + b4\, a^2 1 = 0$, $a^3 1\, a^1 4 - b4\, a^4 1 = 0$. Au moyen de ces équations, lorsque les coëfficiens $b1$, $b2$, $b3$, $b4$, 61, 62, 63, seront donnés, s'ils sont tels que l'équation soit intégrable par la première formule, on aura son intégrale.

EXEMPLE.



Des centres C & D pris dans la ligne AB & des rayons CA, DA, je décris les cercles AMB, ANE; je mène DM qui coupe ces deux cercles en N & en M.

Je fais $CA = p$, $CD = ep$; j'aurai $DA = (1 - e).p$; $DB = (1 + e).p$.

Je fais $AN = x$, $AM = y$, $DM = u$.

Du point M soit mené MP perpendiculaire à AB; on aura $(PM)^2 = 2p.AP - (AP)^2$, $DP = (1 - e).p - AP$; & à cause du triangle rectangle DPM, on aura

$$u^2 = 2p.AP + (1-e)^2.p^2 - 2.(1-e).p.AP;$$

donc $AP = \frac{u^2 - (1-e)^2.p^2}{2ep}$;

$$PM = \frac{1}{2ep}\sqrt{[(1+e)^2.p^2 - u^2]\,[u^2 - (1-e)^2.p^2]},$$

$$Pp = MS = \frac{udu}{ep}.$$

$$Sm = \frac{[(1+e^2).p^2 - u^2]u\dot{u}}{epV[(1+e)^2.p^2 - u^2]\,[u^2 - (1-e)^2.p^2]};$$

$$\text{donc } \dot{y} = \frac{2pu\dot{u}}{V[(1+e)^2.p^2 - u^2]\,[u^2 - (1-e)^2.p^2]}.$$

Du centre D & du rayon DM, soit décrit le petit arc MR qui coupe DM en R, on aura

$$(1-e).p : \dot{x} :: \dot{u} : MR = \frac{u\dot{x}}{(1-e).p};$$

$$\text{donc } \dot{y}^2 = \frac{u^2\dot{x}^2}{(1-e)^2.p^2} + \dot{u}^2.$$

Nos deux équations peuvent se changer en ces deux autres-ci, $u^2 = \frac{(1-e).(1-e)^2.p^2\dot{y}}{2\dot{x} - (1-e)\dot{y}}$,

$$\dot{u}^2 = \frac{\dot{y}[2\dot{x}\dot{y} - (1+e)\dot{x}^2 - (1-e)\dot{y}^2]}{2\dot{x} - (1-e)\dot{y}}.$$

En différenciant la première de ces deux équations, & faisant $\dot{x}$ constant, on aura $\dot{u}^2 = \frac{(1-e).(1-e^2)p^2\dot{x}^2\ddot{y}^2}{[2\dot{x} - (1-e)\dot{y}]^3\dot{y}}$.

En égalant les deux valeurs de $\dot{u}^2$, on aura

$$\ddot{y} + \frac{\dot{y}[(1-e)\dot{y} - 2\dot{x}]V[2\dot{x}\dot{y} - (1+e)\dot{x}^2 - (1-e)\dot{y}^2]}{(1-e).V(1+e).p\dot{x}} = 0.$$

Si l'on peut trouver l'une des deux intégrales de cette équation, l'on y substituera pour $\dot{y}$ sa valeur prise de cette équation-ci, $u^2 = \frac{(1-e).(1-e^2)p^2\dot{y}}{2\dot{x} - (1-e)\dot{y}}$, & on aura par ce moyen une équation entre p, x, y, u, e, & la constante n que l'on aura ajoûtée en intégrant; l'on fera dans cette équation $x = 0$, $y = 0$, $u = (1-e).p$, & l'on déterminera n.

Enſuite l'on fera $y = \frac{1}{2}c$, $x = \frac{1-e}{2}c$, $u = (1+e).p$, & l'on aura une équation entre c & p, c'eſt-à-dire, que l'on aura la circonférence du cercle dont le rayon eſt p.

Quant au nombre e, ſa valeur eſt arbitraire ; mais elle doit être priſe entre 0 & 1. Or il eſt certain que cette équation-ci,

$$\ddot{y} + \frac{\dot{y}[(1-e)\dot{y} - 2\dot{x}\dot{y}] \sqrt{[(2\dot{x}\dot{y} - (1+e)\dot{x}^2 - (1-e)\dot{y}^2]}}{(1-e).\sqrt{(1+e).p\dot{x}}} = 0,$$

a deux intégrales aux premières différences ; il y en a une des deux qui n'eſt pas déterminable, mais il pourroit ſe faire que l'autre le fût.

Je fais $\dot{z}^2 = 2\dot{x}\dot{y} - (1+e)\dot{x}^2 - (1-e)\dot{y}^2$;

donc $\frac{\ddot{z}}{\dot{x}} = 0$, $\frac{\ddot{z}}{\dot{y}} = 0$, $\frac{\ddot{z}}{\dot{y}} = \frac{\dot{x} - (1-e)\dot{y}}{\dot{z}}$;

l'équation à intégrer ſera $\dot{y} + \frac{-2\dot{x}\dot{y}\dot{z} + (1-e)\dot{y}^2\dot{z}}{(1-e).\sqrt{(1+e).p\dot{x}}} = 0$;

& l'intégrale ſera $n = \dfrac{\begin{matrix} +a1p\dot{x} & +a4p\dot{y} & +a7p\dot{z} \\ +a2\dot{x} & +a5\dot{x} & +a8\dot{x} \\ +a3y & +a6y & +a9y \end{matrix}}{\begin{matrix} +\alpha1p\dot{x} & +\alpha4p\dot{y} & +\alpha7p\dot{z} \\ +\alpha2\dot{x} & +\alpha5\dot{x} & +\alpha8\dot{x} \\ +\alpha3y & +\alpha6y & +\alpha9y \end{matrix}}$;

ou $n = \dfrac{(a1p^2+)\dot{x} + (a7p^2+)\dot{y} + (a13p^2+)\dot{z}}{(\alpha1p^2+)\dot{x} + (\alpha7p^2+)\dot{y} + (\alpha13p^2+)\dot{z}}$;

ou $n = \dfrac{(a1p^3+)\dot{x} + (a11p^3+)\dot{y} + (a21p^3+)\dot{z}}{(\alpha1p^3+)\dot{x} + (\alpha11p^3+)\dot{y} + (\alpha21p^3+)\dot{z}}$, &c.

ou bien elle ſera

$$n = \frac{\begin{matrix} +a1p\dot{x}^2 & +a4p\dot{x}\dot{y} & +a7p\dot{x}\dot{z} & +a10p\dot{y}^2 & +a13p\dot{y}\dot{z} \\ +a2\dot{x} & +a5\dot{x} & +a8\dot{x} & +a11\dot{x} & +a14\dot{x} \\ +a3y & +a6y & +a9y & +a12y & +a15y \end{matrix}}{\begin{matrix} +\alpha1p\dot{x}^2 & +\alpha4p\dot{x}\dot{y} & +\alpha7p\dot{x}\dot{z} & +\alpha10p\dot{y}^2 & +\alpha13p\dot{y}\dot{z} \\ +\alpha2\dot{x} & +\alpha5\dot{x} & +\alpha8\dot{x} & +\alpha11\dot{x} & +\alpha14\dot{x} \\ +\alpha3y & +\alpha6y & +\alpha9y & +\alpha12y & +\alpha15y \end{matrix}} ;$$

ou $n = \frac{(a1p^2+)\dot{x}^2 + (a7p^2+)\dot{x}\dot{y} + (a13p^2+)\dot{x}\dot{z} + (a19p^2+)\dot{y}^2 + (a25p^2+)\dot{y}\dot{z}}{(a1p^2+)\dot{x}^2 + (a7p^2+)\dot{x}\dot{y} + (a13p^2+)\dot{x}\dot{z} + (a19p^2+)\dot{y}^2 + (a25p^2+)\dot{y}\dot{z}}$, &c. ou bien elle sera

$n = \frac{(a1p+)\dot{x}^3 + (a4p+)\dot{x}^2\dot{y} + (a7p+)\dot{x}^2\dot{z} + (a10p+)\dot{x}\dot{y}^2 + (a13p+)\dot{x}\dot{y}\dot{z} + (a16p+)\dot{y}^3 + (a19p+)\dot{y}^2\dot{z}}{(a1p+)\dot{x}^3 + (a4p+)\dot{x}^2\dot{y} + (a7p+)\dot{x}^2\dot{z} + (a10p+)\dot{x}\dot{y}^2 + (a13p+)\dot{x}\dot{y}\dot{z} + (a16p+)\dot{y}^3 + (a19p+)\dot{y}^2\dot{z}}$, ou $n =$, &c.

Suppoſons par exemple, que $n = \frac{(a1p+)\dot{x}^2 + (a4p+)\dot{x}\dot{y} + (a7p+)\dot{x}\dot{z} + (a10p+)\dot{y}^2 + (a13p+)\dot{y}\dot{z}}{(a1p+)\dot{x}^2 + (a4p+)\dot{x}\dot{y} + (a7p+)\dot{x}\dot{z} + (a10p+)\dot{y}^2 + (a13p+)\dot{z}\dot{y}}$, eſt l'intégrale de l'équation $\ddot{y} + \frac{-2\dot{x}\dot{y}\dot{z} + (1-e)\dot{y}^2\dot{z}}{(1-e)\sqrt{(1+e)p\dot{x}}} = 0$; en différenciant, on aura

$$\ddot{y} + \frac{\left(\begin{matrix}+a1p\dot{x}^2+\\+\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}a2\dot{x}^3+a3\dot{x}^2\dot{y}+\\+a5+\\a6\dot{x}\dot{y}^2+a8\dot{x}^2\dot{z}+a9\dot{x}\dot{y}\dot{z}+a12\dot{y}^3+a15\dot{y}^2\dot{z}\end{matrix}\right) - \text{\&c.}}{\begin{matrix}a11\\+a14\end{matrix}} = 0;$$

$$\left(\begin{matrix}+a1p\dot{x}^2+\\+\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}+a4p\dot{x}+a7p\dot{x}\cdot\frac{\ddot{x}-(1-e)\dot{y}}{\dot{z}}+\\+a5\dot{x}+a8\dot{x}+\\+a6\dot{y}+a9\dot{y}\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}2a10p\dot{y}+a13p\dot{z}+a13p\dot{y}\frac{\ddot{x}-(1-e)\dot{y}}{\dot{z}}\\2a11\dot{x}+a14\dot{x}+a14\dot{x}\\2a12\dot{y}+a15\dot{y}\end{matrix}\right) - \text{\&c.}$$

& en multipliant le numérateur & le dénominateur du ſecond terme de cette équation par $\dot{z}$, on aura

$$\ddot{y} + \frac{\left(\begin{matrix}+a1p\dot{x}^2+\\+\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}+a2\dot{x}^3\dot{z}+a3\dot{x}^2\dot{y}\dot{z}+a6\dot{x}\dot{y}^2\dot{z}+\\+a5+a11-\end{matrix}\right.}{\begin{matrix}2a8\dot{x}^2\dot{y}-(1+e)a8\dot{x}^2\dot{y}^2-(1-e)a9\dot{x}\dot{y}^3+\\(1+e)a9+2a9-(1-e)a14\\(1+e)a14+2a14+2a15\\-(1+e)a15\end{matrix}}$$

$$a_{12}\dot{y}^3\dot{z} - (1-e)a_{15}\dot{y}^4\Big) - \&c.$$

$$\Big(+\alpha_1 p\dot{x}^2+\Big)\Big(\begin{array}{llll} +a_4p\ddot{x}\dot{z} & +a_7p\dot{x}^2 & -(1-e)a_7p\dot{x}\ddot{y} & +2a_{10}p\dot{y}\ddot{z}+ \\ +a_5\dot{x} & +a_8\dot{x} & -(1-e)a_8\dot{x} & +2a_{11}\dot{x}+ \\ +a_6\dot{y} & +a_9\dot{y} & -(1-e)a_9\dot{y} & +2a_{12}\dot{y}+ \\ & & +a_{13}p & \\ & & +a_{14}\dot{x} & \\ & & +a_{15}\dot{y} & \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} 3a_{13}p\ddot{x}\ddot{y} & -(1+e)a_{13}p\dot{x}^2 & -2(1-e)a_{13}p\dot{y}^2 & \Big) - \&c. \\ 2a_{14}\dot{x} & -(1+e)a_{14}\dot{x} & -2(1-e)a_{14}\dot{x} & \\ 2a_{15}\dot{y} & -(1+e)a_{15}\dot{y} & -2(1-e)a_{15}\dot{y} & \end{array}$$

Je n'ai pas pouſſé ce calcul plus loin, & je n'ai fait aucune tentative, parce que ce qui ſeroit aiſé pour pluſieurs perſonnes qui travailleroient de concert enſemble, eſt impraticable pour un homme ſeul : j'ai ſeulement voulu montrer la route à ceux qui voudront faire quelques eſſais : ils y gagneront au moins de ſe rendre cette méthode-ci familière.

L'APPLICATION AUX ÉQUATIONS AUX TROISIÉMES DIFFÉRENCES.

FORMULES de toutes les Équations poſſibles aux troiſièmes différences ſans radicaux.

PREMIÈRE SUITE. $\dddot{y} + \dfrac{b_1\ddot{x}\ddot{y} + b_2\dot{y}\ddot{y}}{c_1p + c_2x + c_3y} = 0,$

$$\dddot{y} + \frac{b_1\dot{x}^3 + b_2\dot{x}^2\dot{y} + b_3\dot{x}\dot{y}^2 + b_4\dot{y}^3 + (b_5p+)\dot{x}\ddot{y} + (b_8p+)\dot{y}\ddot{y}}{(c_1p^2+)} = 0,$$

$$\dddot{y} + \frac{(b_1p+)\dot{x}^3 + (b_4p+)\dot{x}^2\dot{y} + (b_7p+)\dot{x}\dot{y}^2 + (b_{10}p+)\dot{y}^3 + (b_{13}p^2+)\dot{x}\ddot{y} + (b_{19}p^2+)\dot{y}\ddot{y}}{(c_1p^3+)} = 0, \&c.$$

SECONDE SUITE. $\dddot{y} + \dfrac{b_1\ddot{y}^2}{c_1\dot{x} + c_2\dot{y}} = 0,$

$$\dot{y} + \frac{b_1\dot{x}^2\ddot{y} + b_2\dot{x}\dot{y}\ddot{y} + b_3\dot{y}^2\ddot{y} + (b_4p+)\ddot{y}^2}{(c_1p+)\dot{x} + (c_4p+)\dot{y}} = 0,$$

$$\dot{y} + \frac{b_1\dot{x}^4 + b_2\dot{x}^3\dot{y} + b_3\dot{x}^2\dot{y}^2 + b_4\dot{x}\dot{y}^3 + b_5\dot{y}^4 + (b_6p+)\dot{x}^2\ddot{y} + (b_9p+)\dot{x}\dot{y}\ddot{y} + (b_{12}p+)\dot{y}^2\ddot{y} + (b_{15}p^2+)\ddot{y}^2}{(c_1p^2+)\dot{x} + (c_7p^2+)\dot{y}} = 0,$$

$$\dot{y} + \frac{(b_1p+)\dot{x}^4 + (b_4p+)\dot{x}^3\dot{y} + (b_7p+)\dot{x}^2\dot{y}^2 + (b_{10}p+)\dot{x}\dot{y}^3 + (b_{13}p+)\dot{y}^4 + (b_{16}p^2+)\dot{x}^2\ddot{y} + (b_{22}p^2+)\dot{x}\dot{y}\ddot{y} + (b_{28}p^2+)\dot{y}^2\ddot{y} + (b_{34}p^3+)\ddot{y}^2}{(c_1p^3+)\dot{x} + (c_{11}p^3+)\dot{y}} = 0, \text{ \&c.}$$

III.e SUITE. $\dot{y} + \frac{b_1\dot{x}\ddot{y}^2 + b_2\dot{y}\ddot{y}^2}{c_1\dot{x}^2 + c_2\dot{x}\dot{y} + c_3\dot{y}^2 + (c_4p+)\ddot{y}} = 0;$

$$\dot{y} + \frac{b_1\dot{x}^3\ddot{y} + b_2\dot{x}^2\dot{y}\ddot{y} + b_3\dot{x}\dot{y}^2\ddot{y} + b_4\dot{y}^3\ddot{y} + (b_5p+)\dot{x}\ddot{y}^2 + (b_8p+)\dot{y}\ddot{y}^2}{(c_1p+)\dot{x}^2 + (c_4p+)\dot{x}\dot{y} + (c_7p+)\dot{y}^2 + (c_{10}p^2+)\ddot{y}} = 0;$$

$$\dot{y} + \frac{b_1\dot{x}^5 + b_2\dot{x}^4\dot{y} + b_3\dot{x}^3\dot{y}^2 + b_4\dot{x}^2\dot{y}^3 + b_5\dot{x}\dot{y}^4 + b_6\dot{y}^5 + (b_7p+)\dot{x}^3\ddot{y} + (b_{10}p+)\dot{x}^2\dot{y}\ddot{y} + (b_{13}p+)\dot{x}\dot{y}^2\ddot{y} + (b_{16}p+)\dot{y}^3\ddot{y} + (b_{19}p^2+)\dot{x}\ddot{y}^2 + (b_{25}p^2+)\dot{y}\ddot{y}^2}{(c_1p^2+)\dot{x}^2 + (c_7p^2+)\dot{x}\dot{y} + (c_{13}p^2+)\dot{y}^2 + (c_{19}p^3+)\ddot{y}} = 0, \text{ \&c.}$$

IV.e SUITE. $\dot{y} + \frac{b_1\dot{x}^2\ddot{y}^2 + b_2\dot{x}\dot{y}\ddot{y}^2 + b_3\dot{y}^2\ddot{y}^2 + (b_4p+)\ddot{y}^3}{c_1\dot{x}^3 + c_2\dot{x}^2\dot{y} + c_3\dot{x}\dot{y}^2 + c_4\dot{y}^3 + (c_5p+)\dot{x}\ddot{y} + (c_8p+)\dot{y}\ddot{y}} = 0,$

$$\dot{y} + \frac{b_1\dot{x}^4\ddot{y} + b_2\dot{x}^3\dot{y}\ddot{y} + b_3\dot{x}^2\dot{y}^2\ddot{y} + b_4\dot{x}\dot{y}^3\ddot{y} + b_5\dot{y}^4\ddot{y} + (b_6p+)\dot{x}^2\ddot{y}^2 + (b_9p+)\dot{x}\dot{y}\ddot{y}^2 + (b_{12}p+)\dot{y}^2\ddot{y}^2 + (b_{15}p^2+)\ddot{y}^3}{(c_1p+)\dot{x}^3 + (c_4p+)\dot{x}^2\dot{y} + (c_7p+)\dot{x}\dot{y}^2 + (c_{10}p+)\dot{y}^3 + (c_{13}p^2+)\dot{x}\ddot{y} + (c_{19}p^2+)\dot{y}\ddot{y}} = 0,$$

$$\dot{y} + \frac{b_1\dot{x}^6 + b_2\dot{x}^5\dot{y} + b_3\dot{x}^4\dot{y}^2 + b_4\dot{x}^3\dot{y}^3 + b_5\dot{x}^2\dot{y}^4 + b_6\dot{x}\dot{y}^5 + b_7\dot{y}^6 + (b_8p +)\dot{x}^4\ddot{y} + (b_{11}p +)\dot{x}^3\dot{y}\ddot{y} + (b_{14}p +)\dot{x}^2\dot{y}^2\ddot{y} + (b_{17}p +)\dot{x}\dot{y}^3\ddot{y} + (b_{20}p +)\dot{y}^4\ddot{y} + (b_{23}p^2 +)\dot{x}^2\ddot{y}^2 + (b_{29}p^2 +)\dot{x}\dot{y}\ddot{y}^2 + (b_{35}p^2 +)\dot{y}^2\ddot{y}^2 + (b_{41}p^3 +)\ddot{y}^3}{(c_1p^2 +)\dot{x}^3 + (c_7p^2 +)\dot{x}^2\dot{y} + (c_{13}p^2 +)\dot{x}\dot{y}^2 + (c_{19}p^2 +)\dot{y}^3 + (c_{25}p^3 +)\dot{x}\ddot{y} + (c_{35}p^3 +)\dot{y}\ddot{y}} = 0, \text{ &c.}$$

Formules de toutes les Intégrales possibles d'équations aux troisièmes différences sans radicaux.

I.re SUITE. $$n = \frac{a_1\dot{x}^2 + a_2\dot{x}\dot{y} + a_3\dot{y}^2 + (a_4p + a_5x + a_6y)\ddot{y}}{\alpha_1\dot{x}^2 + \alpha_2\dot{x}\dot{y} + \alpha_3\dot{y}^2 + (\alpha_4p + \alpha_5x + \alpha_6y)\ddot{y}};$$

$$n = \frac{(a_1p +)\dot{x}^2 + (a_4p +)\dot{x}\dot{y} + (a_7p +)\dot{y}^2 + (a_{10}p^2 +)\ddot{y}}{(\alpha_1p +)\dot{x}^2 + (\alpha_4p +)\dot{x}\dot{y} + (\alpha_7p +)\dot{y}^2 + (\alpha_{10}p^2 +)\ddot{y}},$$

$$n = \frac{(a_1p^2 +)\dot{x}^2 + (a_7p^2 +)\dot{x}\dot{y} + (a_{13}p^2 +)\dot{y}^2 + (a_{19}p^3 +)\ddot{y}}{(\alpha_1p^2 +)\dot{x}^2 + (\alpha_7p^2 +)\dot{x}\dot{y} + (\alpha_{13}p^2 +)\dot{y}^2 + (\alpha_{19}p^3 +)\ddot{y}}, \text{ &c.}$$

II.e SUITE. $$n = \frac{a_1\dot{x}^3 + a_2\dot{x}^2\dot{y} + a_3\dot{x}\dot{y}^2 + a_4\dot{y}^3 + (a_5p +)\dot{x}\ddot{y} + (a_8p +)\dot{y}\ddot{y}}{\alpha_1\dot{x}^3 + \alpha_2\dot{x}^2\dot{y} + \alpha_3\dot{x}\dot{y}^2 + \alpha_4\dot{y}^3 + (\alpha_5p +)\dot{x}\ddot{y} + (\alpha_8p +)\dot{y}\ddot{y}},$$

$$n = \frac{(a_1p +)\dot{x}^1 + (a_4p +)\dot{x}^2\dot{y} + (a_7p +)\dot{x}\dot{y}^2 + (a_{10}p +)\dot{y}^3 + (a_{13}p^2 +)\dot{x}\ddot{y} + (a_{19}p^2 +)\dot{y}\ddot{y}}{(\alpha_1p +)\dot{x}^3 + \text{ &c.}}, \text{ &c.}$$

III.e SUITE. $$n = \frac{a_1\dot{x}^4 + a_2\dot{x}^3\dot{y} + a_3\dot{x}^2\dot{y}^2 + a_4\dot{x}\dot{y}^3 + a_5\dot{y}^4 + (a_6p +)\dot{x}^2\ddot{y} + (a_9p +)\dot{x}\dot{y}\ddot{y} + (a_{12}p +)\dot{y}^2\ddot{y} + (a_{15}p^2 +)\ddot{y}^2}{\alpha_1\dot{x}^4 + \text{ &c.}}, \text{ &c.}$$

I.

Soit $n = \frac{a1\dot{x}^2 + a2\dot{x}\dot{y} + a3\dot{y}^2 + a4p\ddot{y} + a5x + a6y}{a1\dot{x}^2 + a2\dot{x}\dot{y} + a3\dot{y}^2 + a4p\ddot{y} + a5x + a6y}$, en différenciant, on aura l'équation $\ddot{y} + \frac{+a^{1}1\dot{x}^{1}\dot{y}\ddot{y} + 2a^{2}1\dot{x}^{1}\dot{y}\ddot{y} + a^{1}2\dot{x}\dot{y}^{2}\ddot{y} + a^{2}3 + a^{3}1 + a^{3}k + a^{3}3 + a^{5}1 + a^{4}2}{a^{1}3\dot{y}^{1}\ddot{y} + (-a^{2}2 + a^{1}4)p\dot{x}\ddot{y}^{2} + (-2a^{1}3 + a^{2}4)p\dot{y}\ddot{y}^{2} - a^{3}2x + (-2a^{2}3 + a^{1}5)x + (-a^{4}2 - a^{1}5)y - 2a^{3}3y + a^{1}1p\dot{x}^{2} + a^{2}2p\dot{x}\dot{y} + a^{3}3p\dot{y}^{2} + a^{4}1x + a^{1}2x + a^{2}3x + a^{3}1y + a^{4}2y + a^{3}3y} = 0$,

qui, en supposant les quinze premières conditions du Lemme, sera la formule de toutes les équations aux troisièmes différences, dont l'intégrale est $n = \frac{a1\dot{x}^2 + }{a1\dot{x}^2 + }$, &c.

Soit $n = \frac{+a1p\dot{x}^2 + a4p\dot{x}\dot{y} + a7p\dot{y}^2 + a10p^2\ddot{y} + a2x + a5x + a8x + a11px + a3y + a6y + a9y + a12py + a13x^2 + a14xy + a15y^2}{+a1p\dot{x}^2 + a4p\dot{x}\dot{y} + a7p\dot{y}^2 + a10p^2\ddot{y} + a2x + a5x + a8x + a11px + a3y + a6y + a9y + a12py + a13x^2 + a14xy + a15y^2}$, en différenciant, on aura l'équation, &c.

II.

Pour pouvoir rapporter l'équation $y + \frac{b1\dot{x}\ddot{y} + b2y\ddot{y}}{\mathfrak{C}1p + \mathfrak{C}2x + \mathfrak{C}3y} = 0$ à la première formule, il faut la multiplier par $c1\dot{x}^2 + c2\dot{x}\dot{y} + c3\dot{y}^2 + c4p\ddot{y} + c5x\ddot{y} + c6y\ddot{y}$, on trouvera que $c2$, $c3$, $c4$, $c5$ & $c6$, sont $= 0$. Soit $c1 = 1$, on aura $y + \frac{b1\dot{x}^3\ddot{y} + b2\dot{x}^2y\ddot{y}}{\mathfrak{C}1px^2 + \mathfrak{C}2x\dot{x}^2 + \mathfrak{C}3y\dot{x}^2} = 0$, & en comparant avec la formule, on aura

$a'1 + a^41 = b1$, $2a^21 + a^32 + a^51 = b2$;
$a^41 = \mathfrak{C}2$ $a^51 = \mathfrak{C}3$
$a^32 = 0$

$a'2 + a^23 + a^42 = 0$, $a^33 = 0$;
$-a^23 = 0$ $-2a^33 = 0$
$a^42 = 0$ $a^33 = 0$

$-a^22 + a'4 = 0$, $-a^42 - a'5 = 0$;
$a^22 = 0$ $-2a^23 + a'5 = 0$
$a^23 = 0$

$-2a'3 + a^24 = 0$, $a^31 = \mathfrak{C}1$,
$a'3 = 0$

ou $a'1 = b1 - \mathfrak{C}2$, $a^21 = \frac{1}{2}(b2 - \mathfrak{C}3)$,
$a'2 = 0$ $a^22 = 0$
$a'3 = 0$ $a^23 = 0$
$a'4 = 0$ $a^24 = 0$
$a'5 = 0$

$a^31 = \mathfrak{C}1$, $a^41 = \mathfrak{C}2$, $a^51 = \mathfrak{C}3$, ou
$a^32 = 0$ $a^42 = 0$
$a^33 = 0$

$\alpha 1\alpha 2 - a1\alpha 2 = b1 - \mathcal{C}2$, $\alpha 1\alpha 3 - a1\alpha 3 = \frac{1}{2}(b2 - \mathcal{C}3)$,
$\alpha 2\alpha 3 - a2\alpha 3 = 0$ $\alpha 2\alpha 4 - a2\alpha 4 = 0$
$\alpha 3\alpha 4 - a3\alpha 4 = 0$ $\alpha 3\alpha 5 - a3\alpha 5 = 0$
$\alpha 4\alpha 5 - a4\alpha 5 = 0$ $\alpha 4\alpha 6 - a4\alpha 6 = 0$
$\alpha 5\alpha 6 - a5\alpha 6 = 0$

$\alpha 1\alpha 4 - a1\alpha 4 = \mathcal{C}1$, $\alpha 1\alpha 5 - a1\alpha 5 = \mathcal{C}2$,
$\alpha 2\alpha 5 - a2\alpha 5 = 0$ $\alpha 2\alpha 6 - a2\alpha 6 = 0$
$\alpha 3\alpha 6 - a3\alpha 6 = 0$

$\alpha 1\alpha 6 - a1\alpha 6 = \mathcal{C}3$.

Donc $\alpha 1 = \frac{(b1 - \mathcal{C}2) + a1\alpha 2}{a2}$; en substituant cette valeur de $\alpha 1$, on aura

$$\alpha 2\alpha 3 - a2\alpha 3 = \frac{\frac{1}{2}(b2 - \mathcal{C}3)a2 - (b1 - \mathcal{C}2)a3}{a1} = 0,$$

$$\alpha 2\alpha 4 - a2\alpha 4 = \frac{\mathcal{C}1a2 - (b1 - \mathcal{C}2)a4}{a1} = 0,$$

$$\alpha 2\alpha 5 - a2\alpha 5 = \frac{\mathcal{C}2a2 - (b1 - \mathcal{C}2)a5}{a1} = 0,$$

$$\alpha 2\alpha 6 - a2\alpha 6 = \frac{\mathcal{C}3a2 - (b1 - \mathcal{C}2)a6}{a1} = 0.$$

Soit $a2 = b1 - \mathcal{C}2$, on aura $a6 = \mathcal{C}3$, $a5 = \mathcal{C}2$, $a4 = \mathcal{C}1$, $a3 = \frac{1}{2}(b2 - \mathcal{C}3$. Soit $a1 = 0$; en substituant ces valeurs, on aura $\alpha 1 = 1$. Soit $\alpha 2 = 0$, $\alpha 3 = 0$, $\alpha 4 = 0$, $\alpha 5 = 0$, $\alpha 6 = 0$, l'intégrale

$$\text{sera } n = \frac{(b1 - \mathcal{C}2)\dot{x}\dot{y} + \frac{1}{2}(b2 - \mathcal{C}3)\dot{y}^2 + \mathcal{C}1\ddot{y} + \mathcal{C}2\dot{x} + \mathcal{C}3y}{\dot{x}^2}.$$

Pour pouvoir rapporter l'équation $\ddot{y} + \frac{b1\ddot{y}^2}{\mathcal{C}1\dot{x} + \mathcal{C}2\dot{y}} = 0$ à la

première formule, il faut la multiplier par $+c1px+c4py$, $+c2x+c5x$, $+c3y+c6y$

$$\therefore \text{on aura } y+\frac{\begin{matrix}+c1b1pxy^2 & +c4b1pyy^2\\ +c2b1x & +c5b1x\\ +c3b1y & +c6b1y\end{matrix}}{\begin{matrix}+c1\mathcal{C}1px^2 & +(c1\mathcal{C}2+c4\mathcal{C}1)pxy & +c4\mathcal{C}2py^2\\ +c2\mathcal{C}1x & +(c2\mathcal{C}2+c5\mathcal{C}1)x & +c5\mathcal{C}2x\\ +c3\mathcal{C}1y & +(c3\mathcal{C}2+c6\mathcal{C}1)y & +c6\mathcal{C}2y\end{matrix}}=0;$$

& en comparant avec la formule, on aura $a^1 1+a^4 1=0$;

$$a^4 1=c2\mathcal{C}1$$

$$2a^2 1+a^3 2+a^5 1=0,\quad a^2 2+a^2 3+a^4 2=0,$$
$$-a^3 2=c2b1\qquad -a^4 2-a^1 5=c3b1$$
$$a^5 1=c3\mathcal{C}1\qquad -2a^2 3+a^1 5=c5b1$$
$$a^3 2=c2\mathcal{C}2+c5\mathcal{C}1\qquad a^4 2=c3\mathcal{C}2+c6\mathcal{C}1$$
$$a^2 3=c5\mathcal{C}2$$

$$a^3 3=0,\qquad -a^2 2+a^1 4=c1b1;$$
$$-2a^3 3=c6b1\qquad a^2 2=c1\mathcal{C}2+c4\mathcal{C}1$$
$$a^3 3=c6\mathcal{C}2$$

$$-2a^1 3+a^2 4=c4b1,\quad a^3 1=c1\mathcal{C}1.$$
$$a^1 3=c4\mathcal{C}2$$

Donc 1.° $c6=0$, $c2=\frac{-\mathcal{C}1}{b1+\mathcal{C}2}c5$, $c3=\frac{-(b1+2\mathcal{C}2)}{b1+\mathcal{C}2}c5$.

2.° $a^1 1=\frac{(\mathcal{C}1)^2}{b1+\mathcal{C}2}c5$, $\quad a^2 1=\frac{\mathcal{C}1\mathcal{C}2}{b1+\mathcal{C}2}c5$,

$a^1 2=\frac{(\mathcal{C}2)^2}{b1+\mathcal{C}2}c5$ $\qquad a^2 2=\mathcal{C}2c1+\mathcal{C}1c4$

$a^1 3=\mathcal{C}2c4$ $\qquad a^2 3=\mathcal{C}2c5$

$a^1 4=(b1+\mathcal{C}2)c1+\mathcal{C}1c4$, $\quad a^2 4=(b1+2b2)c4$

$a^1 5=(b1+2\mathcal{C}2)c5$

$a^3 1 = \mathcal{C}_1 c_1$, $\quad a^4 1 = \frac{-(\mathcal{C}_1)^2}{b_1 + \mathcal{C}_2} c_5$,

$a^3 2 = \frac{b_1 \mathcal{C}_1}{b_1 + \mathcal{C}_2} c_5$ $\quad a^4 2 = \frac{-\mathcal{C}_2 (b_1 + 2\mathcal{C}_2)}{b_1 + \mathcal{C}_2} c_5$

$a^5 1 = \frac{-\mathcal{C}_1 (b_1 + 2\mathcal{C}_2)}{b_1 + \mathcal{C}_2} c_5$.

On trouvera que ces valeurs satisfont aux quinze conditions de la formule, que par conséquent on peut donner à c_1, c_4, c_5 telle valeur que l'on voudra, & que l'équation est intégrable par la première formule, quelles que soient les valeurs des coëfficiens b_1, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$.

Soit $c_5 = 0$, $c_4 = 0$, & $c_1 = 1$, on aura

$\alpha 1\,\alpha 2 - a1\,\alpha 2 = 0$, $\quad a1\,\alpha 3 - a1\,\alpha 3 = 0$,
$\alpha 2\,\alpha 3 - a2\,\alpha 3 = 0$ $\quad a2\,\alpha 4 - a2\,\alpha 4 = \mathcal{C}_2$
$\alpha 3\,\alpha 4 - a3\,\alpha 4 = 0$ $\quad a3\,\alpha 5 - a3\,\alpha 5 = 0$
$\alpha 4\,\alpha 5 - a4\,\alpha 5 = b_1 + \mathcal{C}_2$ $\quad \alpha 4\,\alpha 6 - a4\,\alpha 6 = 0$
$\alpha 5\,\alpha 6 - a5\,\alpha 6 = 0$

$\alpha 1\,\alpha 4 - a1\,\alpha 4 = \mathcal{C}_1$, $\quad a1\,\alpha 5 - a1\,\alpha 5 = 0$,
$\alpha 2\,\alpha 5 - a2\,\alpha 5 = 0$ $\quad a2\,\alpha 6 - a2\,\alpha 6 = 0$
$\alpha 3\,\alpha 6 - a3\,\alpha 6 = 0$

$\alpha 1\,\alpha 6 - a1\,\alpha 6 = 0$.

Soit $a1 = 0$, $a2 = 0$, $a3 = 0$, $a4 = 1$; $a5 = 0$, $a6 = 0$, on aura $\alpha 1 = \mathcal{C}_1$, $\alpha 2 = \mathcal{C}_2$, $\alpha 3 = 0$, $\alpha 5 = -(b_1 + \mathcal{C}_2)$, $\alpha 6 = 0$. Soit $\alpha 4 = 0$, l'intégrale sera $n = \frac{p\ddot{y}}{\mathcal{C}_1 \dot{x}^2 + \mathcal{C}_2 \dot{x}\dot{y} - (b_1 + \mathcal{C}_2) x\ddot{y}}$.

Pour pouvoir rapporter cette équation-ci

$$y + \frac{\begin{matrix} b_1 \dot{x}^2 \ddot{y} + b_2 \dot{x}\dot{y}\ddot{y} + b_3 \dot{y}^2 \ddot{y} + b_4 p \dot{y}^2 \\ + b_5 x \\ + b_6 y \end{matrix}}{\begin{matrix} + \mathcal{C}_1 p \ddot{x} + \mathcal{C}_4 p \dot{y} \\ + \mathcal{C}_2 x + \mathcal{C}_5 x \\ + \mathcal{C}_3 y + \mathcal{C}_6 y \end{matrix}} = 0$$ à la première

formule, il faut la multiplier par $c1\dot{x} + c2\dot{y}$; on aura

$$\dot{y} + \frac{+c1b1\dot{x}^3\ddot{y} + (c1b2 + c2b1)\dot{x}^2\dot{y}\ddot{y} + (c1b3 + c2b2)\dot{x}\dot{y}^2\ddot{y} +}{\begin{array}{lll} c2b3\dot{y}^3\ddot{y} + c1b4p\dot{x}\ddot{y}^2 & + c2b4p\dot{y}\ddot{y}^2 & \\ + c1b5x & + c2b5x & \\ + c1b6y & + c2b6y & \end{array}} = 0;$$

$$\begin{array}{lll} + c1\mathcal{C}1p\dot{x}^2 & + (c1\mathcal{C}4 + c2\mathcal{C}1)p\dot{x}\dot{y} & + c2\mathcal{C}4p\dot{y}^2 \\ + c1\mathcal{C}2x & + (c1\mathcal{C}5 + c2\mathcal{C}2)x & + c2\mathcal{C}5x \\ + c1\mathcal{C}3y & + (c1\mathcal{C}6 + c2\mathcal{C}3)y & + c2\mathcal{C}6y \end{array}$$

& en comparant avec la formule, on aura $a^1 1 + a^4 1 = c1b1$,

$$a^4 1 = c1\mathcal{C}2$$

$$2a^2 1 + a^3 2 + a^5 1 = c1b2 + c2b1,$$
$$- a^3 2 = c1b5$$
$$a^5 1 = c1\mathcal{C}3$$
$$a^3 2 = c1\mathcal{C}5 + c2\mathcal{C}2$$

$$a^1 2 + a^2 3 + a^4 2 = c1b3 + c2b2,$$
$$- a^4 2 - a^1 5 = c1b6$$
$$- 2a^2 3 + a^1 5 = c2b5$$
$$a^4 2 = c1\mathcal{C}6 + c2\mathcal{C}3$$
$$a^2 3 = c2\mathcal{C}5$$

$$a^3 3 = c2b3, \quad - a^2 2 + a^2 4 = c1b4,$$
$$- 2a^3 3 = c2b6 \qquad a^2 2 = c1\mathcal{C}4 + c2\mathcal{C}1,$$
$$a^3 3 = c2\mathcal{C}6$$

$$- 2a^1 3 + a^2 4 = c2b4, \quad a^3 1 = c1\mathcal{C}1.$$
$$a^1 3 = c2\mathcal{C}4$$

Donc 1.° $(b5 + \mathcal{C}5)c1 + \mathcal{C}2c2 = 0$,
$(b6 + \mathcal{C}6)c1 + (b5 + \mathcal{C}3 + 2\mathcal{C}5)c2 = 0$;
$(b3 - \mathcal{C}6)c2 = 0$, $(2b3 + b6)c2 = 0$.

2.° $a'1 = (b1 - \mathcal{C}2)c1$,
$a'2 = (-\mathcal{C}6+b3)c1 + (-\mathcal{C}5 - \mathcal{C}3 + b2)c2$
$a'3 = \mathcal{C}4c2$
$a'4 = (b4 + \mathcal{C}4)c1 + \mathcal{C}1c2$
$a'5 = (b5 + 2\mathcal{C}5)c2$

$a^2 1 = \frac{1}{2}[(b2 + b5 - \mathcal{C}3)c1 + b1c2]$,
$a^2 2 = \mathcal{C}4c1 + \mathcal{C}1c2$
$a^2 3 = \mathcal{C}5c2$
$a^2 4 = (b4 + 2\mathcal{C}4)c2$

$a^3 1 = \mathcal{C}1c1$, $a^4 1 = \mathcal{C}2c1$,
$a^3 2 = -b5c1$ $a^4 2 = \mathcal{C}6c1 + \mathcal{C}3c2$
$a^3 3 = b3c2$

$a^5 1 = \mathcal{C}3c1$

Soit $c1 = 0$, $c2 = 1$, on aura $\mathcal{C}2 = 0$, $\mathcal{C}5 = -\frac{1}{2}(b5 + \mathcal{C}3)$, $\mathcal{C}6 = b3$, $b6 = -2b3$;

l'équation sera $y + \dfrac{\begin{matrix} b1\dot{x}^2\ddot{y} + b2\dot{x}\dot{y}\ddot{y} + b3\dot{y}^2\ddot{y} + b4p\dot{y}^2 \\ + b5\dot{x} \\ - 2b3y \end{matrix}}{\begin{matrix} + \mathcal{C}1p\dot{x} + \mathcal{C}4p\dot{y} \\ + \mathcal{C}3y - \frac{1}{2}(b5 + \mathcal{C}3)a \\ + b3y \end{matrix}} = 0$,

& on aura

$a'1 = 0$, $a^2 1 = \frac{1}{2}b1$,
$a'2 = \frac{1}{2}(2b2 + b5 - \mathcal{C}3)$ $a^2 2 = \mathcal{C}1$
$a'3 = \mathcal{C}4$ $a^2 3 = -\frac{1}{2}(b5 + \mathcal{C}3)$
$a'4 = \mathcal{C}1$ $a^2 4 = b4 + 2\mathcal{C}4$
$a'5 = -\mathcal{C}3$

$a^3 1 = 0$, $a^4 1 = 0$, $a^5 1 = 0$; en substituant
$a^3 2 = 0$ $a^4 2 = \mathcal{C}3$
$a^3 3 = b3$

dans les conditions de la formule, on aura $b1\,\mathcal{C}1 = 0$, $\mathcal{C}1\,(b2 + b5) = 0$, $b1\,\mathcal{C}3 = 0$, $b1\,(b4 + 2\mathcal{C}4) = 0$, $\mathcal{C}3\,(b2 + b5) = 0$, $(b2 + b5)\,(b4 + 2\mathcal{C}4) = 0$, $b5\,(b4 + 2\mathcal{C}4) + b4\mathcal{C}3 + 2b3\mathcal{C}1 = 0$.

Soit $b1 = 0$, $b5 = -b2$, on aura l'équation

$$\dddot{y} + \frac{+ b2\,\dot{x}\dot{y}\ddot{y} + b3\,\dot{y}^3\ddot{y} + b4\,p\ddot{y}^2 - b2\,\dddot{x} - 2b3\,\dddot{y}}{+ \mathcal{C}1\,p\dot{x} + \mathcal{C}4\,p\dot{y} + \mathcal{C}3\,y + \frac{1}{2}(b2 - \mathcal{C}3)\,\ddot{x} + b3\,\ddot{y}} = 0,$$

qui sera intégrable par la première formule, pourvû que $b2\,(b4 + 2\mathcal{C}4) - b4\mathcal{C}3 - 2b3\mathcal{C}1 = 0$.

Soit, par exemple, l'équation

$$\dddot{y} + \frac{\dot{x}\dot{y}\ddot{y} + 7\dot{y}^3\ddot{y} + 2p\ddot{y}^2 - \dot{x}\ddot{y}^2 - 14y\ddot{y}^2}{-p\dot{x} + 5y\dot{x} - 3p\dot{y} - 2x\dot{y} + 7y\ddot{y}} = 0,$$

on aura $b2 = 1$, $b3 = 7$, $b4 = 2$, $\mathcal{C}1 = -1$, $\mathcal{C}3 = 5$, $\mathcal{C}4 = -3$.

Si on substitue ces valeurs dans la formule & dans la condition de cette formule, on aura l'équation proposée, & la condition sera remplie ; par conséquent, cette équation est intégrable par ce cas-ci ; pour l'intégrer on aura

$a^1 1 = 0$, $a^2 1 = 0$, $a^3 1 = 0$, $a^4 1 = 0$, $a^5 1 = 0$,
$a^1 2 = -2$ $a^2 2 = -1$ $a^3 2 = 0$ $a^4 2 = 5$
$a^1 3 = -3$ $a^2 3 = -2$ $a^3 3 = 7$
$a^1 4 = -1$ $a^2 4 = -4$
$a^1 5 = -5$

ou $a1a2 - a1a2 = 0$, $a1a3 - a1a3 = 0$,
$a2a3 - a2a3 = -2$ $a2a4 - a2a4 = -1$
$a3a4 - a3a4 = -3$ $a3a5 - a3a5 = -2$
$a4a5 - a4a5 = -1$ $a4a6 - a4a6 = -4$
$a5a6 - a5a6 = -5$.

$\alpha 1\,a4 - a1\,\alpha 4 = 0$, $\alpha 1\,a5 - a1\,\alpha 5 = 0$,
$\alpha 2\,a5 - a2\,\alpha 5 = 0$ $\alpha 2\,a6 - a2\,\alpha 6 = 5$
$\alpha 3\,a6 - a3\,\alpha 6 = 7$

$\alpha 1\,a6 - a1\,\alpha 6 = 0$.

Soit $a1 = 0$, $\alpha 1 = 0$, $\alpha 2 = \frac{-2 + a1\,\alpha 3}{a3}$;

donc $\alpha 3a4 - a3\alpha 4 = \frac{-a3 + 2a4}{a2} = -3$,

$\alpha 3a5 - a3\alpha 5 = \frac{2a5}{a2} = -2$,

$\alpha 3a6 - a3\alpha 6 = \frac{5a3 + 2a6}{a2} = 7$.

$\alpha 3 = \frac{-3 + a3\,\alpha 4}{a4}$;

donc $\alpha 4a5 - a4\alpha 5 = \frac{-2a4 + 3a5}{a3} = -1$,

$\alpha 4a6 - a4\alpha 6 = \frac{7a4 + 3a6}{a3} = -4$.

$\alpha 4 = \frac{-1 + a4\,\alpha 5}{a5}$;

donc $\alpha 5a6 - a5\alpha 6 = \frac{-4a5 + a6}{a4} = -5$.

Soit $a2 = 0$; donc $a5 = 0$. Soit $a3 = 2$, on aura $a4 = 1$, $a6 = -5$; en substituant ces valeurs, on aura $\alpha 2 = -1$, $\alpha 5 = 1$, $\alpha 3 - 2\alpha 4 = -3$, $-5\alpha 3 - 2\alpha 6 = 7$, $-5\alpha 4 - \alpha 6 = -4$.

Soit $\alpha 4 = 0$, on aura $\alpha 3 = -3$, $\alpha 6 = 4$; les coëfficiens de l'intégrale seront donc

$\left\{\begin{matrix} a1 = 0, & a2 = 0, & a3 = 2, & a4 = 1, & a5 = 0, & a6 = -5. \\ \alpha 1 = 0 & \alpha 2 = -1 & \alpha 3 = -3 & \alpha 4 = 0 & \alpha 5 = 1 & \alpha 6 = 4 \end{matrix}\right\}$

par conséquent l'intégrale sera $n = \frac{2\dot{y}^2 + p\ddot{y} - 5\dot{y}\ddot{y}}{-\dddot{y} - 3\ddot{y}^2 + x\ddot{y} + 4y\dddot{y}}$.

Soit $6_4 = -\frac{1}{2}b_4$, $6_1 = 0$, $6_3 = 0$, on aura

$$\therefore \quad \dot{y} + \frac{b_1\dot{x}^2\ddot{y} + b_2\dot{x}\dot{y}\dddot{y} + b_3\dot{y}^2\ddot{y} + b_4p\ddot{y}^2 + b_5\dot{x} - 2b_3y}{-\frac{1}{2}b_4p\dot{y} - \frac{1}{2}b_5\dot{x} + b_3y} = 0,$$

qui ſera toûjours intégrable par la première formule.

Soit $c1 = 1$, $c2 = 0$, on aura $6_5 = -b_5$, $6_6 = -b_6$, l'équation ſera

$$\therefore \quad \dot{y} + \frac{b_1\dot{x}^2\ddot{y} + b_2\dot{x}\dot{y}\dddot{y} + b_3\dot{y}^2\ddot{y} + b_4p\ddot{y}^2 + b_5\dot{x} + b6y}{+6_1p\dot{x} + 6_4p\dot{y} + 6_2\dot{x} - b_5\dot{x} + 6_3y - b6y} = 0, \text{ \& on aura}$$

$a'1 = b1 - 62$, $a^2 1 = \frac{1}{2}(b2 + b5 - 63)$,
$a'2 = b3 + b6$ $a^2 2 = 64$
$a'3 = 0$ $a^2 3 = 0$
$a'4 = b4 + 64$ $a^2 4 = 0$
$a'5 = 0$

$a^3 1 = 61$, $a^4 1 = 62$, $a^5 1 = 63$;
$a^3 2 = -b5$ $a^4 2 = -b6$
$a^3 3 = 0$

& en ſubſtituant dans les conditions de la formule, on aura

$261(b3 + b6) - 64(b2 + b5 - 63) = 0$,
$262(b3 + b6) + b5(b2 + b5 - 63) = 0$,
$6264 + b561 + (b1 - 62)(b4 + 64) = 0$,
$(b2 + b5 - 63)(b4 + 64) = 0$,
$(b3 + b6)(b4 + 64) = 0$,
$263(b3 + b6) + b6(b2 + b5 - 63) = 0$,
$6364 + 61b6 = 0$, $-6563 + b662 = 0$,
$63(b4 + 64) = 0$, $b6(b4 + 64) = 0$.

Soit $\mathcal{C}4 = -b4$, l'équation sera

$$\dot{y} + \frac{b1\dot{x}^2\ddot{y} + b2x\dddot{y}\ddot{y} + b3\dot{y}^2\ddot{y} + b4p\ddot{y}^2 + b5x + b6y}{+\mathcal{C}1p\dot{x} - b4p\dot{y} + \mathcal{C}2x - b5x + \mathcal{C}3y - b6y} = 0, \text{ \& on aura}$$

$$2\mathcal{C}1(b3 + b6) + b4(b2 + b5 - \mathcal{C}3) = 0,$$
$$2\mathcal{C}2(b3 + b6) + b5(b2 + b5 - \mathcal{C}3) = 0,$$
$$2\mathcal{C}3(b3 + b6) + b6(b2 + b5 - \mathcal{C}3) = 0,$$
$$-b4\mathcal{C}2 + b5\mathcal{C}1 = 0, \quad -b4\mathcal{C}3 + b6\mathcal{C}1 = 0,$$
$$-b5\mathcal{C}3 + b6\mathcal{C}2 = 0, \text{ \& } a'1 = b1 - \mathcal{C}2,$$
$$a'2 = b3 + b6$$
$$a'3 = 0$$
$$a'4 = 0$$
$$a'5 = 0$$

$a^21 = \frac{1}{2}(b2 + b5 - \mathcal{C}3)$, $a^31 = \mathcal{C}1$,
$a^22 = -b4$ $a^32 = -b5$
$a^23 = 0$ $a^33 = 0$
$a^24 = 0$

$a^41 = \mathcal{C}2$, $a^51 = \mathcal{C}3$.
$a^42 = -b6$

Soit $b6 = 0$, $\mathcal{C}3 = 0$, $b3 = 0$, $b5 = -b2$,

l'équation sera $\dot{y} + \frac{b1\dot{x}^2\ddot{y} + b2x\dddot{y}\ddot{y} + b4p\ddot{y}^2 - b2x}{+\mathcal{C}1p\dot{x} + \mathcal{C}4p\dot{y} + \mathcal{C}2x + b2x} = 0$, & on aura

$a'1 = b1 - \mathcal{C}2$, $a^21 = 0$, $a^31 = \mathcal{C}1$, $a^41 = \mathcal{C}2$, $a^51 = 0$,
$a'2 = 0$ $a^22 = \mathcal{C}4$ $a^32 = b2$ $a^42 = 0$
$a'3 = 0$ $a^23 = 0$ $a^33 = 0$
$a'4 = b4 + \mathcal{C}4$ $a^24 = 0$
$a'5 = 0$

& $\mathcal{C}2\mathcal{C}4 - b2\mathcal{C}1 + (b1 - \mathcal{C}2)(b4 + \mathcal{C}4) = 0$.

Pour pouvoir rapporter cette équation-ci

$$\therefore y + \frac{b1\dddot{x}y + b2\dot{y}\ddot{y}^2}{\mathcal{C}1\dot{x}^2 + \mathcal{C}2\dot{x}\dot{y} + \mathcal{C}3\dot{y}^2 + \mathcal{C}4p\ddot{y} + \mathcal{C}5x + \mathcal{C}6y} = 0,$$

à la première formule, il faut premièrement que $\mathcal{C}4 = 0$, $\mathcal{C}5 = 0$, $\mathcal{C}6 = 0$; secondement, il faut la multiplier par $c1p + c2x + c3y$,

on aura

$$\therefore y + \frac{\begin{array}{l} + c1b1p\dot{x}\dot{y}^2 + c1b2p\dot{y}\ddot{y}^2 \\ + c2b1x \quad + c2b2x \\ + c3b1y \quad + c3b2y \end{array}}{\begin{array}{lll} + c1\mathcal{C}1p\dot{x}^2 & + c1\mathcal{C}2p\dot{x}\dot{y} & + c1\mathcal{C}3p\dot{y}^2 \\ + c2\mathcal{C}1x & + c2\mathcal{C}2x & + c2\mathcal{C}3x \\ + c3\mathcal{C}1y & + c3\mathcal{C}2y & + c3\mathcal{C}3y \end{array}} = 0;$$

& en comparant avec la formule, on aura $a'1 + a^41 = 0$,

$$a^41 = c2\mathcal{C}1$$

$$2a^21 + a^32 + a'1 = 0, \qquad a'2 + a^23 + a^42 = 0,$$
$$- a^32 = c2b1 \qquad - a^42 - a'5 = c3b1$$
$$a'1 = c3\mathcal{C}1 \qquad - 2a^23 + a'5 = c2b2$$
$$a^32 = c2\mathcal{C}2 \qquad a^42 = c3\mathcal{C}2$$
$$a^23 = c2\mathcal{C}3$$

$$a^33 = 0, \qquad - a^22 + a'4 = c1b1;$$
$$- 2a^33 = c3b2 \qquad a^22 = c1\mathcal{C}2$$
$$a^33 = c3\mathcal{C}3$$

$$- 2a'3 + a^24 = c1b2, \qquad a^31 = c1\mathcal{C}1.$$
$$a'3 = c1\mathcal{C}3$$

Donc 1.° $(b1 + \mathcal{C}2)c2 = 0$,

$(b1 + \mathcal{C}2)c3 + (b2 + 2\mathcal{C}3)c2 = 0$,

$(\mathcal{C}3c3 = 0$, $b2c3 = 0$.

2.° $a'1 = -\mathcal{C}1c2$, $a^2 1 = \frac{1}{2}(b1c2 - \mathcal{C}1c3)$,
$a'2 = -\mathcal{C}3c2 - \mathcal{C}2c3$ $a^2 2 = \mathcal{C}2c1$
$a'3 = \mathcal{C}3c1$ $a^2 3 = \mathcal{C}3c2$
$a'4 = (b1 + \mathcal{C}2)c1$ $a^2 4 = (b2 + 2\mathcal{C}3)c1$
$a'5 = (b2 + 2\mathcal{C}3)c2$

$a^3 1 = \mathcal{C}1c1$, $a^4 1 = \mathcal{C}1c2$, $a^5 1 = \mathcal{C}1c3$.
$a^3 2 = -b1c2$ $a^4 2 = \mathcal{C}2c3$
$a^3 3 = 0$

Que $c3$ & $c2$ soient $= 0$, & soit $c1 = 1$, on aura

$a'1 = 0$, $a^2 1 = 0$, $a^3 1 = \mathcal{C}1$, $a^4 1 = 0$, $a^5 1 = 0$,
$a'2 = 0$ $a^2 2 = \mathcal{C}2$ $a^3 2 = 0$ $a^4 2 = 0$
$a'3 = \mathcal{C}3$ $a^2 3 = 0$ $a^3 3 = 0$
$a'4 = b1 + \mathcal{C}2$ $a^2 4 = b2 + 2\mathcal{C}3$
$a'5 = 0$

& en substituant, on trouvera que toutes les équations seront satisfaites, & que par conséquent l'équation

$\therefore y + \frac{b1\dot{x}\ddot{y}^2 + b2y\ddot{y}^2}{\mathcal{C}1\dot{x}^2 + \mathcal{C}2\dot{x}\dot{y} + \mathcal{C}3\dot{y}^2} = 0$, est intégrable généralement par la première formule; pour l'intégrer, on aura

$\alpha 1\alpha 2 - a1\alpha 2 = 0$, $\alpha 1\alpha 3 - a1\alpha 3 = 0$,
$\alpha 2\alpha 3 - a2\alpha 3 = 0$ $\alpha 2\alpha 4 - a2\alpha 4 = \mathcal{C}2$
$\alpha 3\alpha 4 - a3\alpha 4 = \mathcal{C}3$ $\alpha 3\alpha 5 - a3\alpha 5 = 0$
$\alpha 4\alpha 5 - a4\alpha 5 = b1 + \mathcal{C}2$ $\alpha 4\alpha 6 - a4\alpha 6 = b2 + 2\mathcal{C}3$
$\alpha 5\alpha 6 - a5\alpha 6 = 0$

$\alpha 1\alpha 4 - a1\alpha 4 = \mathcal{C}1$, $\alpha 1\alpha 5 - a1\alpha 5 = 0$,
$\alpha 2\alpha 5 - a2\alpha 5 = 0$ $\alpha 2\alpha 6 - a2\alpha 6 = 0$
$\alpha 3\alpha 6 - a3\alpha 6 = 0$

$\alpha 1\alpha 6 - a1\alpha 6 = 0$.

Soit $a1 = 0$, $a2 = 0$, $a3 = 0$, $a4 = 1$; $a5 = 0$, $a6 = 0$, on aura $\alpha 1 = \mathcal{C}1$, $\alpha 2 = \mathcal{C}2$, $\alpha 3 = \mathcal{C}3$, $\alpha 5 = -(b1 + \mathcal{C}2)$, $\alpha 6 = -(b2 + 2\mathcal{C}3)$. Soit $\alpha 4 = 0$, l'intégrale sera

$$n = \frac{p\ddot{y}}{\mathcal{C}1\dot{x}^2 + \mathcal{C}2\dot{x}\dot{y} + \mathcal{C}3\dot{y}^2 - (b1 + \mathcal{C}2)x\ddot{y} - (b2 + 2\mathcal{C}3)y\ddot{y}}.$$

Que $c3 = 0$, & $c2 = 1$, on aura $\mathcal{C}2 = -b1$, $\mathcal{C}3 = -\frac{1}{2}b2$, l'équation sera

$$\dddot{y} + \frac{b1\dot{x}\ddot{y}^2 + b2\dot{y}\ddot{y}^2}{\mathcal{C}1\dot{x}^2 - b1\dot{x}\ddot{y} - \frac{1}{2}b2\dot{y}^2} = 0, \text{ \& on aura}$$

$a'1 = -\mathcal{C}1$, $a''1 = \frac{1}{2}b1$, $a'''1 = \mathcal{C}1c1$;
$a'2 = \frac{1}{2}b2$ $a''2 = -b1c1$ $a'''2 = -b1$,
$a'3 = -\frac{1}{2}b2c1$ $a''3 = -\frac{1}{2}b2$ $a'''3 = 0$
$a'4 = 0$ $a''4 = 0$
$a'5 = 0$

$a^4 1 = \mathcal{C}1$, $a^5 1 = 0$; & en substituant dans les
$a^4 2 = 0$

conditions de la formule, on aura $2b2\mathcal{C}1 + (b1)^2 = 0$; par conséquent l'équation $\dddot{y} + \frac{-2b2\ddot{y}^2}{b1\dot{x} + b2\dot{y}} = 0$, sera intégrable dans ce cas-ci: & pour avoir son intégrale, on aura

$a'1 = \frac{(b1)^2}{2b2}$, $a''1 = \frac{1}{2}b1$, $a'''1 = \frac{-\frac{1}{2}(b1)^2}{2b2}c1$;
$a'2 = \frac{1}{2}b2$ $a''2 = -b1c1$ $a'''2 = -b1$
$a'3 = -\frac{1}{2}b2c1$ $a''3 = -\frac{1}{2}b2$ $a'''3 = 0$
$a'4 = 0$ $a''4 = 0$
$a'5 = 0$

$a^4 1 = \frac{-(b1)^2}{2b2}$, $a^5 1 = 0$, ou
$a^4 2 = 0$

$a1a2 - a1\alpha2 = \frac{(b1)^2}{2b2}$, $a1a3 - a1\alpha3 = \frac{1}{2}b1$,
$a2a3 - a2\alpha3 = \frac{1}{2}b2$ $a2a4 - a2\alpha4 = -b1c1$
$a3a4 - a3\alpha4 = -\frac{1}{2}b2c1$ $a3a5 - a3\alpha5 = -\frac{1}{2}b2$
$a4a5 - a4\alpha5 = 0$ $a4a6 - a4\alpha6 = 0$
$a5a6 - a5\alpha6 = 0$

$a1a4 - a1\alpha4 = -\frac{\frac{1}{2}(b1)^2}{2b2}c1$, $a1a5 - a1\alpha5 = -\frac{(b1)^2}{2b2}$,
$a2a5 - a2\alpha5 = -b1$ $a2a6 - a2\alpha6 = 0$
$a3a6 - a3\alpha6 = 0$

$a1a6 - a1\alpha6 = 0$; d'où l'on tirera $\begin{cases} a1 = 0, & a2 = b1, \\ \alpha1 = (b1)^2 & \alpha2 = 2b1b2 \end{cases}$
$\begin{matrix} a3 = b2, & a4 = -c1b1, & a5 = -b1, & a6 = 0, \\ \alpha3 = (b2)^2 & a4 = 0 & \alpha5 = 0 & \alpha6 = 0 \end{matrix}$ & l'intégrale

sera $m = \frac{b1\dot{x}\dot{y} + b2\dot{y}^2 - c1b1\ddot{p}\dot{y} - b1\dot{x}\ddot{y}}{(b1\dot{x} + b2\dot{y})^2}$, ou, en faisant

$c1 = 0$, $m = \frac{b1\dot{x}\ddot{y} + b2\dot{y}^2 - b1\dot{x}\ddot{y}}{(b1\dot{x} + b2\dot{y})^2}$; mais l'intégrale de cette même équation est par le premier cas, $n = \frac{p\ddot{y}}{(b1\dot{x} + b2\dot{y})^2}$;

en prenant la valeur de $\ddot{y}$ dans l'une de ces deux intégrales, & la substituant dans l'autre, on aura l'équation $(nb1\dot{x} + mp)(b1\dot{x} + b2\dot{y}) = p\dot{y}$, qui sera une des deux intégrales aux premières différences de l'équation $\dot{y} + \frac{-2b2\dot{y}^2}{b1\dot{x} + b2\dot{y}} = 0$.

Mais je crois qu'en voilà assez pour faire entendre cette méthode-ci, & pour mettre les jeunes Géomètres en état de s'en servir. Nous avons vû qu'une équation aux premières différences, n'a qu'une seule intégrale; qu'une équation aux secondes différences, a deux intégrales aux premières différences, au moyen desquelles on auroit l'intégrale finie de cette équation; qu'une équation aux troisièmes différences, a trois intégrales aux secondes différences, au moyen desquelles on auroit l'intégrale finie de cette équation; qu'une équation aux qua-

trièmes différences, a quatre intégrales aux troisièmes différences, au moyen desquelles on auroit l'intégrale finie de cette équation, &c.

Nous avons toûjours supposé que la plus haute différence n'étoit élevée qu'à la première puissance dans l'équation différencielle proposée ; que s'il s'agit, par exemple, d'une équation aux premières différences, $\dot{y}$ n'y est élevé qu'au premier degré ; que s'il s'agit d'une équation aux secondes différences, $\ddot{y}$ n'y est élevé qu'à la première puissance ; que s'il s'agit d'une équation aux troisièmes différences, $\dddot{y}$ n'y est élevé qu'à la première puissance, &c.

Je suppose que l'on me donne à intégrer une équation aux premières différences, dans laquelle $\dot{y}$ soit élevé à la seconde, ou à la troisième, ou à la quatrième puissance, &c. je différencie cette équation ; en faisant $\dot{x}$ constant, j'aurai une équation aux secondes différences. Je réduis la question à intégrer de deux manières cette équation aux secondes différences, ce qui sera toûjours possible, si l'équation aux premières différences, que l'on aura donnée, est intégrable ; ensuite je regarde laquelle de ces deux intégrales pourra devenir l'équation proposée, en donnant une certaine valeur à n ou à m. Je suppose que ce soit celle où est n qui devienne l'équation proposée, j'aurai deux équations aux premières différences, savoir, l'équation donnée, & celle où est le nombre m ; je chasse $\dot{x}$ & $\dot{y}$ de ces deux équations, & l'équation qui me restera entre p, x, y & m, sera l'intégrale de l'équation proposée.

Cette méthode s'appliquera également aux équations aux secondes différences, à celles aux troisièmes, à celles aux quatrièmes, &c. dans lesquelles $\ddot{y}$ ou $\dddot{y}$ ou $\ddddot{y}$, &c. seront élevés à la seconde, ou à la troisième, ou à la quatrième puissance, &c. il n'y aura qu'à différencier l'équation proposée, & intégrer de deux manières l'équation que l'on aura par ce moyen ; par conséquent tout le Calcul intégral se réduit par-là à n'avoir jamais à intégrer, si l'on veut, que des équations différencielles sans radicaux.

PRINCIPES

PRINCIPES
DE L'ART DE RÉSOUDRE
LES PROBLÊMES
SUR LE
MOUVEMENT DES CORPS.

SECTION PREMIÉRE.

I.

L'Espace eſt cette étendue ou ce vuide ſans bornes, dans lequel nagent, pour ainſi dire, tous les corps qui compoſent l'Univers.

II.

Tout ce qui exiſte dans l'eſpace & y remplit un lieu, ſe nomme matière.

III.

La maſſe d'un corps eſt la quantité de matière qui le compoſe.

IV.

La maſſe d'un corps eſt égale à ſon volume, moins celui de tous les vuides qui ſe trouvent entre ſes parties.

V.

J'appelle vuides dans un corps tout ce qui faiſant partie du volume d'un corps, ne ſe déplace pas lorſque le corps eſt déplacé.

VI.

Le lieu d'un corps eſt la partie de l'eſpace qu'il remplit au moment où je le conſidère.

VII.

Un point eſt ce que l'on conçoit dans l'eſpace n'avoir aucune étendue.

VIII.

Un point de matière eſt ce dont le lieu & le volume eſt un point.

IX.

La durée ſans commencement qui a précédé, & la durée ſans fin qui ſuivra le ſentiment que j'ai actuellement de moi, ſont ce que j'appelle le temps.

X.

Un inſtant eſt ce que l'on conçoit dans le temps n'avoir aucune durée.

XI.

Une portion quelconque de la durée, ou l'intervalle entre deux inſtans déterminés, ſe nomme un temps.

XII.

La manière d'être, ou l'état d'un corps dans l'eſpace, eſt d'y être en repos ou à une certaine diſtance du repos.

XIII.

L'on dit qu'un corps eſt en repos tant qu'il reſte dans le même lieu, & l'on dit qu'il eſt en mouvement, ou qu'il ſe meut, lorſque les lieux de ſon exiſtence ſe ſuccèdent conſécutivement l'un à l'autre, comme les inſtans de ſon exiſtence.

XIV.

Une direction eſt le prolongement de la diſtance des centres de deux points contigus.

XV.

On appelle vîteſſe d'un corps la diſtance où eſt ce corps d'être en repos.

XVI.

Un corps eſt d'autant plus éloigné d'être en repos, ou de réſider dans le même lieu, qu'il s'en éloignera davantage en moins de temps pendant qu'il perſévérera en l'état où il eſt.

XVII.

La mesure de la vîtesse d'un corps, à l'instant où j'en parle, est donc le rapport de l'espace ou de la ligne que parcourroit chaque point de ce corps, dans la direction de son mouvement, au temps qu'il employeroit à la parcourir.

XVIII.

Je suppose ici les corps parfaitement durs, tels qu'on conçoit qu'ils seroient s'ils étoient entièrement solides ou sans aucun vuide entre les points de matière qui les composent; & lorsque je parle de l'état d'un corps dans l'espace, j'entends que tous ses points se meuvent avec la même vîtesse & dans des directions parallèles, car il y a encore pour un corps d'autres manières d'être dans l'espace, dont nous parlerons dans la suite.

XIX.

Un corps qui resteroit seul dans l'espace, persévéreroit toûjours en l'état où on le laisseroit, c'est-à-dire, se mouveroit éternellement avec la même vîtesse & dans la même direction.

Si l'on prend plusieurs lieux consécutifs dans la direction de son mouvement, & qu'en vertu de l'état où on l'a laissé, on le conçoive passé du premier dans le troisième, l'on verra qu'il devra continuer de passer du troisième dans le quatrième, du quatrième dans le cinquième, du cinquième dans le sixième, & ainsi de suite, de la même manière qu'il a passé du second dans le troisième, puisque étant dans le second il étoit par rapport au quatrième précisément dans le même cas qu'étant au premier il étoit par rapport au troisième.

XX.

Pour que l'on conçoive bien ce que j'entends par lieux consécutifs, supposons que le corps dont nous parlons, est une boule; je prends plusieurs points consécutifs dans la direction du mouvement du centre de cette boule; les sphères égales à la boule dont ces points sont les centres, sont ce que j'appelle des lieux consécutifs.

XXI.

L'on voit bien que le corps dont nous parlons, s'il étoit laiſſé en repos, y perſévéreroit éternellement, car il n'y auroit jamais de raiſon pour qu'il ſe mût pluſtôt dans une direction que dans une autre.

XXII.

Si l'on réduit par la penſée un corps à n'être qu'un point maſſif (nous verrons dans la ſuite quel eſt le point dans un corps que l'on peut prendre pour le corps, ou dans lequel l'on peut ſuppoſer que réſide toute la maſſe), l'on peut le regarder à chaque inſtant comme étant au centre de l'eſpace, car ce centre eſt par-tout, & le conſidérer par rapport à toutes les directions dont il eſt le centre.

XXIII.

Soit AB *(fig. 1)* la direction où ſe meut le corps A, & ſoit ſa vîteſſe $= v$. Soit CAD un plan perpendiculaire à AB. Soit AE une autre direction quelconque, & ſoit FAG un plan perpendiculaire à AE, le corps A, en ſe mouvant le long de AB avec la vîteſſe v, s'éloignera uniformément non ſeulement du plan CAD, mais auſſi du plan FAG; par conſéquent ſa vîteſſe au lieu A dans la direction AE, eſt égale au produit de v par $\frac{AE}{AB}$ ou par cof. EAB.

XXIV.

Le corps A a donc à chaque inſtant & à chaque lieu où il ſe trouve, un état ou une vîteſſe décidée dans chaque direction dont il eſt le centre; ſa vîteſſe dans toutes les directions qui forment le plan perpendiculaire à celle où il ſe meut, eſt nulle ou $= 0$; elle eſt poſitive dans toutes les directions au delà de ce plan, & négative dans toutes celles en deçà.

XXV.

Le corps A ſeul dans l'eſpace perſévéreroit toûjours en ſon état dans la direction où il ſe meut; il perſévéreroit donc auſſi en ſon état dans toute autre direction.

XXVI.

Tous les changemens qui peuvent arriver à l'état d'un corps dans l'espace, se réduisent à ce que ce corps se mouvant dans la direction BC (*fig. 2*) avec une vîtesse AC, arrivé au lieu A, se meuve dans la direction AD avec une vîtesse AD.

XXVII.

Dans ce cas, de toutes les directions au centre desquelles est le corps A, celle où se feroit le plus grand changement, c'est-à-dire, celle où il s'éloigneroit le plus de son état, est AE (*fig. 3*) parallèle & du même sens que CD; car si des points C, D l'on mène à AE les perpendiculaires CF, DE, l'on verra que la vîtesse de A dans la direction AE, qui, dans le premier état du corps dans l'espace étoit AF, dans celui-ci seroit AE, & que par conséquent la distance d'un état à l'autre dans cette direction, est FE ou CD; & si des mêmes points C, D l'on mène à une direction quelconque Ae les perpendiculaires Cf, De, l'on verra que la vîtesse de A dans la direction Ae qui étoit Af, seroit Ae, & que la distance du premier état au second dans cette direction, est $fe < CD$.

XXVIII.

De même que la vîtesse d'un corps dans une direction quelconque est égale au produit de sa vîtesse dans la direction où il se meut par le cosinus de l'angle que fait cette autre direction avec celle-ci, l'accroissement de vîtesse dans une direction quelconque est égal au produit de l'accroissement qui arrive dans la direction où se fait le plus grand accroissement par le cosinus de l'angle entre cette autre direction & celle-ci.

XXIX.

Il n'arrivera aucun changement à l'état d'un corps dans toutes les directions qui forment le plan perpendiculaire à celle où se fait le plus grand changement; les vîtesses du corps augmenteront dans toutes les directions au delà de ce plan, & elles diminueront dans toutes celles en deçà.

XXX.

Il faut une cauſe ou une force pour qu'un corps qui ſe mouvoit dans la direction BC (*fig. 4*) avec une vîteſſe AC, arrivé au lieu A, ſe meuve dans la direction AD avec une vîteſſe AD. Nous nommerons cette force *impulſion*, & nous concevrons qu'elle agit par un ſeul coup qu'elle frappe.

XXXI.

A eſt le lieu où le corps A doit recevoir ce coup.

XXXII.

AE, parallèle & du même ſens que CD, en eſt la direction.

XXXIII.

Il ne s'agit donc plus que d'en trouver la meſure.

XXXIV.

Nous avons vû qu'à chaque lieu où ſe trouve un corps, il a un état ou une vîteſſe décidée dans chacune des directions dont il eſt le centre. Prenez une de ces directions; je dis que la force de ce corps, pour perſévérer en ſon état dans cette direction, ou pour n'y être pas en l'état le plus prochain de celui où il y eſt, eſt comme ſa maſſe.

Tout corps a une force pour perſévérer en ſon état dans une direction quelconque, puiſque de lui-même il y perſévéreroit éternellement; cette force ne dépend ni de la direction ni de l'état du corps dans cette direction, puiſqu'il perſévéreroit également en toute autre direction & en tout autre état; il n'y a donc que ſa maſſe qui puiſſe en être la meſure. Nous nommerons cette force *inertie*, & nous dirons que l'inertie d'un corps eſt comme ſa maſſe.

XXXV.

La force d'un corps pour n'être pas dans l'une des directions dont il eſt le centre en tel état qu'on voudra aſſigner, eſt comme ſa maſſe & comme la diſtance de ce nouvel état au ſien.

Pour qu'un corps ſoit dans l'une des directions dont il eſt le centre en un état quelconque donné, ſon inertie doit être autant de fois vaincue qu'il y a d'états depuis celui de ce corps

jusqu'à celui qui est donné. Pour qu'un corps soit dans l'état le plus prochain de celui où il est, son inertie doit être vaincue une fois ; pour qu'il soit dans celui d'ensuite, son inertie doit être vaincue deux fois ; pour qu'il soit dans le troisième, son inertie doit être vaincue trois fois, & ainsi de suite, car encore que nous concevions que le passage d'un état à l'autre se feroit subitement, le corps doit toûjours être sensé avoir à passer par tous les états d'entre deux ; par conséquent sa force, pour n'y être pas, est comme son inertie & comme le nombre d'états par où il auroit à passer pour y arriver, ou comme sa masse & comme la distance d'un état à l'autre.

XXXVI.

Je suppose un corps A se mouvant dans la direction BC *(fig. 5)* avec une vîtesse AC, sa force au lieu A pour ne pas se mouvoir dans la direction AD avec une vîtesse AD, est $= A.CD$.

XXXVII.

La direction de cette force opposée à celle de l'impulsion ou du coup qui la vaincroit, est Ae opposée à AE qui est celle de ce coup, en supposant la ligne eAE parallèle à CD.

XXXVIII.

La force d'un corps en mouvement pour n'être pas en repos, est comme sa masse & comme sa vîtesse ; la direction de cette force est la même que celle de la vîtesse du corps.

La force d'un corps en repos pour ne pas se mouvoir avec une vîtesse donnée, est pareillement comme sa masse & comme cette vîtesse, & la direction de cette force est en sens contraire à la vîtesse.

XXXIX.

Que la force $A.CD$ qu'a au lieu A dans la direction Ae, le corps A qui se meut dans la direction BC avec une vîtesse AC pour ne pas se mouvoir dans la direction AD avec une vîtesse AD, soit vaincue subitement par une impulsion égale & opposée, & le corps A se mouvera dans la direction AD avec une vîtesse AD.

X L.

Quel que ſoit l'état d'un corps dans l'eſpace, je peux au lieu où il ſe trouve, le ſuppoſer en tel autre état que je voudrai, & concevoir en même temps qu'en ce lieu il reçoit un coup qui le fait paſſer de l'état où je le ſuppoſe à celui où il eſt.

Le corps A ſe meut dans la direction BC avec une vîteſſe AC; au moment où il paſſe par le lieu A, je peux ſuppoſer qu'il ſe meut dans la direction AD avec une vîteſſe AD, & concevoir en même temps qu'il reçoit dans la direction A un coup $= A.CD$.

X L I.

Nous venons de démontrer que le corps A ſe mouvant dans la direction AC *(fig. 6)* avec une vîteſſe AC, & recevant au lieu A dans la direction AE un coup $= A.AE$, ſe mouvera dans la direction AD avec une vîteſſe AD, en ſuppoſant que $ACDE$ eſt un parallélogramme.

Au lieu de la vîteſſe qu'a au lieu A le corps A dans la direction AC où il ſe meut, je peux ſuppoſer ce corps en repos en ce lieu, & concevoir en même temps qu'il y reçoit dans la direction AC un coup $= A.AC$; par conſéquent l'effet de deux coups $A.AC$, $A.AE$, frappés en même temps ſur un corps en repos au lieu A, eſt le même que celui d'un ſeul coup $A.AD$ que recevroit ce corps en ce lieu, & réciproquement tout coup $A.AD$ pourra toûjours être regardé comme le réſultat de deux autres coups $A.AC$, $A.AE$.

X L I I.

Dès que l'on ſait trouver l'effet de deux coups frappés en même temps ſur un corps en repos, l'on ſaura trouver l'effet de deux, de trois, de quatre coups, &c. frappés en même temps ſur un corps en repos ou en mouvement.

X L I I I.

Frappez ſur un corps trois coups à la fois $A.AB$, $A.AC$, $A.AD$ *(fig. 7)*, & vous ne changerez rien à l'état de ce corps dans l'eſpace, pourvû que $ABDC$ étant un parallélogramme, le prolongement AD de la ligne AD ſoit $= AD$;

car

car un coup quelconque $A.AD$ de ces trois coups vaincra les deux autres coups $A.AB$, $A.AC$, car il vaincra le coup $A.AA$ qui en eſt le réſultat.

XLIV.

Le corps A *(fig. 8)* ſe meut dans la direction BC; trouver ſa force au lieu A dans une direction quelconque Ae pour ne pas ſe mouvoir dans la direction AD.

Je prens AC pour repréſenter la vîteſſe du corps A dans la direction BC où il ſe meut, je mène CD parallèle à AE qui coupe AD au point D, & j'achève le parallélogramme $ACDE$; la force de A dans la direction Ae eſt $= A.AE$.

XLV.

Si l'on ſait la direction où ſe mouvoit le corps A & ſa vîteſſe lorſqu'il a paſſé par le lieu A, & ſi l'on a la meſure & la direction de tous les coups qu'il a reçûs depuis en ſon chemin, quelque part qu'il ſoit, l'on ſaura la direction où il ſe meut & ſa vîteſſe, car cette vîteſſe & cette direction ſeront les mêmes que s'il avoit reçû tous ces coups à la fois au lieu A.

XLVI.

Je ſuppoſe que lorſque le corps A a paſſé par le lieu A, ſa vîteſſe, dans la direction AB *(fig. 9)* où il ſe mouvoit, étoit $= v$, & que les directions de tous les coups qu'il a reçûs depuis en ſon chemin, ont toûjours été parallèles à la ligne CAD ou DAC, quelque part qu'il ſoit.

Je dis que ſi l'on regarde la vîteſſe qu'il a actuellement dans la direction où il ſe meut, comme réſultante de deux autres vîteſſes, l'une parallèle à AB, & l'autre parallèle à la ligne CAD, celle parallèle à AB ſera $= v$, car elle ſera la même que ſi ce corps avoit reçû tous ces coups à la fois au lieu A.

SECTION DEUXIÉME.

I.

Au lieu de concevoir que la force Mv d'un corps M dont la vîteſſe dans l'une des directions dont il eſt le centre, eſt V, pour que ſa vîteſſe dans cette direction ne ſoit pas $V \pm v$, eſt vaincue ſubitement par une ſeule impulſion ou par un ſeul coup, l'on peut ſuppoſer une cauſe ou *force motrice*, telle qu'il faudroit, pour vaincre la force Mv, autant de coups de cette force motrice qu'il y a d'inſtans dans un temps t.

II.

La force que vaincroit chaque coup, & par conſéquent la meſure de la cauſe ou de la force motrice qui le frapperoit, eſt $= \frac{Mv}{t}$; car la force totale diviſée par le temps employé à la vaincre, exprime la force qui ſeroit vaincue à chaque inſtant ou à chaque coup, de même qu'une ſurface rectangle diviſée par ſa baſe, exprime la ligne qui l'a tracée.

III.

Si l'on diviſe le coup d'une force motrice par la maſſe du corps qui le reçoit, on aura le coup frappé ſur chaque point de matière de ce corps, & réciproquement, s'il y a une cauſe qui agiſſe dans l'intérieur des corps, & qui en anime à chaque inſtant toutes les parties également & parallèlement, en multipliant le coup que recevra chaque point d'un corps par la maſſe de ce corps, on aura le coup que recevra ce corps ou ſa force motrice. Cette cauſe que l'on conçoit agiſſant ſur tous les points matériels d'un corps, ſe nomme *force accélératrice:* nous la ſuppoſerons la même dans toute l'étendue des corps à chaque lieu par où ils paſſeront, & conſtante ou variable d'un lieu à un autre.

IV.

Nous connoiſſons pluſieurs forces motrices comme la pe-

ſanteur, les reſſorts, la réſiſtance des fluides, les frottemens, &c. il paroît même que la Nature n'en emploie point d'autres.

V.

Si un corps M en repos au lieu A *(fig. 10)* eſt livré aux coups continuels d'une force motrice conſtante p dans la direction AB, ce corps dans un temps t acquerra une vîteſſe v & parcourra un eſpace $AM = x$.

On aura $p = \frac{Mv}{t}$ & $v = \frac{\dot{x}}{t}$, donc $\frac{pt}{M} = \frac{\dot{x}}{t}$, en intégrant & rempliſſant la condition que t & x ſoient $= 0$ en même temps, on aura $p = \frac{2Mx}{t^2}$, en égalant les deux valeurs de p, on aura $v = \frac{2x}{t}$.

V I.

Pour pouvoir déterminer la route que ſuivra un corps qui part d'un lieu donné, avec une vîteſſe & ſuivant une direction données, ſa vîteſſe à chaque lieu de cette route, & le temps qu'il mettra à y arriver, il faut qu'à chaque lieu de l'eſpace par où l'on ſuppoſera que devra paſſer ce corps, l'on ait l'expreſſion de toutes les forces accélératrices qui y agiront ſur lui, & les directions de ces forces.

V I I.

L'effet de deux forces motrices $A.AB$, $A.AC$, ſera le même que celui d'une ſeule $A.AD$, en ſuppoſant que $ABDC$ *(fig. 11)* eſt un parallélogramme, & réciproquement toute force motrice $A.AD$ pourra toûjours être priſe pour le réſultat de deux autres $A.AB$, $A.AC$.

V I I I.

Pour qu'à un inſtant quelconque réponde un coup frappé ſur un corps par une force motrice, il faut que cette force agiſſe ſur ce corps dans tous les points de la ligne infiniment petite du ſecond ordre qu'il parcourra dans cet inſtant.

I X.

Soit AB *(fig. 12)* la direction où ſe meut le corps M;

à chaque point M de cette direction, je mène une perpendiculaire MP pour représenter la force motrice à ce point, ou le coup qu'y recevroit à chaque instant dans la direction MB, un corps qui y seroit retenu. Soit la vîtesse qu'avoit le corps M en partant du point $A = V$, celle qu'il a en $M = V + v$, $AM = s$, $MP = f$, le temps que ce corps a employé à parcourir $AM = t$, l'aire $AMPC = W$, $Mm = ds$, le temps que le corps emploie à parcourir $Mm = dt$, sa vîtesse en $m = V + v + dv$; on aura $f = \frac{M dv}{dt}$, $V + v = \frac{ds}{dt}$, $dW = f ds$, donc $dW = M (V dv + V dv)$. En intégrant & remplissant la condition que W & v soient $= o$ en même temps, on aura $W = M (Vv + \frac{1}{2} v^2)$.

X.

Soit, par exemple, $V = o$, on aura $W = \frac{1}{2} M v^2$; soit $v = - V$, on aura $W = - \frac{1}{2} M v^2$. W exprime la somme des forces motrices que le corps M a rencontrées de A en M, & qui toutes ont fait impression sur lui dans la direction MB, plus ou moins suivant leur intensité & suivant qu'il a passé plus ou moins vîte par le lieu de ces forces; par conséquent la somme des forces motrices qu'il est nécessaire qu'un corps M rencontre, & qui fassent impression sur lui avant qu'il passe de la vîtesse o à la vîtesse v, est $= \frac{1}{2} M v^2$; &, la somme des forces motrices qu'il est nécessaire que ce même corps M rencontre, & qui agissent sur lui avant qu'il passe de la vîtesse v à la vîtesse o, est aussi $= \frac{1}{2} M v^2$.

XI.

Cette nécessité qu'il y a que la somme des forces motrices que le corps M rencontrera, & qui feront impression sur lui dans la direction BA, avant qu'il passe de la vîtesse v à la vîtesse o, soit $= \frac{1}{2} M v^2$, peut être attribuée à un pouvoir qui est dans ce corps: l'on peut appeler ce pouvoir sa force vive, & dire que la force vive d'un corps M dont la vîtesse est v, pour que sa vîtesse ne soit pas o, est $= \frac{1}{2} M v^2$.

ou qu'elle eſt comme ſa maſſe & comme le quarré de ſa vîteſſe.

XII.

La ſomme des coups qu'il faut que reçoive une maſſe M dont la vîteſſe dans une des directions au centre deſquelles il eſt, eſt V, pour que ſa vîteſſe dans cette direction devienne $V + v$, eſt $= Mv$; & la ſomme des forces motrices à travers deſquelles il eſt néceſſaire que paſſe cette maſſe pour que cela arrive, eſt $= M(Vv + \frac{1}{2}v^2)$.

XIII.

En général, la force d'un corps M qui ſe meut parallèlement à MA *(fig. 13)* avec une vîteſſe v, pour ne pas ſe mouvoir parallèlement à MB avec une vîteſſe u, eſt $= M\sqrt{(v^2 - 2vu \text{ cof. } AMB + u^2)}$ & ſa force vive eſt $= \frac{1}{2}M(v^2 - 2vu \text{ cof. } AMB + u^2)$. La direction de ces deux forces eſt AC oppoſée à AB, en ſuppoſant $MA : MB :: v : u$.

XIV.

Dans l'eſtimation de la force des corps nous prenons l'inſtant pour l'unité, & dans celle de leur force vive c'eſt le point que nous prenons pour l'unité.

XV.

Je ſuppoſe un corps M ſe mouvant dans la direction AB *(fig. 14)* avec une vîteſſe v, & je demande quelle ſera ſa force dans la direction $M\varepsilon$, lorſqu'il paſſera par le lieu M, pour ne pas ſe mouvoir dans la direction d'un cercle décrit du centre C & du rayon CM perpendiculaire à AB, ou, ce qui revient au même, quelle eſt la force motrice dans la direction ME qui, frappant ce corps lorſqu'il paſſera par le lieu M, le feroit paſſer de la direction AB à celle de ce cercle.

Je conçois qu'auſſi-tôt que le corps M aura atteint le point M, il ne ceſſera d'être livré à l'action de forces motrices agiſſant toutes parallèlement à εE, & je ſuppoſe ces forces motrices telles que le corps M qui commencera en

M de ſe mouvoir dans la circonférence $Mm\mu$, continuera de tracer cette circonférence.

Je le ſuppoſe arrivé en m; je mène mQ & μq parallèles à Ee qui coupent la direction AB aux points Q, q. Je mène mR parallèle à AB qui coupe μq en R.

Je fais $MQ = x$, $Qm = y$, $Qq = mR = \dot{x}$, $R\mu = \dot{y}$, la force motrice au lieu $m = f$, on aura la vîteſſe de M au lieu m dans la direction $mR = v$; le temps que le corps M emploiera à parcourir $m\mu = \frac{\dot{x}}{v}$; ſa vîteſſe dans la direction $Qm = \frac{\dot{y}}{(\frac{\dot{x}}{v})} = \frac{v\dot{y}}{\dot{x}}$; par conſéquent on aura $f = M\frac{d(\frac{v\dot{y}}{\dot{x}})}{(\frac{\dot{x}}{v})}$, ou parce que la vîteſſe v eſt conſtante, $f = Mv^2\frac{d(\frac{\dot{y}}{\dot{x}})}{\dot{x}}$. Il s'agit d'avoir l'expreſſion de $\frac{d(\frac{\dot{y}}{\dot{x}})}{\dot{x}}$; $Mm\mu$ étant un cercle dont le rayon $= r$, & l'angle AME étant $= a$, on aura

x^2 ray. a — $2xy$ cof. a + y^2 ray. $a = 2ry$ ſin. a, & l'on trouvera $\frac{d(\frac{\dot{y}}{\dot{x}})}{\dot{x}} = \frac{r^2 \text{ ray. } a\,(\text{ſin. } a)^2}{(r \text{ ſin. } a + x \text{ cof. } a - y \text{ ray. } a)^3}$;

donc $f = Mv^2\frac{r^2 \text{ ray. } a\,(\text{ſin. } a)^2}{(r \text{ ſin. } a + x \text{ cof. } a - y \text{ ray. } a)^3}$.

Soit $x = 0$, y ſera auſſi $= 0$, & on aura la force du corps M au lieu M dans la direction $Me = \frac{Mv^2 \text{ ray. } a}{r \text{ ſin. } a}$; *C. Q. F. T.*

XVI.

Soit a un angle droit, on aura la force de M dans la

direction $M\gamma$ perpendiculaire à AB, c'eſt-à-dire, la force centrifuge de $M = \frac{Mv^2}{r}$.

XVII.

L'on me donne la courbe BMD *(fig. 15)* que trace un corps M, & le point F vers lequel ſont dirigées toutes les forces motrices qui retiennent ce corps dans cette courbe, & l'on demande l'expreſſion de la force motrice à chaque point M de cette courbe.

Soit C le centre, & CM le rayon du cercle de même courbure que la courbe en M, en faiſant la vîteſſe au point $M = v$, $MC = r$, $MF = e$, $FE = p$, $ME = N$, la force motrice dans la direction MF ſera $= \frac{Mev^2}{pr}$.

Il ne s'agit donc que d'avoir l'expreſſion de v.

Au lieu du coup que reçoit le corps M dans la direction MF, l'on peut ſuppoſer qu'il en reçoit deux autres, l'un dans la direction MC, & l'autre dans la direction ME, on aura $e : n :: \frac{Mev^2}{pr} : \frac{Mnv^2}{pr} =$ le coup dans la direction ME.

Soit le petit côté Mm de la courbe $= \dot{f}$, on aura $\frac{-Mnv^2}{pr} = \frac{M\dot{v}}{(\frac{\dot{f}}{v})}$, ou $\frac{-n}{p}\frac{\dot{f}}{r} = \frac{\dot{v}}{v}$; mais $\frac{\dot{f}}{r} = \frac{\dot{p}}{n}$; donc $\frac{-\dot{p}}{p} = \frac{\dot{v}}{v}$; en intégrant, on aura $v = \frac{A}{p}$; donc la force dans la direction $MF = \frac{MA^2e}{p^3r}$.

XVIII.

Trouver le mouvement d'un corps autour d'un point qui l'attire.

Soit P *(fig. 16)* le corps dont il s'agit, & F le point qui attire ce corps.

Soit A le lieu d'où eſt parti le corps P, & AB ſa vîteſſe & ſa direction en partant de A. Je mène FA, FP.

Soit l'angle $AFP = x$, $FP = y$, l'arc AP de la courbe $APp\pi$ que trace le corps $= \int$, l'angle $PFp = dx$, on aura $Pp = d\int$, $PR = ydx$, $Rp = dy$, & $d\int^2 = y^2 dx^2 + dy^2$.

Soit la vîteſſe angulaire du rayon vecteur $FP = V$, la vîteſſe de P autour de F ſera $= yV$.

Soit le temps que le corps P a employé à parcourir l'arc $AP = t$, on aura $dt = \frac{dx}{V}$.

Soit la vîteſſe de P le long de $FP = v$, on aura $v = \frac{dy}{(\frac{dx}{V})} = \frac{Vdy}{dx}$.

La force centrifuge de P eſt $= PyV^2$.

Soit la force motrice vers $F = P\varphi$,

on aura $yV^2 - \varphi = \frac{dv}{(\frac{dx}{V})} = \frac{d(\frac{Vdy}{dx})}{(\frac{dx}{V})}$, ou

$\varphi dy + \frac{1}{2} d(\frac{dy^2}{dx^2} - y^2) V^2 + \frac{dy^2}{dx^2} VdV = 0$.

Le corps P arrivé en p continueroit de ſe mouvoir dans la direction Pp avec la vîteſſe avec laquelle il vient de parcourir le petit côté Pp.

Soit pl la ligne qu'il parcourroit dans le ſecond inſtant, on aura $d\int : pl :: \frac{dx}{V} : \frac{dx}{V'}$ ou $d\int : pl - d\int :: \frac{dx}{V} : d(\frac{dx}{V})$; donc $pl = d\int + \frac{Vd\int}{dx} d(\frac{dx}{V})$. Mais à cauſe de la force motrice vers F, le corps P a auſſi en même temps une petite vîteſſe vers ce point $= \varphi' \frac{dx'}{V'}$.

Soit

Soit pm la petite ligne que lui feroit parcourir cette viteſſe dans le temps qu'il parcourroit pl, on aura

$$pm = \varphi' \frac{dx'}{V'} \cdot \frac{dx'}{V'} = \varphi \frac{dx^2}{V^2} + d\left(\frac{\varphi dx^2}{V^2}\right) = \frac{\varphi dx^2}{V^2}.$$

Du point l je mène $l\pi$ égal & parallèle à pm, & le corps P parcourra dans le ſecond inſtant la diagonale $p\pi$ du parallélograme $pl\pi m$.

Du centre p & du rayon $p\pi$, je décris le petit arc πn; j'aurai $ln = pl - p\pi = -ddf + \frac{Vdf}{dx} d\left(\frac{dx}{V}\right)$, & au moyen des triangles ſemblables PpR, $l\pi n$, j'aurai $df : dy :: \frac{\varphi dx^2}{V^2} : -ddf + \frac{Vdf}{dx} d\left(\frac{dx}{V}\right)$, ou

$$\varphi dy + \tfrac{1}{2} d\left(\frac{df^2}{dx^2}\right) V^2 + \frac{df^2}{dx^2} V dV = 0.$$

Je ſuppoſe que φ ne dépend que de y; en intégrant, j'aurai $\int \varphi dy + \frac{df^2}{2dx^2} V^2 = A$.

En égalant les deux valeurs de φdy, on aura $\frac{1}{2} d\left(\frac{df^2}{dx^2}\right) V^2 + \frac{df^2}{dx^2} V dV = \frac{1}{2} d\left(\frac{dy^2}{dx^2} - y^2\right) V^2 + \frac{dy^2}{dx^2} V dV$, ou $d(y^2) V + y^2 dV = 0$; & en intégrant, on aura $Vy^2 = B$, ou $V = \frac{B}{y^2}$. En ſubſtituant cette valeur de V, on aura $\int \varphi dy + \frac{y^2 dx^2 + dy^2}{2dx^2} \cdot \frac{B^2}{y^4} = A$, ou

$$dx = \frac{B dy}{y^2 \sqrt{\left(2A - 2\int \varphi dy - \frac{B^2}{y^2}\right)}}.$$

$v = \sqrt{\left(2A - 2\int \varphi dy - \frac{B^2}{y^2}\right)}$, $dt = \frac{y^2 dx}{B}$; donc $dt = \frac{2}{B} \cdot PpF$; donc $t = \frac{2}{B} \cdot APF$; la viteſſe de P dans la courbe APp où il ſe meut, $= \sqrt{(2A - 2\int \varphi dy)}$.

XIX.

Le corps P pourroit se mouvoir dans la courbe $APp\pi$ pendant que le plan BAF, sur lequel est tracée cette courbe, tourneroit autour de l'axe F perpendiculaire à ce plan, comme il s'y meut lorsque ce plan est en repos.

Pour cela, il faut 1.° que la vîtesse angulaire du plan BAF autour de l'axe F soit $= \frac{C}{y^2}$, afin que celle du rayon vecteur FP soit $= \frac{B+C}{y^2}$.

2.° Lorsque le plan BAF ne tourne pas, la force centrifuge de P est $= \frac{B^2}{y^3}$, & la force vers F est $= \varphi$.

Lorsque ce plan tournera, la force centtifuge de P sera $= \frac{(B+C)^2}{y^3}$. Soit la force vers $F = \Phi$, on aura $\frac{B^2}{y^3} - \varphi = \frac{(B+C)^2}{y^3} - \Phi$, ou $\Phi = \varphi + \frac{(B+C)^2 - B^2}{y^3}$.

XX.

Soit $\varphi = \frac{m}{y^2}$, & supposons que la courbe APp *(fig. 17)* coupe perpendiculairement les deux rayons vecteurs a & $a+b$, c'est-à-dire, que v est $= 0$ à ces deux distances, on aura $V(2A + \frac{2m}{a} - \frac{B^2}{a^2}) = 0$, & $V(2A + \frac{2m}{a+b} - \frac{B^2}{(a+b)^2}) = 0$;

donc $B^2 = \frac{2ma(a+b)}{2a+b}$, $2A = \frac{-2m}{2a+b}$;

donc $dx^2 = \frac{\frac{2ma(a+b)}{2a+b}dy^2}{y^4(-\frac{2m}{2a+b} + \frac{2m}{y} - \frac{2ma(a+b)}{(2a+b)y^2})}$,

ou $dx^2 = \frac{a^2(a+b)^4 dy^2}{y^4\left(-a(a+b)+\frac{a(a+b)(2a+b)}{y}-\frac{a^2(a+b)^2}{y^2}\right)}$.

Soit $FA = a$; du centre F & du rayon FA ſoit décrit le cercle ANn qui coupe le rayon vecteur FP au point N; ſoit mené NQ perpendiculaire à FA, & ſoit $AQ = z$, on aura $dx = \frac{dz}{\sqrt{(2az-z^2)}}$;

donc $\frac{dz^2}{2az-z^2} = \frac{a^2(a+b)^4 dy^2}{y^4\left(-a(a+b)+\frac{a(a+b)(2a+b)}{y}-\frac{a^2(a+b)^2}{y^2}\right)}$,

ou $\frac{dz^2}{z^2-2az} = \frac{a^2(a+b)^4 dy^2}{y^4\left(a(a+b)-\frac{a(a+b)(2a+b)}{y}+\frac{a^2(a+b)^2}{y^2}\right)}$,

ou $\frac{dz}{\sqrt{(z^2-2az)}} = \frac{a(a+b)dy}{y^2\sqrt{\left(a(a+b)-\frac{a(a+b)(2a+b)}{y}+\frac{a^2(a+b)^2}{y^2}\right)}}$;

en intégrant, on aura $lD + l[z-a+\sqrt{(z^2-2az)}] = l\left[2a+b-\frac{2a(a+b)}{y}+2\sqrt{\left[a(a+b)-\frac{a(a+b)(2a+b)}{y}+\frac{a^2(a+b)^2}{y^2}\right]}\right]$

ou $D[z-a+\sqrt{(z^2-2az)}] = 2a+b-\frac{2a(a+b)}{y}+2\sqrt{\left[a(a+b)-\frac{a(a+b)(2a+b)}{y}+\frac{a^2(a+b)^2}{y^2}\right]}$.

Je veux que $y = a$, lorſque $z = 0$, & je trouve $D = \frac{b}{a}$; donc

$b(z-a)+b\sqrt{(z^2-2az)} = a(2a+b)-\frac{2a^2(a+b)}{y}+2a\sqrt{\left[a(a+b)-\frac{a(a+b)(2a+b)}{y}+\frac{a^2(a+b)^2}{y^2}\right]}$.

En faiſant diſparoître les radicaux de cette équation, on aura $y = \frac{2a^2(a+b)}{a(2a+b)+b(a-z)}$, & l'on verra que la courbe $APp\pi$ eſt une ellipſe dont F eſt un des foyers, & dont le

grand axe est $= 2a + b$; le petit est $= 2\sqrt{[a(a+b)]}$.

XXI.

Nous avons nommé t le temps que le corps P emploie à parcourir l'arc AP, & nous avons trouvé $t = \frac{2}{B}.APF$; donc ici, en mettant pour B sa valeur, $t = 2\sqrt{\left(\frac{2a+b}{2ma(a+b)}\right)}.APF$.

Soit T le temps que le corps P emploie à faire une révolution entière, on aura $T =$ le produit de $2\sqrt{\left(\frac{2a+b}{2ma(a+b)}\right)}$ par l'aire entière de l'ellipse; mais l'aire d'une ellipse est comme le produit de ses deux axes, c'est-à-dire, qu'en prenant E pour un nombre déterminé, l'aire d'une ellipse est $= E(2a+b)\,2\sqrt{[a(a+b)]}$; donc $T = 2\sqrt{\frac{2a+b}{2ma(a+b)}}$ $2E(2a+b)\sqrt{[a(a+b)]} = \frac{4E}{\sqrt{(2m)}}(2a+b)^{\frac{3}{2}}$.

XXII.

Je suppose un corps P se mouvant autour d'un point F dans un orbe presque circulaire, & que l'on me donne l'expression de la force vers F qui retient ce corps dans cet orbe, il faut trouver le mouvement des abscides.

Je conçois qu'en vertu de la force vers F le corps P se meut dans une ellipse pendant que le plan, sur lequel est tracée cette ellipse, tourne autour de l'axe F, comme il s'y mouveroit si le plan sur lequel elle est tracée, étoit en repos, & que la force vers F fût telle qu'il faudroit.

Soit F un des foyers de l'ellipse dans laquelle nous concevons que se meut le corps P, a la moindre, & $a + b$ la plus grande distance du foyer F à l'ellipse; soit $FP = y$, & soit la force vers F qui retiendroit le corps P dans cette ellipse, si le plan sur lequel elle est tracée ne tournoit pas autour de $F = \frac{m}{y^2}$, la vîtesse angulaire de FP dans le plan,

sera $= \frac{V(\frac{2ma(a+b)}{2a+b})}{y^2}$. Soit la viteſſe angulaire du plan $= \frac{C}{y^2}$, la force qui retiendra le corps P dans l'ellipſe pendant que le plan ſur lequel elle eſt tracée tournera autour de F, & par conſéquent la force qui le retient dans l'orbe qu'il trace dans l'eſpace abſolu,

eſt $= \frac{m}{y^2} + \frac{2CV(\frac{2ma(a+b)}{2a+b}) + C^2}{y^3}$, ou

$= \frac{my + 2CV(\frac{2ma(a+b)}{2a+b}) + C^2}{y^3}$, ou, en mettant au numérateur de cette formule $a + u$ au lieu de y,

$= \frac{ma + mu + 2CV(\frac{2ma(a+b)}{2a+b}) + C^2}{y^3}$.

Il faut donc faire en ſorte que cette force-ci ſoit la même que celle qui eſt donnée.

Soit, par exemple, la force donnée $= \mu y^{e-3} = \frac{\mu y^e}{y^3}$

$= \frac{\mu(a+u)^e}{y^3} = \frac{\mu a^e + e\mu a^{e-1}u + \frac{e(e-1)}{2}\mu a^{e-2}u^2 + \&c.}{y^3}$

En rempliſſant la condition que l'orbe dans lequel ſe meut le corps P, eſt preſque circulaire, c'eſt-à-dire, que les lignes b & u ſont très-petites, la première de ces deux formules sera $= \frac{ma + mu + 2CV(ma) + C^2}{y^3}$, la ſeconde ſera $= \frac{\mu a^e + e\mu a^{e-1}u}{y^3}$; & on aura

$ma + 2CV(ma) + C^2 = \mu a^e$, $m = e\mu a^{e-1}$;

donc $C^2 + 2V(e\mu a^e)C + e\mu a^e = \mu a^e$, ou

$C + V(e\mu a^e) = V(\mu a^e)$.

La vîteſſe angulaire du plan ſur lequel nous ſuppoſons que ſe meut le corps P eſt donc $= \frac{\sqrt{(\mu a^e)}\,(1-\sqrt{e})}{y^2}$; celle du rayon vecteur FP dans ce plan eſt $= \frac{\sqrt{(\mu a^e)}\,\sqrt{e}}{y^2}$.

Soient $d\alpha$ & dx les angles d'un même inſtant en vertu de ces vîteſſes, on aura $d\alpha : dx :: \frac{\sqrt{(\mu a^e)}\,(1-\sqrt{e})}{y^2} : \frac{\sqrt{(\mu a^e)}\,\sqrt{e}}{y^2}$ ou $d\alpha = \frac{1-\sqrt{e}}{\sqrt{e}}\,dx$; en intégrant & en rempliſſant la condition que α & x ſoient $= 0$ en même temps, on aura $\alpha = \frac{1-e^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}}\,x$.

Suppoſons que lorſque le corps P eſt parti de l'abſcide ſupérieure, le lieu de cette abſcide étoit A, & que lorſqu'il y revient, ſon lieu eſt A'. Je fais $x = 360^d$; j'aurai l'angle $AFA' = \frac{1-e^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}} \cdot 360^d$.

Soit la force donnée $= \frac{\mu y^e + \nu y^\delta}{y^3} = \frac{\mu(a+u)^e + \nu(a+u)^\delta}{y^3}$
$= \frac{\mu a^e + e\mu a^{e-1}u + \nu a^\delta + \delta\nu a^{\delta-1}u}{y^3}$,
on aura $[C + \sqrt{(ma)}]^2 = \mu a^e + \nu a^\delta$,
$m = e\mu a^{e-1} + \delta\nu a^{\delta-1}$;
donc $C + \sqrt{(e\mu a^e + \delta\nu a^\delta)} = \sqrt{(\mu a^e + \nu a^\delta)}$.
La vîteſſe angulaire du plan ſur lequel nous ſuppoſons que ſe meut le corps P, eſt donc $= \frac{\sqrt{(\mu a^e + \nu a^\delta)} - \sqrt{(e\mu a^e + \delta\nu a^\delta)}}{y^2}$;
celle du rayon vecteur FP dans ce plan, eſt $= \frac{\sqrt{(e\mu a^e + \delta\nu a^\delta)}}{y^2}$;
par conſéquent l'angle AFA'
eſt $= \frac{\sqrt{(\mu a^e + \nu a^\delta)} - \sqrt{(e\mu a^e + \delta\nu a^\delta)}}{\sqrt{(e\mu a^e + \delta\nu a^\delta)}} \cdot 360^d$

XXIII.

Trouver le mouvement de deux corps qui s'attirent mutuellement & qui partent de lieux donnés avec des vîteſſes & ſuivant des directions données.

Soient L & T *(fig. 18)* les deux corps dont il s'agit.

Je ſuppoſe 1.° que ces deux corps ſe meuvent ſur un même plan.

Je mène la ligne LT que je prolonge indéfiniment au delà des points L & T.

Soit $ACc\gamma B$ la courbe que touche continuellement le rayon vecteur CTL.

Je fais $CT = r$, $CL = R$, $Cc = ds$, $ct = r'$, $cl = R'$, Nt ſera $= ds + dr$, $Ml = ds + dR$.

Soit l'angle $LCl = dx$, TN ſera $= r\,dx$, LM ſera $= R\,dx$.

Soit $Ll = dp$, $Tt = dq$, on aura $dp^2 = (ds + dR)^2 + R^2\,dx^2$, $dq^2 = (ds + dr)^2 + r^2\,dx^2$.

Soit la vîteſſe angulaire du rayon vecteur $CTL = V$, l'élément du temps ſera $= \frac{dx}{V}$; la vîteſſe de T autour de C ſera $= rV$, celle de L auſſi autour de C ſera $= RV$. La vîteſſe de T le long du rayon vecteur ſera $= \frac{(ds + dr)V}{dx}$; celle de L ſera $= \frac{(ds + dR)V}{dx}$.

Soit la force qui meut les corps L & T l'un vers l'autre $= \varphi$, la force qui accélèrera T vers L, ſera $= \frac{\varphi}{T}$, celle qui accélèrera L vers T, ſera $= \frac{\varphi}{L}$.

La force centrifuge de T eſt $= rV^2$, celle de L eſt $= RV^2$; on aura donc $(rV^2 + \frac{\varphi}{T})\frac{dx}{V} = d(\frac{(ds + dr)V}{dx})$ & $(RV^2 - \frac{\varphi}{L})\frac{dx}{V} = d(\frac{(ds + dR)V}{dx})$.

Les corps L & T étant arrivés en l & en t, s'ils étoient laissés à eux-mêmes, continueroient de se mouvoir dans les directions Ll, Tt. Je suppose que dans le second instant ils iroient en a & en b, on aura $\frac{dx}{V} : \frac{dx'}{V'} :: dp : la$ ou $\frac{dx}{V} : d(\frac{dx}{V}) :: dp : la - dp$; donc $la = dp + \frac{Vdp}{dx} d(\frac{dx}{V})$; par la même raison $tb = dq + \frac{Vdq}{dx} d(\frac{dx}{V})$.

Mais à cause de la force qui accélère l vers t, ce corps a aussi en même temps une petite vîtesse vers ce point $= \frac{\varphi'}{L} \cdot \frac{dx'}{V'}$ qui lui feroit parcourir dans le second instant une petite ligne $= \frac{\varphi'}{L} \frac{dx'}{V'} \cdot \frac{dx'}{V'} = \frac{\varphi dx^2}{LV^2} + d(\frac{\varphi dx^2}{LV^2}) = \frac{\varphi dx^2}{LV^2}$; & à cause de la force qui accélère t vers l, le corps T a une petite vîtesse vers l qui lui feroit parcourir dans le second instant une petite ligne $= \frac{\varphi dx^2}{TV^2}$.

Soit $a\lambda = \frac{\varphi dx^2}{LV^2}$ & parallèle à lt, & $b\theta = \frac{\varphi dx^2}{TV}$ & parallèle à tl, le corps l parcourra $l\lambda$, & le corps t parcourra $t\theta$.

Du centre l & du rayon $l\lambda$, soit décrit le petit arc λe, & du centre t & du rayon $t\theta$, soit décrit le petit arc θf, les triangles semblables λae, LMl & θfb, TNt, donneront $\frac{\varphi dx^2}{LV^2} : -ddp + \frac{Vdp}{dx} d(\frac{dx}{V}) :: dp : ds + dR$ & $\frac{\varphi dx^2}{TV} : ddq - \frac{Vdq}{dx} d(\frac{dx}{V}) : dq : ds + dr$, & par conséquent $\frac{\varphi dx^2}{LV^2}(ds + dR) = -dpddp + \frac{Vdp^2}{dx} d(\frac{dx}{V})$ & $\frac{\varphi dx^2}{TV^2}(ds + dr) = dqddq - \frac{Vdq^2}{dx} d(\frac{dx}{V})$.

Voilà

Voilà toutes les équations de notre Problème trouvées; voyons ce que nous pourrons en tirer.

1.re Équ.on $\frac{2\varphi}{T}(ds+dr) = d\left(\frac{V^2(ds+dr)^2}{dx^2}\right) - 2rV^2(ds+dr)$.

2me Équ.on $\frac{2\varphi}{L}(ds+dR) = -d\left(\frac{V^2(ds+dR)^2}{dx^2}\right) + 2RV^2(ds+dR)$.

3me Équ.on $\frac{2\varphi}{T}(ds+dr) = d\left(\frac{V^2(ds+dr)^2}{dx^2} + r^2V^2\right)$.

4me Équ.on $\frac{2\varphi}{L}(ds+dR) = -d\left(\frac{V^2(ds+dR)^2}{dx^2} + R^2V^2\right)$.

Au moyen de la première & de la troisième, on aura $rdV + 2Vdr + Vds = 0$; au moyen de la seconde & de la quatrième, on aura $RdV + 2VdR + Vds = 0$. Donc $ds = \frac{2(rdR - Rdr)}{R-r}$ & $\frac{dV}{V} = \frac{-2(dR-dr)}{R-r}$; en intégrant cette dernière équation, on aura $V = \frac{B}{(R-r)^2}$, & l'élément du temps sera $= \frac{2}{B} \cdot \frac{(R-r)^2 dx}{2}$.

Au moyen de la première & de la seconde équation, on aura $\frac{Td\left(\frac{V^2(ds+dr)^2}{dx^2}\right)}{ds+dr} + \frac{Ld\left(\frac{V^2(ds+dR)^2}{dx^2}\right)}{ds+dR} = 2(Tr+LR)V^2$.

Divisons par V, & multiplions par dx, nous aurons $\frac{Td\left(\frac{V^2(ds+dr)^2}{dx^2}\right)}{\frac{V(ds+dr)}{dx}} + \frac{Ld\left(\frac{V^2(ds+dR)^2}{dx}\right)}{\frac{V(ds+dR)}{dx}} = (Tr+LR)Vdx$.

Mettons pour V & pour ds leurs valeurs, nous aurons

$$Td\left(\frac{2rdR - Rdr - rdr}{(R-r)^3 dx}\right) - Ld\left(\frac{2Rdr - rdR - RdR}{(R-r)^3 dx}\right) = \frac{(Tr + LR)\,dx}{(R-r)^2}.$$

Soit dx constant, nous aurons

$$d\left(\frac{T(2rdR - Rdr - rdr) - L(2Rdr - rdR - RdR)}{(R-r)^3}\right) = \frac{(Tr + LR)\,dx^2}{(R-r)^2}$$

Mais $\frac{T(2rdR - Rdr - rdr) - L(2Rdr - rdR - RdR)}{(R-r)^3} = -d\left(\frac{Tr + LR}{(R-r)^2}\right)$;

donc $dd\left(\frac{Tr + LR}{(R-r)^2}\right) + \left(\frac{Tr + LR}{(R-r)^2}\right)dx^2 = 0.$

Multiplions par $d\left(\frac{Tr + LR}{(R-r)^2}\right)$, nous aurons

$$d\left(\frac{Tr + LR}{(R-r)^2}\right) \cdot dd\left(\frac{Tr + LR}{(R-r)^2}\right) + \left(\frac{Tr + LR}{(R-r)^2}\right) \cdot d\left(\frac{Tr + LR}{(R-r)^2}\right) dx^2 = 0;$$

& en intégrant, nous aurons

$$\left[d\left(\frac{Tr + LR}{(R-r)^2}\right)\right]^2 + \left(\frac{Tr + LR}{(R-r)^2}\right)^2 dx^2 = \frac{dx^2}{a^2}, \text{ ou}$$

$$dx = \frac{a(R-r)^2 d\left(\frac{Tr + LR}{(R-r)^2}\right)}{\sqrt{[(R-r)^4 - a^2(Tr + LR)^2]}}.$$

Au moyen de la 3.e & de la 4.e on aura $2\varphi(dR - dr) + Td\left(\frac{V^2(ds + dr)^2}{dx^2} + r^2V^2\right) + Ld\left(\frac{V^2(ds + dR)^2}{dx^2} + R^2V^2\right) = 0,$

& en intégrant, on aura $2\int\varphi(dR - dr) + \frac{TV^2(ds + dr)^2}{dx^2} + Tr^2V^2 + \frac{LV^2(ds + dR)^2}{dx^2} + LR^2V^2 = A$; donc

$$dx^2 = \frac{B^2[T(2rdR - Rdr - rdr)^2 + L(2Rdr - rdR - RdR)^2]}{(R-r)^3[A(R-r)^4 - 2(R-r)^4\int\varphi(dR - dr) - B^2(Tr^2 + LR)^2]}.$$

Je suppose que φ ne dépend que de la distance TL des deux corps; je fais $TL = y$, & je substitue pour R sa valeur $y + r$ dans les deux équations $dx^2 = \frac{a^2(R-r)^4\left[d\left(\frac{Tr+LR}{(R-r)^2}\right)\right]^2}{(R-r)^4 - a^2(Tr+LR)^2}$;

$dx^2 = \frac{B^2[T(2rdR - Rdr - rdr)^2 + L(2Rdr - rdR - RdR)^2]}{(R-r)^2[A(R-r)^4 - 2(R-r)^4\int\varphi(dR - dr) - B^2(Tr^2 + LR)^2]}$.

Il arrivera qu'en multipliant la première par B^2, & la seconde par $a^2(T+L)$, tous les termes où se trouveront r & dr, seront les mêmes dans les deux équations, & qu'on aura

$$dx = \frac{Bdy}{y^2\sqrt{\left(\frac{a^2A(T+L) - B^2}{a^2TL} - 2\int\frac{(T+L)\varphi dy}{TL} - \frac{B^2}{y^2}\right)}}.$$

La vîtesse de L autour de T sera $= \frac{B}{y}$; sa vîtesse par rapport à T le long du rayon vecteur sera

$= \sqrt{\left(\frac{a^2A(T+L) - B^2}{a^2TL} - 2\int\frac{(T+L)\varphi dy}{TL} - \frac{B^2}{y^2}\right)}$; ainsi le corps L se mouvera par rapport au corps T, comme si le corps T étoit en repos, & que la force motrice de L vers T fût $= \frac{(T+L)\varphi}{T}$.

Soit G le point qui partage TL, de manière que $GT : GL :: L : T$, nous verrons dans la suite que le point G est le centre de force des corps T, L, on aura $CG = \frac{Tr+LR}{T+L}$, l'arc GQ décrit du centre C & du rayon $CG = \frac{Tr+LR}{T+L}dx$, $Qg = ds + \frac{Tdr+LdR}{T+L}$, la vîtesse de G autour de $C = \frac{Tr+LR}{T+L}V$, la force centrifuge du point $G = \frac{Tr+LR}{T+L}V^2$, la vîtesse de G le long de $CL = \left(ds + \frac{Tdr+LdR}{T+L}\right)\frac{V}{dx}$. Si le point G

ſe meut en ligne droite, il ne ſera accéléré le long de CL que par ſa force centrifuge; on aura donc $\frac{Tr+LR}{T+L}V^2 = \frac{d\left[\frac{V}{dx}\left(ds+\frac{Tdr+LdR}{T+L}\right)\right]}{\left(\frac{dx}{V}\right)}$ ou $(Tr+LR)Vdx = d\left(\frac{V}{dx}\cdot\frac{(T+L)(2rdR-2Rdr)+(R-r)(Tdr+LdR)}{R-r}\right)$ ou $\frac{(Tr+LR)dx}{(R-r)^2} = d\left(\frac{T(2rdR-Rdr-rdr)-L(2Rdr-rdR-RdR)}{(R-r)^3dx}\right)$, comme nous avons trouvé ci-devant; par conſéquent le point G ſe meut en ligne droite. Si de plus la vîteſſe de G eſt uniforme, l'on aura Gg comme l'élément du temps, c'eſt-à-dire, $V\left[\left(\frac{Tr+LR}{T+L}dx\right)^2+\left(ds+\frac{Tdr+LdR}{T+L}\right)^2\right] = \frac{mdx}{V}$ ou $(Tr+LR)^2dx^2+\left(\frac{T(2rdR-Rdr-rdr)-L(2Rdr-rdR-RdR)}{R-r}\right)^2 = \frac{m^2(T+L)^2(R-r)^4dx^2}{B^2}$ ou $\left(\frac{Tr+LR}{(R-r)^2}\right)^2dx^2+\left[-d\left(\frac{Tr+LR}{(R-r)^2}\right)\right]^2 = \frac{m^2(T+L)^2}{B^2}dx^2$, ainſi que nous avons encore trouvé; par conſéquent la vîteſſe de G eſt conſtante.

Je ſuppoſe 2.° que les directions des impulſions qu'ont reçûs au commencement les corps L & T, n'étoient pas dans le même plan. Ces deux corps ſe mouveront tout comme dans le cas précédent, excepté que le plan ſur lequel ils ſe mouveront, ſe mouvera lui-même uniformément dans une direction qui lui ſera perpendiculaire.

Pour trouver le plan ſur lequel ſe mouveront nos deux corps, la direction & la vîteſſe de ce plan.

Soient Ll, Tt (*il faut imaginer la figure*) les directions où ſe meuvent les corps L, T, & ſoient Ll, Tt comme les vîteſſes de ces corps; je mène les lignes LT, lt, que je prolonge indéfiniment des deux ſens. Soit C le point de

la ligne LT, d'où menant une perpendiculaire CC' à la ligne lt, elle ſera auſſi perpendiculaire à la ligne LT; par le point C' menez $C'L'$ parallèle à CL, & par le point C menez Cl' parallèle à $C'l$, le plan LCl' eſt celui ſur lequel ſe mouveront les corps L & T, & CC' eſt la direction & la vîteſſe de ce plan.

Que l'on puiſſe toûjours mener une ligne qui ſoit perpendiculaire en même temps à deux autres lignes qui ne ſont pas dans un même plan, c'eſt un Lemme que nous venons de ſuppoſer, & qui eſt très-facile à démontrer.

Car de quelque manière que ces deux lignes ſoient poſées dans l'eſpace, de chaque point de l'une je puis mener une perpendiculaire à l'autre, & cette perpendiculaire ſera la moindre de toutes les lignes que l'on puiſſe mener de ce point-là à l'autre ligne; la moindre de toutes ces perpendiculaires ſera donc la moindre de toutes les lignes que l'on pourra mener de la première ligne à la ſeconde.

Je dis que cette moindre des perpendiculaires menées de la première ligne à la ſeconde, eſt auſſi perpendiculaire à la première ligne; car ſi elle ne l'étoit pas, du point où elle tombe ſur la ſeconde ligne, je mènerois une perpendiculaire à la première ligne qui ſeroit moindre qu'elle; il ne ſeroit donc pas vrai qu'elle eſt la moindre de toutes les lignes que l'on peut mener de la première ligne à la ſeconde.

Il faut encore démontrer que ſi l'on prend ſur les directions Ll, Tt, d'autres lignes proportionnelles La, Tb, on aura toûjours le même plan & la même vîteſſe a. Des points a & b ſoient abaiſſées ſur le plan LCl' les perpendiculaires $a\alpha$, $b\beta$, on aura $Ll : C'C :: La : a\alpha$, & $Tt : C'C :: Tb : b\beta$; donc $C'C : C'C :: a\alpha : b\beta$; donc $a\alpha = b\beta$; donc ab eſt parallèle au plan LCl'. Prolongez ab, & ſoit Q le point de la ligne LT, d'où menant une perpendiculaire QQ' à la ligne ab, elle ſoit auſſi perpendiculaire à TL, on aura $a\alpha = b\beta = QQ'$, & $CC' : QQ' :: Ll : La$, ou comme le temps que le corps L emploieroit à parcourir Ll au temps qu'il emploieroit à parcourir La.

XXIV.

Solution du Problème que l'on trouve à la page 252 du Livre des Principes de la Philoſophie Naturelle de M. Newton. 3.e édition.

Trouver le mouvement d'un corps peſant dans un milieu réſiſtant.

P eſt le corps dont il s'agit; $TPCA$ (*fig. 19*) eſt le plan vertical où ſe meut ce corps, & $ACc\gamma$ eſt l'horizon.

Soit $AC = x$, $CP = y$, la vîteſſe de CP le long de $AC = V$, le temps que le corps P emploiera à parcourir le petit côté Pp de la courbe dans laquelle il ſe meut, eſt $= \frac{dx}{V}$.

La vîteſſe de P le long de $CP = \frac{Vdy}{dx}$. Soit $Pp = ds$, & on aura $ds^2 = dx^2 + dy^2$.

La vîteſſe de P le long de $Pp = \frac{Vds}{dx}$.

Soit la force qui accélère vers $C = g$, celle qui accélère vers $T = R$.

Je décompoſe cette dernière force en deux autres, l'une dans la direction pR, & l'autre dans la direction RP; celle dans la direction pR ſera $= \frac{Rdy}{ds}$; on aura donc

$$\left(-g - \frac{Rdy}{ds}\right) = \frac{d\left(\frac{Vdy}{dx}\right)}{\left(\frac{dx}{V}\right)}.$$

Le corps P arrivé en p continueroit de ſe mouvoir dans la direction TPp. Soit pm la ligne qu'il parcourroit dans le ſecond inſtant, on aura $\frac{dx}{V} : \frac{dx'}{V'} :: ds : pm$, ou $\frac{dx}{V} : d\left(\frac{dx}{V}\right) :: ds : pm - ds$; donc $pm = ds + \frac{Vds}{dx} d\left(\frac{dx}{V}\right)$; mais à cauſe de la force qui l'accélère vers T, il a auſſi en

même temps une petite vîteſſe vers ce point $= \frac{R'dx'}{V'}$, & la petite ligne mn que lui feroit parcourir cette vîteſſe, eſt $= \frac{R'dx'}{V'} \cdot \frac{dx'}{V'} = \frac{Rdx^2}{V^2} + d\left(\frac{Rdx^2}{V^2}\right) = \frac{Rdx^2}{V^2}$.

Le corps P parcourroit donc dans le ſecond inſtant la ligne $pn = ds + \frac{Vds}{dx} d\left(\frac{dx}{V}\right) - \frac{Rdx^2}{V^2}$; mais à cauſe de la force qui l'accélère vers c, il a encore une petite vîteſſe vers ce point qui lui feroit parcourir $pf = \frac{gdx^2}{V^2}$.

Du point n ſoit menée $n\pi$ égale & parallèle à pf, & le corps P parcourra dans le ſecond inſtant la ligne $p\pi$.

Du centre p & du rayon $p\pi$ ſoit décrit le petit arc πl, on aura $ln = -dds + \frac{Vds}{dx} d\left(\frac{dx}{V}\right) - \frac{Rdx^2}{V^2}$; & au moyen des triangles ſemblables πnl, PpR, on aura $\frac{gdx^2}{V^2} : -dds + \frac{Vds}{dx} d\left(\frac{dx}{V}\right) - \frac{Rdx^2}{V^2} :: ds : dy$, & par conſéquent

$$-ds\,ddx + \frac{Vds^2}{dx} d\left(\frac{dx}{V}\right) - \frac{Rdsdx^2}{V^2} = \frac{gdx^2dy}{V^2}.$$

Soit $R = D\left(\frac{Vds}{dx}\right)^2$, on aura

$$\left(-g - \frac{dy}{ds} \cdot \frac{DV^2ds^2}{dx^2}\right) \frac{dx}{V} = d\left(\frac{Vdy}{dx}\right) \&$$

$$-ds\,ddx + \frac{Vds^2}{dx} d\left(\frac{dx}{V}\right) - \frac{dsdx^2}{V^2} \cdot \frac{DV^2ds^2}{dx^2} = \frac{gdx^2dy}{V^2}.$$

1.re Équ.on $-gdy = (Ddy^2ds + dyddy) \frac{V^2}{dx^2} + \frac{1}{2}dy^2 d\left(\frac{V^2}{dx^2}\right)$,

2me Équ.on $-gdy = (Dds^3 + dsdds) \frac{V^2}{dx^2} + \frac{1}{2}ds^2 d\left(\frac{V^2}{dx^2}\right)$.

En égalant enſemble les deux valeurs de $-gdy$, on aura

$$(Ddsdx^2 + dxddx) \frac{V^2}{dx^2} + \frac{1}{2}dx^2 d\left(\frac{V^2}{dx^2}\right) = 0,$$

ou $2DdsV^2 + 2VdV = 0$, ou $Dds + \frac{dV}{V} = 0$.

Soit C le nombre dont le logarithme est $= 1$, on aura $\int D\,ds\, lC + lV = lA$, ou $lC^{\int D\,ds} + lV = lA$, ou $lVC^{\int D\,ds} = lA$; donc $VC^{\int D\,ds} = A$, ou $V = \frac{A}{C^{\int D\,ds}}$.

Je mets la première équation sous cette forme-ci, $-g\,dx^3 = D\,dx\,dy\,ds\,V^2 + (dx\,ddy - dy\,ddx)V^2 + dx\,dy\,V\,dV$; après quoi j'y substitue pour $V\,dV$ sa valeur $-D\,ds\,V^2$; j'aurai $-g\,dx^3 = (dx\,ddy - dy\,ddx)\,V^2$, ou en supposant dx constant, $V^2 = \frac{-g\,dx^2}{ddy}$. On aura donc la vîtesse horizontale du corps $P = dx\,\sqrt{(\frac{-g}{ddy})}$; sa vîtesse dans la courbe où il se meut $= ds\,\sqrt{(\frac{-g}{ddy})}$; la résistance qu'il éprouve $= \frac{-gDds^2}{ddy}$.

Pour avoir D, j'égale les deux valeurs de V^2; j'aurai $\frac{A^2}{C^{2\int D\,ds}} = \frac{-g\,dx^2}{ddy}$, ou $C^{2\int D\,ds} = \frac{A^2}{g} \cdot \frac{-ddy}{dx^2}$, ou $2\int D\,ds = lA^2 - lg - l\,dx^2 + l - ddy$.

Différencions cette équation, & supposons g constante, nous aurons $2D\,ds = \frac{dddy}{ddy}$; donc $D = \frac{dddy}{2\,ds\,ddy}$, & $R = \frac{-g\,ds\,dddy}{2\,ddy^2}$.

SECTION TROISIÉME.

I.

JE ne changerois rien au mouvement de plusieurs corps entr'eux, si je leur imprimois à tous en même temps une même vîtesse dans la même direction, & si aux mêmes instans je les accélérois tous également & dans le même sens.

II.

Deux corps A & B se meuvent avec des vîtesses & dans des directions données. Pour avoir la vîtesse & la direction du

du corps A par rapport au corps B, je donne par la pensée aux corps A & B une vîteſſe égale & contraire à la vîteſſe du corps B; par ce moyen le corps B ſera en repos dans l'eſpace abſolu, & le corps A ſe mouvera avec une vîteſſe & dans une direction réſultantes de la vîteſſe & de la direction qu'il a, & de la vîteſſe & de la direction que je lui donne, & réciproquement la direction du corps A par rapport au corps B, étant donnée, l'on aura ſa direction dans l'eſpace, en faiſant un parallélogramme dont un des côtés eſt donné de grandeur & de poſition; l'autre l'eſt de grandeur, & la diagonale l'eſt de poſition.

III.

Si pluſieurs corps ſe choquent, ou plus généralement ſi les états de pluſieurs corps dans l'eſpace ſe trouvent être incompatibles enſemble, les changemens qui leur arriveront ſeront tels que les forces qu'avoient ces corps pour s'y refuſer, ſe ſeront vaincues mutuellement ou auront été en équilibre.

IV.

Si, par exemple, les corps A & B ſe meuvent dans la direction AB (*fig. 20*), & ſi A va plus vîte que B au moment où A atteindra B, il y aura incompatibilité entre les états de ces deux corps dans la direction AB; la force $A\alpha$ du corps A dont la vîteſſe eſt $= a$, pour que ſa vîteſſe ne ſoit pas $= a + \alpha$, ne ſera vaincue que par la force $B\zeta$ qu'a le corps B, dont la vîteſſe eſt $= b$. Pour que ſa vîteſſe ne ſoit pas $= b + \zeta$, on aura donc $A\alpha + B\zeta = 0$; d'ailleurs les corps A & B iront enſemble, car le corps A ne ſauroit aller plus vîte que B, ni moins vîte que B; donc $a + \alpha = b + \zeta$; donc $\alpha = \frac{-B(a-b)}{A+B}$, $\zeta = \frac{A(a-b)}{A+B}$; donc la vîteſſe des deux maſſes après le choc $= \frac{Aa + Bb}{A+B}$.

Si les corps A & B ſe meuvent l'un vers l'autre, a étant poſitive, b ſera négative.

V.

Si les corps A & B peuvent se comprimer ou s'aplatir, ou si seulement l'un des deux peut se comprimer, le combat entre ces deux corps durera jusqu'à ce que la vîtesse de B soit égale à celle de A, & les changemens qui arriveront à tout instant aux états de ces corps, seront en sens contraire & réciproques aux masses, & par conséquent aussi les changemens qui leur arriveront pendant tout le temps; on aura donc ici, comme dans le cas précédent, $A\alpha = B\beta$, & $a - \alpha = b + \beta$.

Si le ressort des corps A & B, après avoir été comprimé, fait effort pour se rétablir, le combat entre ces deux corps recommencera, & les changemens qui arriveront à chaque instant, seront en sens contraire & réciproques aux masses, & par conséquent aussi les changemens qui arriveront pendant tout le temps. Soit le changement qui arrivera à l'état du corps $B = c$, celui qui arrivera à l'état du corps A sera $= \frac{Bc}{A}$; la vîtesse de A sera donc $= a - \frac{B(a-b)}{A+B} - \frac{Bc}{A}$, & celle de B sera $= b + \frac{A(a-b)}{A+B} + c$.

Si le ressort des corps A & B est parfait, c sera $= \frac{A(a-b)}{A+B}$, & on aura la vîtesse de $A = a - \frac{2B(a-b)}{A+B}$, celle de $B = b + \frac{2A(a-b)}{A+B}$.

VI.

Si les corps A & B *(fig. 21)* se meuvent dans différentes directions, & si au moment où le corps A atteindra le corps B, la vîtesse de A dans la direction perpendiculaire au point de contact est plus grande que celle de B, il y aura incompatibilité entre les états de ces deux corps dans cette direction.

Soient les directions où se meuvent les corps A & B &

leurs vîteſſes Aa, Bb; ſoit le coup que reçoit le corps $A = A.A\alpha$, celui que reçoit le corps $B = B.B\mathcal{C}$, on aura $A.A\alpha = B.B\mathcal{C}$ & $AC - A\alpha = BD + B\mathcal{C}$, d'où l'on tirera $A\alpha = \frac{B(BC-BD)}{A+B}$, $B\mathcal{C} = \frac{A(BC-BD)}{A+B}$.

Faites les parallélogrammes $AaF\alpha$, $BbG\mathcal{C}$, les directions où ſe mouveront les corps A & B & leurs viteſſes, ſeront AF, BG.

Si les reſſorts des corps A & B ſont parfaits & infiniment roides, faites deux nouveaux parallélogrammes dont AF, $A\alpha$, BG, $B\mathcal{C}$ ſoient les côtés, & les diagonales de ces parallélogrammes ſeront les vîteſſes & les directions des corps A & B.

VII.

Si les corps A, B, C ſe meuvent tous les trois dans la direction ABC (*fig. 22*), & ſi au moment où B atteindra C, A atteint B, il y aura incompatibilité entre les états de ces trois corps dans la direction AC.

Soit avant le choc la vîteſſe de $A = a$, celle de $B = b$, & celle de $C = c$, & après le choc ſoit la vîteſſe de $A = a + \alpha$, celle de $B = b + \mathcal{C}$, & celle de $C = c + \gamma$, on aura $A\alpha + B\mathcal{C} + C\gamma = 0$, & $a + \alpha = b + \mathcal{C}$, $a + \alpha = c + \gamma$; donc $\alpha = \frac{-B(a-b)-C(b-c)}{A+B+C}$, $\mathcal{C} = \frac{A(a-b)-C(b-c)}{A+B+C}$, $\gamma = \frac{A(a-c)+B(b-c)}{A+B+C}$; donc la vîteſſe des trois maſſes après le choc $= \frac{Aa+Bb+Cc}{A+B+C}$.

Si les corps A, B, C, ſont des corps à reſſort, & ſi leur reſſort eſt infiniment roide, chaque corps recevra dans le ſecond inſtant un coup égal à celui qu'il aura reçû dans le premier; la vîteſſe de A ſera donc $= a - \frac{2[B(a-b)+C(b-c)]}{A+B+C}$.

celle de B sera $= b + \frac{2[A(a-b) - C(b-c)]}{A+B+C}$, & celle de C sera $= c + \frac{2[A(a-c) + B(b-c)]}{A+B+C}$.

VIII.

Si le corps A *(fig. 23)* se mouvant dans la direction Aa avec une vîtesse Aa, rencontre les corps B & C en repos, ces deux corps seront contraints de se mouvoir dans les directions AB, AC.

Je suppose que le corps A sera contraint de se mouvoir dans la direction $A\alpha$ avec une vîtesse $A\alpha$.

Soit la masse de $A = 1$, celle de $B = m$, & celle de $C = n$.

La force de A parallèlement à αa est $= \alpha a$.

Du point α je mène aux directions AB, AC les perpendiculaires $\alpha\mathcal{C}$, $\alpha\gamma$.

La vîtesse des corps A & B dans la direction AB, est $= A\mathcal{C}$; celle des corps A & C dans la direction AC, est $= A\gamma$; la force de B dans la direction BA est donc $= m.A\mathcal{C}$, & celle de C dans la direction CA est $= n.A\gamma$. Ces trois forces doivent se vaincre mutuellement ou être en équilibre.

Des points a, α, je mène aux directions AB, AC les parallèles ab, ac, αc, αb; on aura $m.A\mathcal{C} = ab$ & $n.A\gamma = ac$, & au moyen de ces deux équations il sera aisé de déterminer le point α.

Soit $AM = x$, $M\alpha = y$, $AD = a$, $DA = b$, on aura $ab = a - x$, $ac = b - y$. Soit $DK = c$, on aura $b : c :: y : M\mathcal{C} = \frac{cy}{b}$; donc $A\mathcal{C} = x + \frac{cy}{b}$; on aura $b : c :: x : N\gamma = \frac{cx}{b}$; donc $A\gamma = y + \frac{cx}{b}$, & nos deux équations seront $m.(x + \frac{cy}{b}) = a - x$, $n.(y + \frac{cx}{b}) = b - y$.

Si le reſſort des corps A, B, C eſt parfait & infiniment prompt, chacun d'eux recevra dans le ſecond inſtant un coup égal à celui qu'il aura reçû dans le premier.

I X.

Le corps A ſe mouvant dans la direction Aa, (*fig. 24*) rencontre en même temps en ſon chemin les quatre boules B, B'; C, C' égales deux à deux, ſemblablement poſées, & ſe mouvant avec la même vîteſſe parallèlement à Aa.

Soit la vîteſſe de $A = a$, celle des boules B, $B' = b$, & celle des boules $C, C' = c$, je ſuppoſe $b > c$ & $< \frac{Aa + 2Cc}{A + 2C}$.

Quoique le corps A atteigne en même temps les quatre boules B, B'; C, C', il ne choquera d'abord que les deux boules C, C', & enſuite il les choquera toutes quatre à la fois.

Soit le coup que reçoit le corps A dans la direction aA au premier choc $= m$, celui que reçoivent les boules C, C' dans la direction $Aa = n$, on aura $m = 2n$; la vîteſſe de A ſera $= a - \frac{m}{A}$, celle des boules C, C' ſera $= c + \frac{n}{C}$.

Je fais $c + \frac{n}{C} = b$; donc $n = C(b - c)$, & $m = 2C(b - c)$; donc la vîteſſe de $A = \frac{Aa - 2C(b-c)}{A}$, celle des quatre boules C, C', B, $B' = b$.

Soit le coup que reçoit le corps au ſecond choc $= p$, celui que reçoivent les boules B, $B' = q$, & celui que reçoivent les boules C, $C' = r$, on aura $p = 2q + 2r$; la vîteſſe de A ſera $= \frac{Aa - 2C(b-c)}{A} - \frac{p}{A}$, celle des boules $B, B' = b + \frac{q}{B}$, & celle des boules $C, C' = b + \frac{r}{C}$, & on aura $\frac{Aa - 2C(b-c) - p}{A} = b + \frac{q}{B}, b + \frac{q}{B} = b + \frac{r}{C}$; d'où l'on tirera $p = \frac{2A(B+C)(a-b) - 4C(B+C)(b-c)}{A + 2B + 2C}$; $q = \frac{AB(a-b) - 2BC(b-c)}{A + 2B + 2C}$, $r = \frac{AC(a-b) - 2C^2(b-c)}{A + 2B + 2C}$;

donc la vîteſſe des cinq corps après le choc $= \frac{Aa + 2Bb + 2Cc}{A + 2B + 2C}$.

Si ce ſont des corps à reſſort, & ſi leur reſſort eſt infiniment roide, ils recevront après le choc un coup égal à celui qu'ils auront reçû pendant le choc; la vîteſſe de A ſera donc $= \frac{Aa + 2Bb + 2Cc}{A + 2B + 2C} - \frac{m + p}{A}$, celle des boules $B, B' = \frac{Aa + 2Bb + 2Cc}{A + 2B + 2C} + \frac{q}{B}$, & celle des boules $C, C' = \frac{Aa + 2Bb + 2Cc}{A + 2B + 2C} - \frac{n + r}{C}$.

Nous avons ſuppoſé $b < \frac{Aa + 2Cc}{A + 2C}$; car ſi b étoit $= \frac{Aa + 2Cc}{A + 2C}$, il n'y auroit que les deux boules C, C' qui ſeroient choquées, & à plus forte raiſon ſi b étoit $> \frac{Aa + 2Cc}{A + 2C}$, & elles le ſeroient tout comme ſi le corps A ne rencontroit qu'elles deux, & qu'il n'atteignît pas en même temps les deux boules B, B'.

X.

* La boule A *(fig. 25)* ſe mouvant dans la direction Aa, rencontre en même temps en ſon chemin les quatre boules $B, B'; C, C'$, égales deux à deux, ſemblablement poſées, & ſe mouvant avec la même vîteſſe parallèlement à Aa.

Soit la vîteſſe de $A = a$, celle des boules $B, B' = b$, & celle des boules $C, C' = c$; je ſuppoſe $b > c$. Soit l'angle $aAB = aAB' = \alpha$, & $aAC = aAC' = \zeta$. Quoique la boule A atteigne en même temps les quatre boules $B, B'; C, C'$, & que le choc ſe faſſe ſubitement, elle commencera par choquer les deux boules C, C', & elle les choquera enſuite toutes quatre à la fois.

Soit le coup que reçoit le corps A dans la direction aA au premier choc $= m$, celui que reçoivent les

* Voyez l'Article CXLV de la première édition, ou l'Article CLXXVI de la ſeconde édition du *Traité de Dynamique de M. d'Alembert*.

corps C, C' dans les directions AC, $AC' = n$. Des deux coups égaux dans les directions AC, AC', il en réſulte un ſeul dans la direction $Aa = 2n \cos. \zeta$; par conſéquent on aura $m = 2n \cos. \zeta$; la vîteſſe de A dans la direction $Aa = a - \frac{m}{A}$, celle des corps C, C' dans les directions AC, $AC' = c \cos. \zeta + \frac{n}{C}$.

Si la vîteſſe des corps C, C' parallèlement à Aa avoit été $= b$, leur vîteſſe dans les directions AC, AC auroit été $= b \cos. \zeta$.

Je fais $c \cos. \zeta + \frac{n}{C} = b \cos. \zeta$, j'aurai

$m = 2C.(\cos. \zeta)^2.(b - c)$, $n = C. \cos. \zeta.(b - c)$, & la vîteſſe de A ſera $= \frac{Aa - 2C.(\cos. \zeta)^2.(b - c)}{A}$; celle de B dans la direction AB, & celle de B' dans la direction $AB' = b \cos. \alpha$, celle de C dans la direction AC, & celle de C' dans la direction $AC' = b \cos. \zeta$.

Soit le coup que reçoit le corps A dans la direction aA au ſecond choc $= p$, celui que reçoivent les corps B, B' dans les directions AB, $AB' = q$, & celui que reçoivent les corps C, C' dans les directions AC, $AC' = r$. Des deux coups égaux dans les directions AB, AB', il en réſulte un ſeul dans la direction $Aa = 2q \cos. \alpha$; & des deux coups égaux dans les directions AC, AC', il en réſulte un ſeul dans la direction $Aa = 2r \cos. \zeta$; par conſéquent on aura $p = 2q \cos. \alpha + 2r \cos. \zeta$; la vîteſſe de A dans la direction Aa, ſera $= \frac{Aa - 2C.(\cos. \zeta)^2.(b - c)}{A} - \frac{p}{A}$; celle des corps B, B' dans les directions AB, $AB' = b \cos. \alpha + \frac{q}{B}$, & celle des corps C, C' dans les directions AC, $AC' = b \cos. \zeta + \frac{r}{C}$,

& on aura $\left(\frac{Aa - 2C(\text{cof. }\zeta)^2.(b-c) - p}{A}\right)\text{cof. }\alpha = b\text{ cof. }\alpha + \frac{q}{B}$,

$\left(\frac{Aa - 2C.(\text{cof. }\zeta)^2.(b-c) - p}{A}\right)\text{cof. }\zeta = b\text{ cof. }\zeta + \frac{r}{C}$; donc

$p = \frac{[A.(a-b) - 2C.(\text{cof. }\zeta)^2.(b-c)]\,[2B(\text{cof. }\alpha)^2 + 2C(\text{cof. }\zeta)^2]}{A + 2B(\text{cof. }\alpha)^2 + 2C(\text{cof. }\zeta)^2}$,

$q = \frac{B\text{ cof. }\alpha\,[A.(a-b) - 2C.(\text{cof. }\zeta)^2.(b-c)]}{A + 2B.(\text{cof. }\alpha)^2 + 2C.(\text{cof. }\zeta)^2}$,

$r = \frac{C\text{cof. }\zeta\,[A.(a-b) - 2C(\text{cof. }\zeta)^2.(b-c)]}{A + 2B(\text{cof. }\alpha)^2 + 2C(\text{cof. }\zeta)^2}$; donc la

vîteſſe de $A = \frac{Aa + 2Bb(\text{cof. }\alpha)^2 + 2Cc(\text{cof. }\zeta)^2}{A + 2B(\text{cof. }\alpha)^2 + 2C(\text{cof. }\zeta)^2}$.

La vîteſſe des corps B, B' dans les directions AB, AB' = la vîteſſe de A par cof. α, & celle des corps C, C' dans les directions AC, AC' = la vîteſſe de A par cof. ζ.

Si les corps A, B, B'; C, C' ſont des corps à reſſort, & ſi leur reſſort eſt infiniment roide, ils recevront dans le ſecond inſtant un coup égal à celui qu'ils auront reçû dans le premier; la vîteſſe de A ſera donc celle que nous venons de déterminer $-\frac{m+p}{A}$; celle des corps B, B' dans les directions AB, AB' ſera celle que nous venons de trouver $+\frac{q}{B}$, & celle des corps C, C' dans les directions AC, AC', ſera auſſi celle que nous venons de trouver $+\frac{n+r}{C}$.

Il peut ſe faire que la vîteſſe des corps B, B' ſoit telle qu'ils ne ſoient pas choqués du tout, c'eſt-à-dire, que p, q, r ſoient = 0; on aura $A(a-b) - 2C(\text{cof. }\zeta)^2(b-c) = 0$; donc $b = \frac{Aa + 2Cc(\text{cof. }\zeta)^2}{A + 2C(\text{cof. }\zeta)^2}$, & à plus forte raiſon ſi b eſt $> \frac{Aa + 2Cc(\text{cof. }\zeta)^2}{A + 2C(\text{cof. }\zeta)^2}$.

(Voyez la page 299 du tome I.er des Opuſcules de M. d'Alembert.)

SECTION

SECTION QUATRIÉME.

I.

CONCEVEZ un espace roide dénué d'inertie & doué de points massifs A, B, C, D, &c. ou un corps quelconque tournant librement autour d'un axe immobile.

II.

La force de cet espace en vertu d'une particule massive A, dont la distance à l'axe est a, pour persévérer en son état, ou pour n'être pas en l'état le plus prochain de celui où il est, est comme l'inertie de la particule massive A, & comme la distance du lieu où réside cette force à l'axe, c'est-à-dire, comme Aa.

III.

La vîtesse angulaire de cet espace étant V, sa force, pour que sa vîtesse angulaire ne soit pas $V + v$, est comme sa force pour persévérer, ou comme son inertie, comme la distance du lieu où réside cette force à l'axe, & comme v, c'est-à-dire, comme $Aa.a.v$ ou Aa^2v.

IV.

L'inertie de ce même espace, en vertu d'une autre particule massive B, dont la distance à l'axe est b, est $= Bb$, & sa force, pour n'être pas à une distance v de son état, est $= Bb^2v$.

V.

Je suppose que les particules massives A, B, C, D, &c. dont les distances à l'axe sont a, b, c, d, &c. soient anéanties; trouver la particule massive M & la distance m de l'axe à laquelle il faudroit la placer pour que l'inertie de cet espace, & sa force, pour n'être pas à une distance v de son état, fussent les mêmes qu'auparavant;

on aura $Mm = Aa + Bb + Cc + Dd +$ &c.

& $Mm^2v = Aa^2v + Bb^2v + Cc^2v + Dd^2v +$ &c.

donc $M = \frac{(Aa + Bb + Cc + Dd + \&c.)^2}{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + Dd^2 + \&c.}$, &

$m = \frac{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + Dd^2 + \&c.}{Aa + Bb + Cc + Dd + \&c.}$.

VI.

Soit $a = l + \alpha$, $b = l + \zeta$, $c = l + \gamma$, $d = l + \delta$, &c. $m = l + \mu$, on aura

$M = \frac{[A(l+\alpha) + B(l+\zeta) + C(l+\gamma) + D(l+\delta) + \&c.]^2}{A(l+\alpha)^2 + B(l+\zeta)^2 + C(l+\gamma)^2 + D(l+\delta)^2 + \&c.}$,

$\mu = \frac{A\alpha(l+\alpha) + B\zeta(l+\zeta) + C\gamma(l+\gamma) + D\delta(l+\delta) + \&c.}{A(l+\alpha) + B(l+\zeta) + C(l+\gamma) + D(l+\delta) + \&c.}$;

en supposant que les particules massives A, B, C, D, &c. tournent autour d'un axe infiniment distant, ou qu'elles se meuvent toutes avec la même vîtesse & dans des directions parallèles, l sera infinie, & on aura $M = A + B + C + D + \&c.$

$\mu = \frac{A\alpha + B\zeta + C\gamma + D\delta + \&c.}{A + B + C + D + \&c.}$.

VII.

Le centre de force d'un espace roide dénué d'inertie & doué de points massifs A, B, C, D, &c. ou d'un corps quelconque qui est libre, est un point G dans cet espace ou dans ce corps, dont la force pour persévérer en son état dans une direction quelconque, & celle pour n'en être pas à une distance donnée, sont les mêmes que si toutes les particules massives A, B, C, D, &c. y étoient concentrées.

VIII.

Nous savons trouver la distance de ce point à un plan quelconque; car si des points massifs A, B, C, D, &c. & du point G, l'on mène à ce plan les perpendiculaires $Aa = \alpha$, $Bb = \zeta$, $Cc = \gamma$, $Dd = \delta$, &c. $Gg = \eta$, on aura $G = A + B + C + D$, &c.

$\eta = \frac{A\alpha + B\zeta + C\gamma + D\delta + \&c.}{A + B + C + D + \&c.}$.

IX.

Si le plan paſſe par le point G, on aura $A\alpha + B\mathfrak{G} + C\gamma + D\delta + \&c. = 0$.

X.

Je ſuppoſe que l'eſpace ou le corps dont nous parlons, n'eſt doué que de deux points maſſifs A, B *(fig. 26)*. Soit G le centre de leur force; le point G ne peut jamais être hors de la ligne AB, car il n'y a que les points de cette ligne qui ſoient uniques par rapport aux points maſſifs A, B. Par le point G je fais paſſer un plan quelconque aGb, & des points A, B je mène à ce plan les perpendiculaires $Aa = \alpha$, $Bb = -\mathfrak{G}$; j'aurai $A\alpha - B\mathfrak{G} = 0$; donc $\alpha : \mathfrak{G} :: B : A$, mais $GA : GB :: \alpha : \mathfrak{G}$; donc $GA : GB :: B : A$.

Or dès que l'on ſait trouver le centre de force de deux points maſſifs A, B, l'on ſaura trouver celui de trois, celui de quatre, celui de cinq, &c.

XI.

Par le centre de force G d'un eſpace roide dénué d'inertie & doué de points maſſifs A, B, C, D, &c. ou d'un corps quelconque donné, je fais paſſer une ligne roide dénuée d'inertie que je prolonge indéfiniment de part & d'autre du point G; je marque ſur cette ligne un point O, & je conçois qu'à ce point la ligne GO eſt traverſée perpendiculairement par une ligne ou par un axe roide immobile; le centre d'inertie M de cet eſpace ou de ce corps par rapport à l'axe O, eſt dans la ligne OG, & en concevant que des points maſſifs A, B, C, D, &c. & du point M l'on mène à l'axe O les perpendiculaires a, b, c, d, &c. m, on aura $M = \frac{(Aa + Bb + Cc + Dd + \&c.)^2}{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + Dd^2 + \&c.}$ & $m = \frac{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + Dd^2 + \&c.}{Aa + Bb + Cc + Dd + \&c.}$.

XII.

Soit AOB *(fig. 27)* un eſpace plan roide dénué d'inertie & doué de deux points maſſifs A, B, ſe mouvant librement dans le plan AOB autour de l'axe O perpendiculaire à ce plan.

Soit $OA = a$, $OB = b$, l'angle $AOB = \alpha$. La vîteſſe angulaire de AOB étant $= V$, la force de A dans la direction $A\alpha$ perpendiculaire à OA, pour que la vîteſſe angulaire de AOB ne ſoit pas $= V + v$, eſt $= Aav$, celle de B dans la direction $B\beta$ perpendiculaire à OB, eſt $= Bbv$.

Soit e le point d'interſection des directions $A\alpha$, $B\beta$, & ſoit eB à ed comme Bb à Aa, les lignes eB, ed étant les directions & les meſures des forces de B & de A la diagonale ev du parallélogramme $Bedv$ ſera la direction & la meſure de la force réſultante de ces deux forces; on aura $\text{cof. } \alpha : \text{ſin. } \alpha :: a : Ac = \frac{a \text{ ſin. } \alpha}{\text{cof. } \alpha}$,

$\text{cof. } \alpha : 1 :: a : Oc = \frac{a}{\text{cof. } \alpha}$, donc $cB = \frac{b \text{ cof. } \alpha - a}{\text{cof. } \alpha}$;

on aura $\text{ſin. } \alpha : \text{cof. } \alpha :: cB : Be = \frac{b \text{ cof. } \alpha - a}{\text{ſin. } \alpha}$;

donc $ed = \frac{Aa(b \text{ cof. } \alpha - a)}{Bb \text{ ſin. } \alpha}$, $\text{ſin. } \alpha : 1 :: cB : ce = \frac{b \text{ cof. } \alpha - a}{\text{ſin. } \alpha \text{ cof. } \alpha}$; donc $cd = \frac{(Bb - Aa \text{ cof. } \alpha)(b \text{ cof. } \alpha - a)}{Bb \text{ ſin. } \alpha \text{ cof. } \alpha}$;

on aura $1 : \text{ſin. } \alpha :: cd : ck = \frac{(Bb - Aa \text{ cof. } \alpha)(b \text{ cof. } \alpha - a)}{Bb \text{ cof. } \alpha}$;

donc $Bk = \frac{Aa(b \text{ cof. } \alpha - a)}{Bb}$, $1 : \text{cof. } \alpha :: cd : dk = \frac{(Bb - Aa \text{ cof. } \alpha)(b \text{ cof. } \alpha - a)}{Bb \text{ ſin. } \alpha}$; donc $kv = \frac{Aa \text{ cof. } \alpha (b \text{ cof. } \alpha - a)}{Bb \text{ ſin. } \alpha}$;

On aura $Be : Bl :: kv : Bk - Bl$; donc $Bl = \frac{Aa(b \text{ cof. } \alpha - a)}{Aa \text{ cof. } \alpha + Bb}$,

$el = \frac{b \text{ cof. } \alpha - a}{(Aa \text{ cof. } \alpha + Bb) \text{ ſin. } \alpha} \cdot \sqrt{(A^2a^2 + 2AaBb \text{ cof. } \alpha + B^2b^2)}$;

donc $ev = \frac{b\cos.\alpha - a}{Bb\sin.\alpha}.\sqrt{(A^2a^2 + 2AaBb\cos.\alpha + B^2b^2)}$;

donc la force dans la direction $ev = \sqrt{(A^2a^2 + 2AaBb\cos.\alpha + B^2b^2)}.v$.

Du point O soit menée à ev la perpendiculaire $ON = n$, & soit N un point massif tel que $Nn = \sqrt{(A^2a^2 + 2AaBb\cos.\alpha + B^2b^2)}$, on aura $el : eB :: Ol : n = \frac{Aa^2 + Bb^2}{\sqrt{(A^2a^2 + 2AaBb\cos.\alpha + B^2b^2)}}$;

donc $N = \frac{A^2a^2 + 2AaBb\cos.\alpha + B^2b^2}{Aa^2 + Bb^2}$.

Soit l'angle $AON = \nu$,

on aura $\sin.\nu = \frac{Bb\sin.\alpha}{\sqrt{(A^2a^2 + 2AaBb\cos.\alpha + B^2b^2)}}$,

$\cos.\nu = \frac{Aa + Bb\cos.\alpha}{\sqrt{(A^2a^2 + 2AaBb\cos.\alpha + B^2b^2)}}$.

Le point N est le centre de force de l'espace AOB par rapport à l'axe O.

La ligne ON passe par le centre de force G de l'espace AOB par rapport à un axe infiniment distant, & par conséquent aussi par son centre d'inertie M par rapport à l'axe O. Pour le démontrer, je mène à OA les perpendiculaires Gg, Bh; on aura $Bh = b\sin.\alpha$, $Oh = b\cos.\alpha$; donc $Ah = b\cos.\alpha - a$; on aura $\cos.\nu : \sin.\nu :: a + Ag : Gg = \frac{a\sin.\nu}{\cos.\nu} + \frac{\sin.\nu}{\cos.\nu}Ag$, $\cos.\nu : 1 :: a + Ag : OG = \frac{q + Ag}{\cos.\nu}$; on aura $Ah : hB :: Ag :: gG = \frac{b\sin.\alpha}{b\cos.\alpha - a}.Ag$.

En égalant les deux valeurs de gG, on aura

$\frac{aBb\sin.\alpha}{Aa + Bb\cos.\alpha} + \frac{Bb\sin.\alpha}{Aa + Bb\cos.\alpha}Ag = \frac{b\sin.\alpha}{b\cos.\alpha - a}Ag$;

donc $Ag = \frac{B(b\cos.\alpha - a)}{A + B}$, $Gg = \frac{Bb\sin.\alpha}{A + B}$,

$OG = \frac{\sqrt{(A^2a^2 + 2AaBb\cos.\alpha + B^2b^2)}}{A + B}$.

On aura $GA : GB :: Ag : gh :: Ag : Ah - Ag :: \frac{B(b\cos.\alpha - a)}{A+B} : b\cos.\alpha - a - \frac{B(b\cos.\alpha - a)}{A+B} :: B : A.$

Soit $G = A + B$, & $OG = g$,

on aura $\sqrt{(A^2a^2 + 2AaBb\cos.\alpha + B^2b^2)} = Gg$;

donc $N = \frac{G^2g^2}{Aa^2 + Bb^2}$ & $n = \frac{Aa^2 + Bb^2}{Gg}$.

Si le plan eſt doué de trois points maſſifs A, B, C, l'on déterminera le centre de force N' des points maſſifs N & C, comme on vient de déterminer le centre de force N des points maſſifs A, B.

Soit $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $AOB = \alpha$, $AOC = \alpha'$, $BOC = \alpha' - \alpha = \zeta$, $ON = n$, $AON = \nu$, $ON' = n'$, $AON' = \nu'$, on aura

$$N' = \frac{A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2 + 2AaBb\cos.\alpha + 2AaCc\cos.\alpha' + 2BbCc\cos.\zeta}{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2},$$

$$n' = \frac{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2}{\sqrt{(A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2 + 2AaBb\cos.\alpha + 2AaCc\cos.\alpha' + 2BbCc\cos.\zeta)}};$$

$$\text{ſin. } \nu' = \frac{Bb\,\text{ſin.}\,\alpha + Cc\,\text{ſin.}\,\alpha'}{\sqrt{(A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2 + 2AaBb\cos.\alpha + 2AaCc\cos.\alpha' + 2BbCc\cos.\zeta)}},$$

$$\text{coſ. } \nu' = \frac{Aa + Bb\cos.\alpha + Cc\cos.\alpha'}{\sqrt{(A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2 + 2AaBb\cos.\alpha + 2AaCc\cos.\alpha' + 2BbCc\cos.\zeta)}},$$

Soit G' le centre de force des points maſſifs A, B, C, ou, ce qui revient au même, des points maſſifs G & C, par rapport à un axe infiniment diſtant, & ſoit $G' = A + B + C$, $OG' = g'$, en ſubſtituant pour A, a, B, b, α, les valeurs ſuivantes, $A + B$, $\frac{\sqrt{(A^2a^2 + 2AaBb\cos.\alpha + B^2b^2)}}{A+B}$, C, c, $\alpha' - \nu$, l'on trouvera

$$g' = \frac{\sqrt{(A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2 + 2AaBb\cos.\alpha + 2AaCc\cos.\alpha' + 2BbCc\cos.\zeta)}}{A+B+C},$$

ſin. $AOG' =$ ſin. ν', coſ. $AOG' =$ coſ. ν'; d'où l'on

conclurra que la ligne ON' paſſe par le centre de force G' des points maſſifs A, B, C, & que $N' = \frac{G'^2 g'^2}{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2}$, $n' = \frac{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2}{G' g'}$.

Si le plan eſt doué de quatre points maſſifs A, B, C, D, l'on déterminera le centre de force N'' des points maſſifs N' & D, comme on a déterminé le centre de force N des points maſſifs A, B.

Soit $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $OD = d$, $AOB = \alpha$, $AOC = \alpha'$, $AOD = \alpha''$, $BOC = \mathfrak{C}$, $BOD = \mathfrak{C}'$, $COD = \gamma$, $ON = n$, $ON' = n'$, $ON'' = n''$, $AON = \nu$, $AON' = \nu'$, $AON'' = \nu''$, on aura $N'' = \frac{A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2 + D^2d^2 + 2AaBb \text{ cof. } \alpha + 2AaCc \text{ cof. } \alpha' + 2AaDd \text{ cof. } \alpha'' + 2Bb Cc \text{ cof. } \mathfrak{C} + 2Bb Dd \text{ cof. } \mathfrak{C}' + 2Cc Dd \text{ cof. } \gamma}{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + Dd^2}$, $n'' = \frac{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + Dd^2}{\sqrt{(A^2a^2 + \&c.)}}$,

$\text{ſin. } \nu'' = \frac{Bb \text{ ſin. } \alpha + Cc \text{ ſin. } \alpha' + Dd \text{ ſin. } \alpha''}{\sqrt{(A^2a^2 + \&c.)}}$,

$\text{cof. } \nu'' = \frac{Aa + Bb \text{ cof. } \alpha + Cc \text{ cof. } \alpha' + Dd \text{ cof. } \alpha''}{\sqrt{(A^2a^2 + \&c.)}}$,

$G'' = A + B + C + D$, $g'' = \frac{\sqrt{(A^2a^2 + \&c.)}}{G''}$,

$\text{ſin. } AOG'' = \text{ſin. } \nu''$, $\text{cof. } AOG'' = \text{cof. } \nu''$; donc $N'' = \frac{G''^2 g''^2}{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + Dd^2}$, $n'' = \frac{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + Dd^2}{G'' g''}$.

Si c'eſt un eſpace ſolide, roide, dénué d'inertie, & doué de points maſſifs, qui tourne autour de l'axe O, l'on projètera tous les points maſſifs dont cet eſpace ſera doué ſur le plan perpendiculaire à l'axe qui paſſe par ſon centre de force par rapport à un axe infiniment diſtant; après quoi, l'on déterminera le centre de force de ce plan par rapport à l'axe O.

XIII.

Soit AOB *(fig. 28)* un espace plan roide, dénué d'inertie, & doué de deux points massifs A, B, se mouvant librement dans le plan AOB autour de l'axe O perpendiculaire à ce plan. Soit $OA = a$, $OB = b$, l'angle $AOB = \alpha$, la vîtesse angulaire de $AOB = V$; la vîtesse de A autour de O sera $= aV$, & la force centrifuge de A sera $= AaV^2$; la vîtesse de B sera $= bV$, & sa force centrifuge sera $= BbV^2$. Soit $OA : Oe :: Aa : Bb$, on aura $Oe = \frac{Bb}{A}$.

OA & Oe étant les directions & les mesures des forces centrifuges de A & de B, la diagonale Of du parallèlogramme $AOef$ sera la direction & la mesure de la force résultante de ces deux forces; on aura $1 : \text{sin. } \alpha :: Af : hf = \frac{Bb}{A} \text{ sin. } \alpha$, $1 : \text{cos. } \alpha :: Af : Ah = \frac{Bb}{A} \text{ cos. } \alpha$; donc $Oh = \frac{Aa + Bb \text{ cos. } \alpha}{A}$, $Of = \frac{\sqrt{(A^2a^2 + 2AaBb \text{ cos. } \alpha + B^2b^2)}}{A}$, & la force dans la direction $Of = \sqrt{(A^2a^2 + 2AaBb \text{ cos. } \alpha + B^2b^2)} \cdot V^2$; on aura $Of : hf :: 1 : \text{sin. } AOf = \frac{Bb \text{ sin. } \alpha}{\sqrt{(A^2a^2 + 2AaBb \text{ cos. } \alpha + B^2b^2)}}$, $Of : Oh :: 1 : \text{cos. } AOf = \frac{Aa + Bb \text{ cos. } \alpha}{\sqrt{(A^2a^2 + 2AaBb \text{ cos. } \alpha + B^2b^2)}}$.

La ligne Of passe par le centre de force G de la ligne AB, & en faisant $G = A + B$, $OG = g$, on aura la force dans la direction $Of = GgV^2$.

XIV.

Soit AOB *(fig. 29)* un espace plan roide, dénué d'inertie, & doué de deux points massifs A, B, se mouvant librement dans le plan AOB autour de l'axe O perpendiculaire à ce plan. Je suppose que tout-à-coup l'axe O vienne à manquer, & qu'au

qu'au même instant on lui en substitue un autre au point O' parallèle au premier.

Soit $OA = a$, $OB = b$, l'angle $AOB = \alpha$, la vîtesse angulaire de $AOB = V$; & soit $OO' = x$, l'angle $AOO' = \xi$, l'angle BOO' sera $= \alpha - \xi$.

Je mène à OA, OB les perpendiculaires $O'e$, $O'f$; j'aurai $1 : \text{sin.}\ \xi :: x : O'e = x \text{ sin.}\ \xi$, $1 : \text{cos.}\ \xi :: x : Oe = x \text{ cos.}\ \xi$; donc $Ae = a - x \text{ cos.}\ \xi$, & $O'A = \sqrt{(a^2 - 2ax \text{ cos.}\ \xi + x^2)}$. J'aurai $1 : \text{sin.}\ (\alpha - \xi) :: x : O'f = x \text{ sin.}\ (\alpha - \xi)$, $1 : \text{cos.}\ (\alpha - \xi) :: x : Of = x \text{ cos.}\ (\alpha - \xi)$; donc $Bf = b - x \text{ cos.}\ (\alpha - \xi)$, & $O'B = \sqrt{(b^2 - 2bx \text{ cos.}\ (\alpha - \xi) + x^2)}$.

Si le point massif A étoit seul, sa vîtesse dans la direction $A\alpha$ perpendiculaire à OA, étant $= aV$, dans la direction Ar perpendiculaire à $O'A$, elle seroit $= \frac{(a - x \text{ cos.}\ \xi)\, aV}{\sqrt{(a^2 - 2ax \text{ cos.}\ \xi + x^2)}}$; & par conséquent, la vîtesse angulaire de $O'A$ seroit $= \frac{(a - x \text{ cos.}\ \xi)\, aV}{a^2 - 2ax \text{ cos.}\ \xi + x^2}$.

Si le point massif B étoit seul, sa vîtesse dans la direction $B\zeta$ perpendiculaire à OB, étant $= bV$, dans la direction Bs perpendiculaire à $O'B$, elle seroit $= \frac{[b - x \text{ cos.}\ (\alpha - \xi)]\, bV}{\sqrt{[b^2 - 2bx \text{ cos.}\ (\alpha - \xi) + x^2]}}$; & par conséquent, la vîtesse angulaire de $O'B$ seroit $= \frac{[b - x \text{ cos.}\ (\alpha - \xi)]\, bV}{b^2 - 2bx \text{ cos.}\ (\alpha - \xi) + x^2}$. Mais à cause de l'incompatibilité entre les états de ces deux lignes, je suppose que la vîtesse angulaire de OA sera $= \frac{(a - x \text{ cos.}\ \xi)\, aV}{a^2 - 2ax \text{ cos.}\ \xi + x^2} + e$, que celle de $O'B$ sera $= \frac{[b - x \text{ cos.}\ (\alpha - \xi)]\, bV}{b^2 - 2bx \text{ cos.}\ (\alpha - \xi) + x^2} + f$, & que celle de

$AO'B$ sera $= W$; on aura $\frac{(a - x\cos.\xi)aV}{a^2 - 2ax\cos.\xi + x^2} + e = W$,

& $\frac{[b - x\cos.(\alpha - \xi)]bV}{b^2 - 2bx\cos.(\alpha - \xi) + x^2} + f = W$.

D'ailleurs la force de $O'A$, pour n'être pas à une distance e de son état, est $= A(a^2 - 2ax\cos.\xi + x^2)e$; celle de $O'B$, pour n'être pas à une distance f du sien, est $= B[b^2 - 2bx\cos.(\alpha - \xi) + x^2]f$.

Ces deux forces se vaincront mutuellement, ou seront en équilibre; par conséquent on aura $A(a^2 - 2ax\cos.\xi + x^2)e + B[b^2 - 2bx\cos.(\alpha - \xi) + x^2]f = 0$, ou

$A(a^2 - 2ax\cos.\xi + x^2)\left(W - \frac{(a - x\cos.\xi)aV}{a^2 - 2ax\cos.\xi + x^2}\right) +$

$B[b^2 - 2bx\cos.(\alpha - \xi) + x^2]\left(W - \frac{[b - x\cos.(\alpha - \xi)]}{b^2 - 2bx\cos.(\alpha - \xi) + x^2}\right) = 0$;

donc $W = \frac{(a - x\cos.\xi)AaV + [b - x\cos.(\alpha - \xi)]BbV}{A(a^2 - 2ax\cos.\xi + x^2) + B[b^2 - 2bx\cos.(\alpha - \xi) + x^2]}$.

Si l'on veut que le point O' soit placé de façon que $W = 0$, on aura $(a - x\cos.\xi)Aa + [b - x\cos.(\alpha - \xi)]Bb = 0$; donc $x = \frac{Aa^2 + Bb^2}{Aa\cos.\xi + Bb\cos.\alpha\cos.\xi + Bb\sin.\alpha\sin.\xi}$, & l'on trouvera que N étant le centre de force de l'espace AOB, le lieu du point O' sera dans la ligne droite qui coupe perpendiculairement la ligne ON au point N, comme nous le savions.

XV.

Soit AOB (*fig. 30*) une ligne roide, dénuée d'inertie, & douée de deux points massifs A, B, se mouvant librement dans le plan OAa autour de l'axe O perpendiculaire à ce plan. Je suppose que tout-à-coup le point massif B cesse d'être retenu par l'axe O, & qu'il continue d'être emporté par la ligne OAB.

Soit $OA = a$, $OB = b$, la vîteſſe angulaire de $OAB = \alpha$. Je ſuppoſe qu'après un temps quelconque le point maſſif B ſoit en B'.

Soit $OB' = x$, la vîteſſe angulaire de $OAB' = v$, la vîteſſe de B' le long de $OB' = u$; la vîteſſe de B' autour de O' ſera $= xv$, la force centrifuge de $B' = xv^2$; on aura $xv^2 = \frac{u^2}{(\frac{x}{u})}$ & $(Aa^2 + Bx^2)v = (Aa^2 + Bb^2)\alpha$.

XVI.

Soit AOB *(fig. 31)* un eſpace plan roide, dénué d'inertie, & doué de deux points maſſifs A, B, ſe mouvant librement en vertu de la peſanteur des points maſſifs A, B dans le plan vertical AOB autour de l'axe O perpendiculaire à ce plan. Soit $OA = a$, $OB = b$, l'angle $AOB = \alpha$, la force qui accélère les corps verticalement $= 1$; je mène l'horizontale Oa, & je fais l'angle $aOA = x$; l'angle aOB ſera $= \alpha + x$.

1.° Si le point maſſif A étoit ſeul, la force qui l'accélèreroit autour de l'axe O ſeroit $=$ cof. x, & par conſéquent, la force qui accélèreroit la ligne OA ſeroit $= \frac{\text{cof. } x}{a}$. Si le point maſſif B étoit ſeul, la force qui l'accélèreroit autour de O ſeroit $=$ cof. $(\alpha + x) =$ cof. α cof. $x -$ ſin. α ſin. x, & par conſéquent la force qui accélèreroit la ligne OB, ſeroit $= \frac{\text{cof. } \alpha \text{ cof. } x - \text{ſin. } \alpha \text{ ſin. } x}{b}$.

Mais à cauſe de la roideur de l'eſpace AOB, je ſuppoſe que la force qui accélérera OA, eſt $= \frac{\text{cof. } x}{a} + e$, que celle qui accélérera $OB = \frac{\text{cof. } \alpha \text{ cof. } x - \text{ſin. } \alpha \text{ ſin } x}{b} + f$,

& que celle qui accélérera le plan $AOB = \varphi$, on aura $\frac{\text{cos. } x}{a} + e = \varphi$, $\frac{\text{cos. } \alpha \text{ cos. } x - \text{sin. } \alpha \text{ sin. } x}{b} + f = \varphi$.

D'ailleurs, la force de OA, pour n'être pas à une distance e de son état, est $= Aa^2 e$; celle de OB, pour n'être pas à une distance f du sien, est $= Bb^2 f$.

Ces deux forces se vaincront mutuellement, ou seront en équilibre; par conséquent, on aura $Aa^2 e + Bb^2 f = 0$, ou $Aa^2(\varphi - \frac{\text{cos. } x}{a}) + Bb^2(\varphi - \frac{\text{cos. } \alpha \text{ cos. } x - \text{sin. } \alpha \text{ sin. } x}{b}) = 0$; donc $\varphi = \frac{Aa \text{ cos. } x + Bb \text{ cos. } \alpha \text{ cos. } x - Bb \text{ sin. } \alpha \text{ sin. } x}{Aa^2 + Bb^2}$.

2.° Trouver le point P, dont la vitesse est à tout instant la même que si, les points A, B n'étant pas des points massifs, il étoit un point massif.

Soit $OP = p$, l'angle $AOP = \pi$, l'angle aOP sera $= \pi + x$, la force qui accéléreroit P autour de $O = \text{cos. } (\pi + x) = \text{cos. } \pi \text{ cos. } x - \text{sin. } \pi \text{ sin. } x$, & par conséquent celle qui accéléreroit la ligne $OP = \frac{\text{cos. } \pi \text{ cos. } x - \text{sin. } \pi \text{ sin. } x}{p}$; on aura donc $\frac{\text{cos. } \pi \text{ cos. } x - \text{sin. } \pi \text{ sin. } x}{p} = \frac{Aa \text{ cos. } x + Bb \text{ cos. } \alpha \text{ cos. } x - Bb \text{ sin. } \alpha \text{ sin. } x}{Aa^2 + Bb^2}$.

Pour que ce problème-ci soit possible, il faut que p & π soient indépendans de x, c'est-à-dire, qu'ils ne varient point pendant que x variera. Pour remplir cette condition, je différencie l'équation précédente, & j'ai $\frac{-\text{cos. } \pi \text{ sin. } x - \text{sin. } \pi \text{ cos. } x}{p} = \frac{-Aa \text{ sin. } x - Bb \text{ cos. } \alpha \text{ sin. } x - Bb \text{ sin. } \alpha \text{ cos. } x}{Aa^2 + Bb^2}$. En égalant les deux valeurs de $\frac{1}{p}$, j'aurai $\frac{Aa \text{ cos. } x + Bb \text{ cos. } \alpha \text{ cos. } x - Bb \text{ sin. } \alpha \text{ sin. } x}{\text{cos. } \pi \text{ cos. } x - \text{sin. } \pi \text{ sin. } x} = \frac{Aa \text{ sin. } x + Bb \text{ cos. } \alpha \text{ sin. } x + Bb \text{ sin. } \alpha \text{ cos. } x}{\text{cos. } \pi \text{ sin. } x + \text{sin. } \pi \text{ cos. } x}$;

d'où je tirerai $\text{cof. } \pi = \frac{Aa + Bb \text{ cof. } \alpha}{Bb \text{ fin. } \alpha} \text{ fin. } \pi$, & en ſubſtituant cette valeur de $\text{cof. } \pi$ dans l'une des valeurs de $\frac{1}{p}$, j'aurai $p = \frac{Aa^2 + Bb^2}{Bb \text{ fin. } \alpha} \text{ fin. } \pi$.

Donc enfin $\text{fin. } \pi = \frac{Bb \text{ fin. } \alpha}{\sqrt{(A^2a^2 + 2AaBb \text{ cof. } \alpha + B^2b^2)}}$,

$$\text{cof. } \pi = \frac{Aa + Bb \text{ cof. } \alpha}{\sqrt{(A^2a^2 + 2AaBb \text{ cof. } \alpha + B^2b^2)}},$$

$$p = \frac{Aa^2 + Bb^2}{\sqrt{(A^2a^2 + 2AaBb \text{ cof. } \alpha + B^2b^2)}}.$$

Si le plan eſt doué de trois points maſſifs A, B, C, je fais $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $AOB = \alpha$, $AOC = \alpha'$, $BOC = \alpha' - \alpha = \beta$, & menant l'horizontale Oa, je fais l'angle $aOA = x$, l'angle aOB ſera $= \alpha + x$, l'angle $aOC = \alpha' + x$.

Si le point maſſif A étoit ſeul, la force qui l'accéléreroit autour de O ſeroit $= \text{cof. } x$, & par conſéquent celle qui accéléreroit la ligne OA ſeroit $= \frac{\text{cof. } x}{a}$.

Si le point B étoit ſeul, la force qui l'accéléreroit autour de O ſeroit $= \text{cof. } (\alpha + x)$, & par conſéquent celle qui accéléreroit la ligne OB ſeroit $= \frac{\text{cof. } \alpha \text{ cof. } x - \text{fin. } \alpha \text{ fin. } x}{b}$.

Enfin ſi le point maſſif C étoit ſeul, la force qui l'accéléreroit autour de O ſeroit $= \text{cof. } (\alpha' + x)$, & par conſéquent celle qui accéléreroit la ligne OC ſeroit $= \frac{\text{cof. } \alpha' \text{ cof. } x - \text{fin. } \alpha' \text{ fin. } x}{c}$.

Soit la force qui accélérera $OA = \frac{\text{cof. } x}{a} + e$, celle qui accélérera $OB = \frac{\text{cof. } \alpha \text{ cof. } x - \text{fin. } \alpha \text{ fin. } x}{b} + f$, celle qui

accélérera $OC = \frac{\text{cof. } \alpha' \text{ cof. } x - \text{ fin. } \alpha' \text{ fin. } x}{c} + h$, & celle qui accélérera le plan $= \varphi$;

on aura $\frac{\text{cof. } x}{a} + e = \varphi$, $\frac{\text{cof. } \alpha \text{ cof. } x - \text{ fin. } \alpha \text{ fin. } x}{b} + f = \varphi$, $\frac{\text{cof. } \alpha' \text{ cof. } x - \text{ fin. } \alpha' \text{ fin. } x}{c} + h = \varphi$.

D'ailleurs, la force de OA, pour n'être pas à une distance e de son état, est $= Aa^2e$; celle de OB, pour n'être pas à une distance f du sien, est $= Bb^2f$, & celle de OC, pour n'être pas à une distance h du sien, est $= Cc^2h$. Ces trois forces se vaincront mutuellement, ou feront en équilibre; par conséquent, on aura $Aa^2e + Bb^2f + Cc^2h = 0$, ou $Aa^2(\varphi - \frac{\text{cof. } x}{a}) + Bb^2(\varphi - \frac{\text{cof. } \alpha \text{ cof. } x - \text{ fin. } \alpha \text{ fin. } x}{b}) + Cc^2(\varphi - \frac{\text{cof. } \alpha' \text{ cof. } x - \text{ fin. } \alpha' \text{ fin. } x}{c}) = 0$; donc $\varphi = \frac{Aa \text{ cof. } x + Bb \text{ cof. } \alpha \text{ cof. } x - Bb \text{ fin. } \alpha \text{ fin. } x + Cc \text{ cof. } \alpha' \text{ cof. } x - Cc \text{ fin. } \alpha' \text{ fin. } x}{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2}$.

Trouver le point P, dont la vîtesse est à tout instant la même que si les points A, B, C, n'étant pas des points massifs, il étoit un point massif.

Soit $OP = p$, l'angle $AOP = \pi$, l'angle aOP sera $= \pi + x$; la force qui accéléreroit P autour de O, est $= \text{cof. } (\pi + x)$, & par conséquent la force qui accéléreroit $OP = \frac{\text{cof. } \pi \text{ cof. } x - \text{ fin. } \pi \text{ fin. } x}{p}$;

on aura $\frac{\text{cof. } \pi \text{ cof. } x - \text{ fin. } \pi \text{ fin. } x}{p} = \frac{Aa \text{ cof. } x + Bb \text{ cof. } \alpha \text{ cof. } x - Bb \text{ fin. } \alpha \text{ fin. } x + Cc \text{ cof. } \alpha' \text{ cof. } x - Cc \text{ fin. } \alpha' \text{ fin. } x}{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2}$. En différenciant, & ne faisant varier que x, on aura $\frac{-\text{ cof. } \pi \text{ fin. } x - \text{ fin. } \pi \text{ cof. } x}{p} = \frac{-Aa \text{ fin. } x - Bb \text{ cof. } \alpha \text{ fin. } x - Bb \text{ fin. } \alpha \text{ cof. } x - Cc \text{ cof. } \alpha' \text{ fin. } x - Cc \text{ fin. } \alpha' \text{ cof. } x}{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2}$

En égalant les deux valeurs de $\frac{1}{p}$, on aura

$$\frac{Aa\cos.x + Bb\cos.\alpha\cos.x - Bb\sin.\alpha\sin.x + Cc\cos.\alpha'\cos.x - Cc\sin.\alpha'\sin.x}{\cos.\pi\cos.x - \sin.\pi\sin.x} =$$
$$\frac{Aa\sin.x + Bb\cos.\alpha\sin.x + Bb\sin.\alpha\cos.x + Cc\cos.\alpha'\sin.x + Cc\sin.\alpha'\cos.x}{\cos.\pi\sin.x + \sin.\pi\cos.x},$$

d'où l'on tirera $\cos.\pi = \frac{Aa + Bb\cos.\alpha + Cc\cos.\alpha'}{Bb\sin.\alpha + Cc\sin.\alpha'}\sin.\pi$;

& en substituant cette valeur de $\cos.\pi$ dans l'une des valeurs de $\frac{1}{p}$, on aura $p = \frac{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2}{Bb\sin.\alpha + Cc\sin.\alpha'}\sin.\pi$. Donc enfin

$$\sin.\pi = \frac{Bb\sin.\alpha + Cc\sin.\alpha'}{\sqrt{(A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2 + 2AaBb\cos.\alpha + 2AaCc\cos.\alpha' + 2BbCc\cos.\mathcal{C})}},$$

$$\cos.\pi = \frac{Aa + Bb\cos.\alpha + Cc\cos.\alpha'}{\sqrt{(A^2a^2 + \&c.)}},\quad p = \frac{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2}{\sqrt{(A^2a^2 + \&c.)}}.$$

Si le plan est doué de quatre points massifs A, B, C, D, en faisant $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $OD = d$, $AOB = \alpha$, $AOC = \alpha'$, $AOD = \alpha''$, $BOC = \mathcal{C}$, $BOD = \mathcal{C}'$, $COD = \gamma$, $OP = p$, $AOP = \pi$, on aura

$$\sin.\pi = \frac{Bb\sin.\alpha + Cc\sin.\alpha' + Dd\sin.\alpha''}{\sqrt{(A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2 + D^2d^2 + 2AaBb\cos.\alpha + 2AaCc\cos.\alpha' + 2AaDd\cos.\alpha'' + 2BbCc\cos.\mathcal{C} + 2BbDd\cos.\mathcal{C}' + 2CcDd\cos.\gamma)}},$$

$$\cos.\pi = \frac{Aa + Bb\cos.\alpha + Cc\cos.\alpha' + Dd\cos.\alpha''}{\sqrt{(A^2a^2 + \&c.)}},$$

$$p = \frac{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + Dd^2}{\sqrt{(A^2a^2 + \&c.)}}.$$

Le point P se nomme le centre d'oscillation de l'espace AOB, & l'on voit qu'il est le même que le centre de force N de ce même espace.

XVII.

Un espace plan roide PON *(fig. 32)* dénué d'inertie & doué de points massifs, se meut dans le plan PON autour de

l'axe O perpendiculaire à ce plan, & cet espace reçoit un coup au point P dans la direction Pp.

Soit N le point & la particule massive dont la force est le résultat des forces de tous les points massifs dont l'espace PON est doué.

Je mène PT perpendiculaire à Pp que je suppose qui rencontre la ligne NO au point T.

Je fais $ON = n$, $OP = p$, l'angle $OPT = \pi$, $OTP = \theta$, $PON = \alpha$, le coup que reçoit l'espace $PON = C$, la vîtesse angulaire de cet espace avant de recevoir ce coup $= V$, sa vîtesse angulaire après l'avoir reçû $= V + v$. Le coup C peut être regardé comme étant le résultat de deux autres coups, l'un dans la direction PO, & l'autre dans la direction PB perpendiculaire à PO; on aura le coup dans la direction $PO = C$ sin. π, celui dans la direction $PB = C$ cos. π. On aura pC cos. $\pi = Nn^2v$; donc $v = \frac{pC \text{ cos. } \pi}{Nn^2}$.

La force de N dans la direction Nv perpendiculaire à ON est $= Nnv = \frac{pC \text{ cos. } \pi}{n}$.

Soit D le point d'intersection des directions Nv, PB, & soit prise sur PD prolongée $DE : DN$ comme la force dans la direction PB à la force dans la direction Nv, c'est-à-dire, $DE : DN :: C$ cos. $\pi : \frac{pC \text{ cos. } \pi}{n} :: n : p$.

DE & DN étant les directions & les mesures des forces de P & de N, la diagonale DF du parallélogramme $NDEF$ sera la direction & la mesure de la force résultante de ces deux forces; on aura cos. α : sin. $\alpha :: p : PB = \frac{p \text{ sin. } \alpha}{\text{cos. } \alpha}$, cos. $\alpha : 1 :: p : OB = \frac{p}{\text{cos. } \alpha}$; donc $BN = \frac{n \text{ cos. } \alpha - p}{\text{cos. } \alpha}$.

On

On aura $\text{sin.}\,\alpha : \text{cos.}\,\alpha :: BN : DN = \frac{n\,\text{cos.}\,\alpha - p}{\text{sin.}\,\alpha}$; donc $DE = \frac{n(n\,\text{cos}\,\alpha - p)}{p\,\text{sin.}\,\alpha}$, $\text{sin.}\,\alpha : 1 :: BN : BD = \frac{n\,\text{cos.}\,\alpha - p}{\text{sin.}\,\alpha\,\text{cos.}\,\alpha}$; donc $BE = \frac{n^2(\text{cos.}\,\alpha)^2 - p^2}{p\,\text{sin.}\,\alpha\,\text{cos.}\,\alpha}$.

On aura $1 : \text{sin.}\,\alpha :: BE : BH = \frac{n^2(\text{cos.}\,\alpha)^2 - p^2}{p\,\text{cos.}\,\alpha}$; donc NH ou $DG = \frac{n(n\,\text{cos.}\,\alpha - p)}{p}$, $1 : \text{cos.}\,\alpha :: BE : 2DN + GF$; donc $GF = \frac{(n\,\text{cos.}\,\alpha - p)^2}{p\,\text{sin.}\,\alpha}$, $DF = \frac{n\,\text{cos.}\,\alpha - p}{p\,\text{sin.}\,\alpha}\sqrt{(n^2 - 2np\,\text{cos.}\,\alpha + p^2)}$, & le coup dans la direction $DF = \frac{C\,\text{cos.}\,\pi}{n}\sqrt{(n^2 - 2np\,\text{cos.}\,\alpha + p^2)}$. L'on trouvera que $FG : GD :: DN : NO$, & que par conſéquent la direction DF paſſe par l'axe O; on aura $OD = \frac{\sqrt{(n^2 - 2np\,\text{cos.}\,\alpha + p^2)}}{\text{sin.}\,\alpha}$; donc $\text{sin.}\,POD = \frac{n - p\,\text{cos.}\,\alpha}{\sqrt{(n^2 - 2np\,\text{cos.}\,\alpha + p^2)}}$, $\text{cos.}\,POD = \frac{p\,\text{sin.}\,\alpha}{\sqrt{(n^2 - 2np\,\text{cos.}\,\alpha + p^2)}}$.

Soit priſe ſur PO prolongée $OK : OD$ comme le coup que reçoit l'axe O dans la direction PO au coup qu'il reçoit dans la direction OD, la diagonale OL du parallélogramme $OKLD$ ſera la direction & la meſure du coup réſultant de ces deux coups; on aura $OK = \frac{n\,\text{sin.}\,\pi}{\text{cos.}\,\pi\,\text{sin.}\,\alpha}$.

Du point L je mène à OD la perpendiculaire LI, on aura $1 : \text{sin.}\,POD :: OK : LI = \frac{n\,\text{sin.}\,\pi\,(n - p\,\text{cos.}\,\alpha)}{\text{cos.}\,\pi\,\text{sin.}\,\alpha\,\sqrt{(n^2 - 2np\,\text{cos.}\,\alpha + p^2)}}$, $1 : \text{cos.}\,POD :: LD : DI = \frac{np\,\text{sin.}\,\pi}{\text{cos.}\,\pi\,\sqrt{(n^2 - 2np\,\text{cos.}\,\alpha + p^2)}}$; donc $OI = \frac{\text{cos.}\,\pi\,(n^2 - 2np\,\text{cos.}\,\alpha + p^2) - np\,\text{sin.}\,\pi\,\text{sin.}\,\alpha}{\text{cos.}\,\pi\,\text{sin.}\,\alpha\,\sqrt{(n^2 - 2np\,\text{cos.}\,\alpha + p^2)}}$,

$$OL = \frac{\sqrt{[n^2 - 2np\cos.\pi(\cos.\pi\cos.\alpha + \sin.\pi\sin.\alpha) + p^2(\cos.\pi)^2]}}{\cos.\pi\sin.\alpha}$$

$$= \frac{\sqrt{[n^2 - 2np\cos.\pi\cos.\theta + p^2(\cos.\pi)^2]}}{\cos.\pi\sin.\alpha}$$, le coup dans la direction $OL = \frac{\sqrt{[n^2 - 2np\cos.\pi\cos.\theta + p^2(\cos.\pi)^2]}}{n}.C$; le sinus de l'angle $POL = \frac{\cos.\pi(n - p\cos.\alpha)}{\sqrt{[n^2 - 2np\cos.\pi\cos.\theta + p^2(\cos.\pi)^2]}}$, le cosinus de cet angle $= \frac{p\cos.\pi\sin.\alpha - n\sin.\pi}{\sqrt{[n^2 - 2np\cos.\pi\cos.\theta + p^2(\cos.\pi)^2]}}$.

Si l'espace PON n'est doué que de deux points massifs A, B, dont les distances à l'axe soient a, b, & si la ligne AB, qui joint ces deux points, passe par l'axe, on aura $n = \frac{Aa^2 + Bb^2}{Aa + Bb}$; le coup dans la direction OL sera $= \frac{\sqrt{[(Aa^2 + Bb^2)^2 - 2p(Aa^2 + Bb^2)(Aa + Bb)\cos.\pi\cos.\theta + p^2(Aa + Bb)^2(\cos.\pi)^2]}}{Aa^2 + Bb^2}.C$, le sinus de l'angle POL sera $=$

$$\frac{\cos.\pi[Aa^2 + Bb^2 - p(Aa + Bb)\cos.\alpha]}{\sqrt{[(Aa^2 + Bb^2)^2 - 2p(Aa^2 + Bb^2)(Aa + Bb)\cos.\pi\cos.\theta + p^2(Aa + Bb)^2(\cos.\pi)^2]}},$$

& le cosinus de cet angle sera $=$

$$\frac{p(Aa + Bb)\cos.\pi\sin.\alpha - (Aa^2 + Bb^2)\sin.\pi}{\sqrt{[(Aa^2 + Bb^2)^2 - 2p(Aa^2 + Bb^2)(Aa + Bb)\cos.\pi\cos.\theta + p^2(Aa + Bb)^2(\cos.\pi)^2]}}.$$

Je suppose b négatif, ou que l'axe O est entre les points massifs A, B, & je suppose de plus que le point O est le centre de force des points massifs A, B, par rapport à un axe infiniment distant, on aura $Aa - Bb = 0$, & le coup dans la direction OL sera $= C$; le sinus de l'angle POL sera $= \cos.\pi$, le cosinus de cet angle sera $= -\sin.\pi$, c'est-à-dire, que OL sera parallèle à la direction Pp du coup C.

XVIII.

Je suppose un corps B (*fig. 33*) se mouvant dans l'espace avec une vîtesse & dans une direction données, & qu'une boule A vienne frapper ce corps au point P dans la direction

Pp perpendiculaire à ſa ſurface ou au plan Tt tangent de cette ſurface au point P.

Soit O le centre de force du corps B par rapport à un axe infiniment diſtant, je mène PO que je prolonge indéfiniment de part & d'autre du point O, & je mène OT parallèle à Pp.

De chaque point maſſif du corps B je mène au plan OPp une perpendiculaire, & anéantiſſant par la penſée ce point maſſif, je le conçois en même temps reproduit au point où cette perpendiculaire rencontre le plan OPp; & de cette manière, je réduis le corps B à ce ſeul plan.

Ce plan eſt partagé en deux par la ligne indéfinie OP. Soit E le centre de force de tous les points maſſifs qui ſont du côté de p, & F celui de tous les points maſſifs qui ſont du côté de T par rapport à l'axe O perpendiculaire au plan $OTPp$.

Les points E, F ſeront dans une même ligne droite EOF, & le point O ſera le centre de force des particules maſſives E, F par rapport à un axe infiniment diſtant.

La vîteſſe du corps B eſt le réſultat de deux autres vîteſſes, l'une dans la direction Pp, & l'autre dans le plan Tt, à laquelle il n'arrivera aucun changement.

Soit la vîteſſe du corps B ou du point P dans la direction $Pp = \pi$, celle de la boule A dans la même direction $= \alpha$.

Soit $OE = e$, $OF = f$, $OP = p$.

Le coup que reçoit le corps B dans la direction Pp eſt égal au coup que reçoit la boule A dans la direction PA. Soit ce coup $= C$, la vîteſſe de la boule A dans la direction Pp ſera $= \alpha - \frac{C}{A}$, celle du corps B dans la même direction, ſera $= \pi + \frac{C}{B}$.

Je ſuppoſe que la vîteſſe angulaire du corps B autour de l'axe O, avant le choc, eſt nulle, & que ſa vîteſſe angulaire autour de O, après le choc, eſt $= v$, on aura

$pC \cos. OPT = (Ee^2 + Ff^2)v$, & la vîteſſe du point P autour de O ſera $= \frac{p^2 C \cos. OPT}{Ee^2 + Ff^2}$.

Le point P commun aux corps A & B ne doit avoir après le choc qu'une ſeule vîteſſe dans la direction APp; par conſéquent on aura $\alpha - \frac{C}{A} = \pi + \frac{C}{B} + \frac{p^2 C.(\cos. OPT)^2}{Ee^2 + Ff^2}$;

donc $C = \frac{AB(Ee^2 + Ff^2)(\alpha - \pi)}{(A+B).(Ee^2 + Ff^2) + ABp^2(\cos. OPT)^2}$.

La vîteſſe de la boule A dans la direction Pp ſera donc

$= \alpha - \frac{B.(Ee^2 + Ff^2).(\alpha - \pi)}{(A+B).(Ee^2 + Ff^2) + ABp^2(\cos. OPT)^2}$,

celle du corps B dans la même direction ſera

$= \pi + \frac{A.(Ee^2 + Ff^2).(\alpha - \pi)}{(A+B).(Ee^2 + Ff^2) + ABp^2(\cos. OPT)^2}$,

& ſa vîteſſe angulaire autour de O ſera

$= \frac{p \cos. OPT. AB.(\alpha - \pi)}{(A+B).(Ee^2 + Ff^2) + ABp^2(\cos. OPT)^2}$.

Si les corps A & B ſont des corps à reſſort, & ſi leur reſſort eſt infiniment roide, ils recevront dans le ſecond inſtant un coup égal à celui qu'ils auront reçû dans le premier.

La vîteſſe de la boule A dans la direction Pp ſera donc

$= \alpha - \frac{2B(Ee^2 + Ff^2)(\alpha - \pi)}{(A+B)(Ee^2 + Ff^2) + ABp^2(\cos. OPT)^2}$,

celle du corps B dans la même direction ſera

$= \pi + \frac{2A(Ee^2 + Ff^2)(\alpha - \pi)}{(A+B)(Ee^2 + Ff^2) + ABp^2(\cos. OPT)^2}$,

& la vîteſſe angulaire de B autour de O ſera

$= \frac{2p \cos. OPT. AB.(\alpha - \pi)}{(A+B)(Ee^2 + Ff^2) + ABp^2(\cos. OPT)^2}$.

XIX.

Deux figures planes roides A, A' *(fig. 34)* dénuées d'inertie, & douées de points maſſifs, ſe meuvent dans le plan $OAA'O'$ autour des axes roides immobiles O, O', perpendiculaires à ce plan, & ſe choquent au point P dans la direction APA' perpendiculaire à leur circonférence ou à la tangente Tt de ces circonférences au point P.

Soit N le point & la particule maſſive dont la force eſt le réſultat des forces de tous les points maſſifs dont A eſt doué, & N' le point & la particule maſſive dont la force eſt le réſultat des forces de tous les points maſſifs dont A' eſt doué.

Soit $ON = n$, $OP = p$, l'angle $OPT = \alpha$, $OTP = \mathfrak{C}$, la vîteſſe angulaire de A autour de O avant le choc $= a$, & après le choc $= a - v$.

$O'N' = n'$, $O'P = p'$, l'angle $O'PT' = \alpha'$, $O'T'P = \mathfrak{C}'$, la vîteſſe angulaire de A' autour de O' avant le choc $= a'$, & après le choc $= a' + v'$.

Le coup que reçoit le corps A dans la direction PA eſt égal à celui que reçoit le corps A' dans la direction PA'. Soit ce coup $= C$, le point P commun aux deux corps ne doit avoir qu'une ſeule vîteſſe dans la direction PA' après le choc.

Par conſéquent on aura

$$p.(a - v).\text{cof.}\,\alpha = p'.(a' + v').\text{cof.}\,\alpha'\text{; mais } v = \frac{p.C\,\text{cof.}\,\alpha}{Nn^2},$$

$$v' = \frac{p'\,C\,\text{cof.}\,\alpha'}{N'n'^2}\text{; donc } C = \frac{p\,a\,\text{cof.}\,\alpha - p'a'\,\text{cof.}\,\alpha'}{\frac{p^2(\text{cof.}\,\alpha)^2}{Nn^2} + \frac{p'^2(\text{cof.}\,\alpha')^2}{N'n'^2}}.$$

La vîteſſe angulaire de A après le choc ſera donc

$$= a - \frac{p\,\text{cof.}\,\alpha}{Nn^2} \cdot \frac{p\,a\,\text{cof.}\,\alpha - p'a'\,\text{cof.}\,\alpha'}{\frac{p^2(\text{cof.}\,\alpha)^2}{Nn^2} + \frac{p'^2(\text{cof.}\,\alpha')^2}{N'n'^2}}\text{, celle de}$$

$$A' \text{ ſera} = a' + \frac{p'\,\text{cof.}\,\alpha'}{N'n'^2} \cdot \frac{p\,a\,\text{cof.}\,\alpha - p'a'\,\text{cof.}\,\alpha'}{\frac{p^2(\text{cof.}\,\alpha)^2}{Nn^2} + \frac{p'^2(\text{cof.}\,\alpha')^2}{N'n'^2}},$$

Le coup que recevra l'axe O ſera $=$

$$\frac{\sqrt{[n^2 - 2np\cos.\alpha\cos.\zeta + p^2(\cos.\alpha)^2]}}{n} \cdot \frac{pa\cos.\alpha - p'd'\cos.\alpha'}{\frac{p^2(\cos.\alpha)^2}{Nn^2} + \frac{p'^2(\cos.\alpha')^2}{N'n'^2}},$$

& OL étant la direction de ce coup, le ſinus de l'angle POL ſera $= \frac{\cos.\alpha.(n - p\cos.AOP)}{\sqrt{[n^2 - 2np\cos.\alpha\cos.\zeta + p^2(\cos.\alpha)^2]}}$, & ſon coſinus ſera $= \frac{p\cos.\alpha\sin.AOP - n\sin.\alpha}{\sqrt{[n^2 - 2np\cos.\alpha\cos.\zeta + p^2(\cos.\alpha)^2]}}$.

Le coup que recevra l'axe O' ſera $=$

$$\frac{\sqrt{[n'^2 - 2n'p'\cos.\alpha'\cos.\zeta' + p'^2(\cos.\alpha')^2]}}{n'} \cdot \frac{pa\cos.\alpha - p'd'\cos.\alpha'}{\frac{p^2(\cos.\alpha)^2}{Nn^2} + \frac{p'^2(\cos.\alpha')^2}{N'n'^2}};$$

& $O'L'$ étant la direction de ce coup, le ſinus de l'angle $PO'L'$ ſera $= \frac{\cos.\alpha'.(n' - p'\cos.PO'A')}{\sqrt{[n'^2 - 2n'p'\cos.\alpha'\cos.\zeta' + p'^2(\cos.\alpha')^2]}}$, & ſon coſinus ſera $= \frac{p'\cos.\alpha'\sin.PO'A' - n'\sin.\alpha'}{\sqrt{[n'^2 - 2n'p'\cos.\alpha'\cos.\zeta' + p'^2(\cos.\alpha')^2]}}$.

X X.

Une ligne roide OAB *(fig. 35)* dénuée d'inertie & douée de deux points maſſifs A, B, ſe meut dans le plan OBb autour de l'axe O perpendiculaire à ce plan, & cet axe vient à manquer tout-à-coup.

Soit $OA = a$, $OB = b$, la vîteſſe angulaire de OB autour de $O = V$.

La vîteſſe de A dans la direction Aa perpendiculaire à OB eſt $= aV$; celle de B dans la direction Bb parallèle à Aa eſt $= bV$.

Je regarde la ligne AB comme en repos & comme recevant au point A dans la direction Aa un coup $= A.aV$, & au point B dans la direction Bb un coup $= B.bV$.

Soit C le centre de force des points maſſifs A, B, par rapport à un axe infiniment diſtant, on aura $OC = \frac{Aa + Bb}{A + B}$, $CA = \frac{B.(b - a)}{A + B}$, $CB = \frac{A.(b - a)}{A + B}$.

Le coup que reçoit le point C dans la direction Cc parallèle à Aa eſt $= AaV + BbV$; la vîteſſe de ce point dans cette direction ſera donc $= \frac{(Aa + Bb)V}{A + B}$, comme auparavant.

Soit la vîteſſe angulaire de AB autour de $C = v$, on aura $BbV \cdot \frac{A.(b-a)}{A+B} - AaV \cdot \frac{B.(b-a)}{A+B} = (A \cdot \frac{B^2.(b-a)^2}{(A+B)^2} + B \cdot \frac{A^2.(b-a)^2}{(A+B)^2})v$, ou $v = V$.

SECTION CINQUIÉME.

I.

DE même qu'un corps ſeul dans l'eſpace ſe mouvroit éternellement avec la même vîteſſe & dans la même direction, le centre de force d'un ſyſtème quelconque de corps, ſeul dans l'eſpace, ſe mouvroit auſſi toûjours avec la même vîteſſe & dans la même direction.

Soient les corps A, B, C, D, E, &c. ſe mouvans dans l'eſpace.

Concevons 1.° que non ſeulement ces corps ne rencontrent aucun obſtacle étranger à leur ſyſtème, mais même qu'ils ne peuvent ſe nuire les uns aux autres, & que chacun d'eux ſe meut auſſi librement que s'il étoit ſeul.

Je dis que le centre de force de tous ces corps ſe mouvera uniformément en ligne droite.

Je vais démontrer que le centre de force de deux quelconques de ces corps, ſe mouvera uniformément en ligne droite, & j'en conclurai que le centre de force de tout le ſyſtème ſe mouvera de même.

Soient donc les deux corps A & B *(fig. 36)* & ſoient Aa, Bb les vîteſſes & les directions de ces corps.

Je marque ſur leur diſtance AB le point G que je ſuppoſe être leur centre de force, & de ce point je mène $G\alpha$ égal & parallèle à Aa, $G\mathcal{C}$ égal & parallèle à Bb; enſuite je

mène les lignes ab, $a\mathfrak{C}$, qui étant toutes les deux dans le plan des parallèles aa, $b\mathfrak{C}$, se couperont en un point g. Ce point sera le centre de force des corps a & b, & Gg sera la direction & la vîtesse de ce centre; car à cause des triangles semblables $ag\alpha$, $bg\mathfrak{C}$, on aura $ag : bg :: ag : \mathfrak{C}g :: a\alpha : b\mathfrak{C} :: AG : BG$.

Anéantissez par la pensée les corps A & B, & concevez en même temps au centre de leur force un corps $A' = A + B$, le centre de force des corps A' & C se mouvera uniformément en ligne droite.

Anéantissez les corps A' & C, & concevez en même temps au centre de leur force un corps $B' = A' + C = A + B + C$, le centre de force des corps B & D se mouvera uniformément en ligne droite, & ainsi de suite.

Par conséquent, dans cette hypothèse, le centre de force d'un système quelconque de corps se mouvera uniformément en ligne droite.

Concevons 2.° que deux, trois ou quatre, &c. de ces corps se rencontrant au même instant, leurs états soient incompatibles entr'eux, si je démontre que dans cet instant le centre de force de ces deux, trois ou quatre corps, &c. ne sera point dérangé, il sera démontré que le centre de force de tout le système ne le sera jamais.

La direction & la vîtesse du centre de force G *(fig. 37)* de plusieurs corps, étant Gg, pour que la direction & la vîtesse de ce point soient $G\gamma$, il faut une impulsion dont la mesure est le produit de la masse de tous ces corps par $g\gamma$, & dont la direction est $g\gamma$, ou il en faut plusieurs dont le résultat soit tel que nous venons de le dire; mais dans la rencontre de plusieurs corps ensemble, les forces de ces corps s'entredétruisant mutuellement, ou étant en équilibre, *(Section 3.me, art. III)* le résultat de toutes les impulsions qui se font, est $= 0$ dans toutes les directions possibles; par conséquent, dans cette rencontre le centre de force de ces corps ne souffrira aucun dérangement, & sa vîtesse & sa direction continueront d'être Gg.

II.

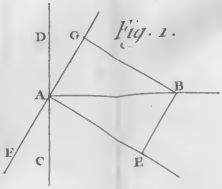


Fig. 1.

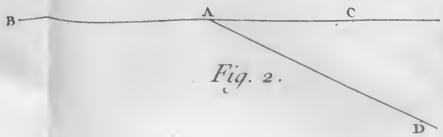


Fig. 2.

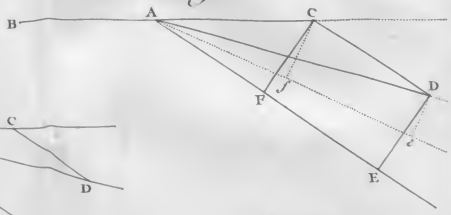


Fig. 3.

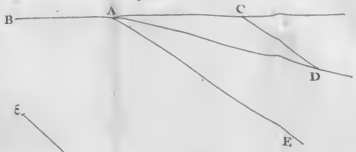


Fig. 4

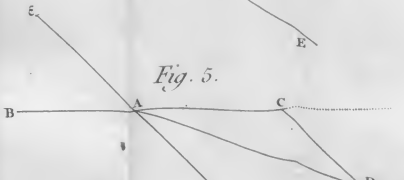


Fig. 5.

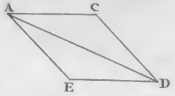


Fig. 6.

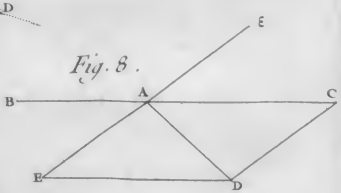


Fig. 8.

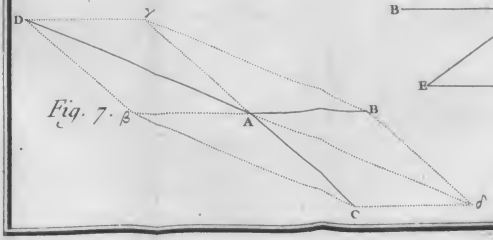


Fig. 7.

Fig. 9.

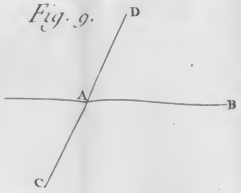


Fig. 12.

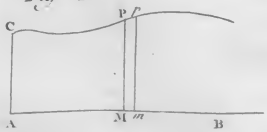


Fig. 11.

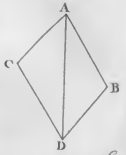


Fig. 10.

Fig. 14.

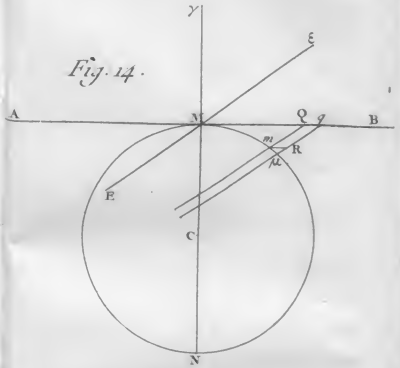
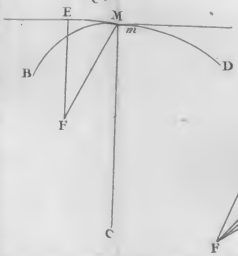


Fig. 13.

Fig. 15.



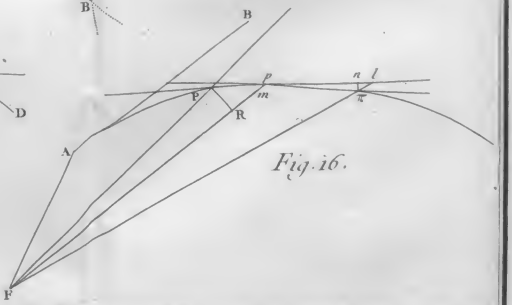


Fig. 16.

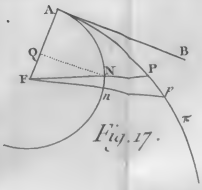


Fig. 17.

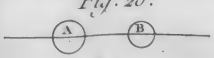


Fig. 20.

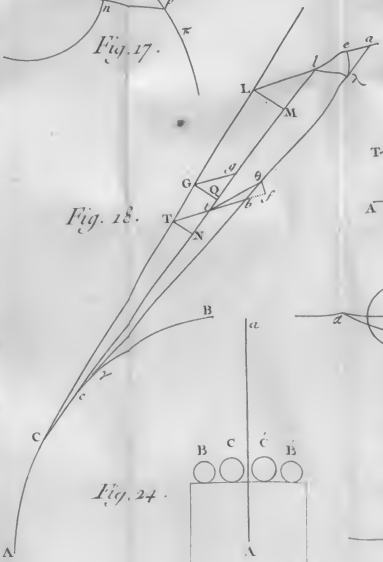


Fig. 18.

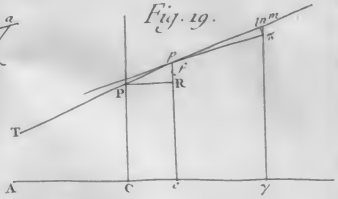


Fig. 19.

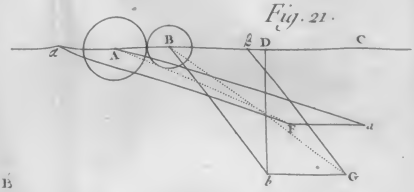


Fig. 21.

Fig. 24.

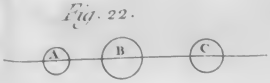


Fig. 22.

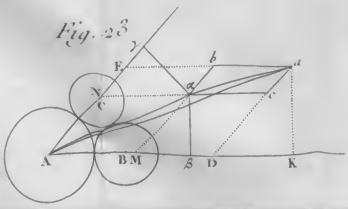


Fig. 23.

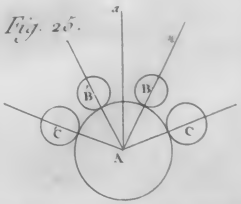


Fig. 25.

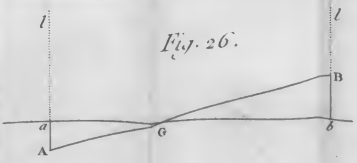


Fig. 26.

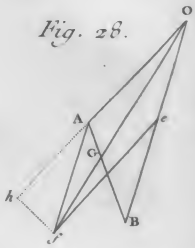


Fig. 28.

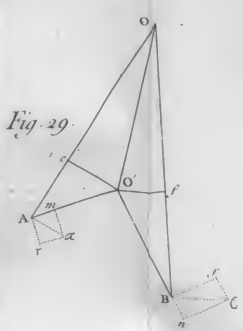


Fig. 29.

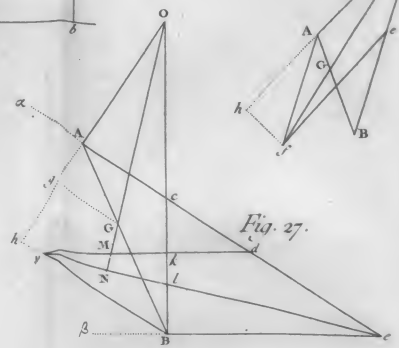


Fig. 27.

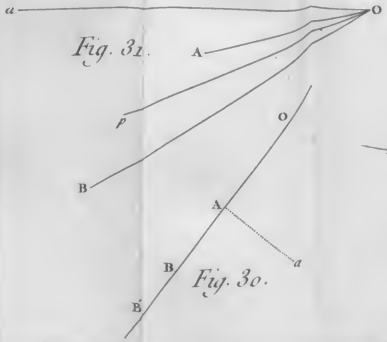


Fig. 31.

Fig. 30.

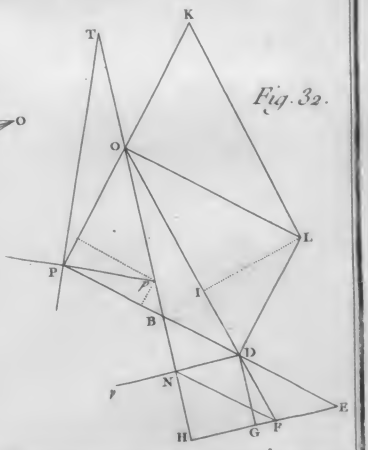


Fig. 32.

Fig. 33.

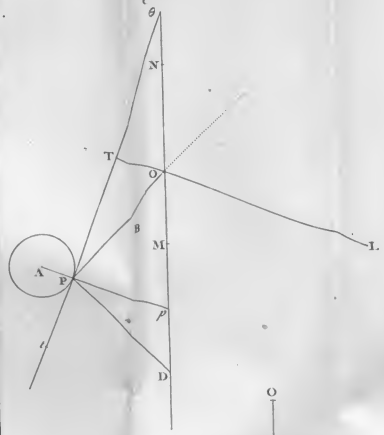


Fig. 34.

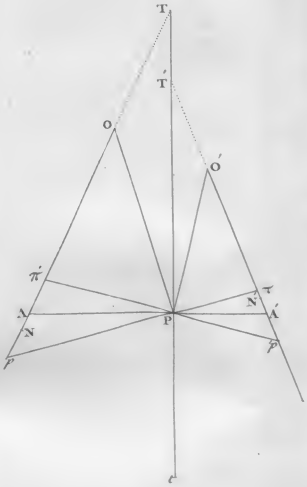


Fig. 35.

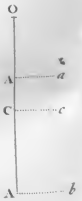


Fig. 36.

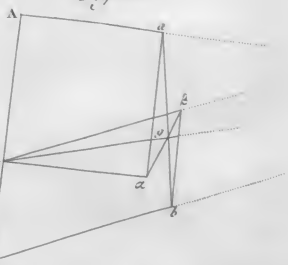
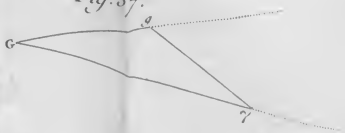


Fig. 37.



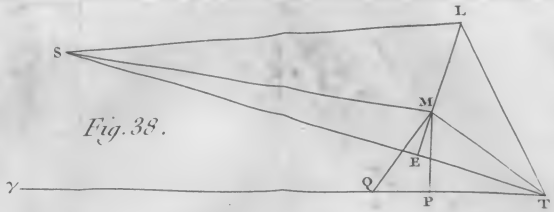


Fig. 38.

Fig. pour la page 398.

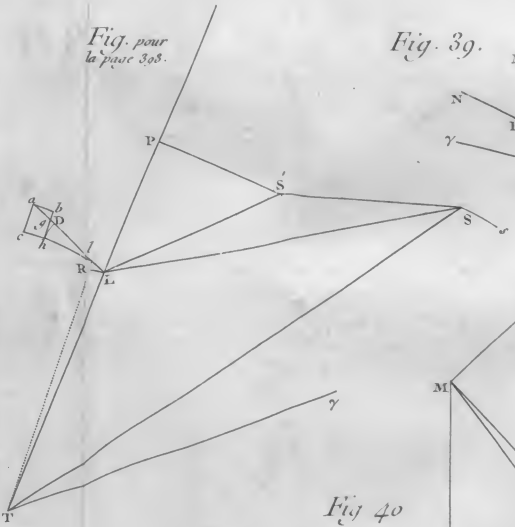


Fig. 39.

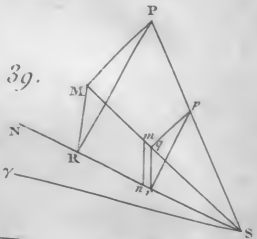
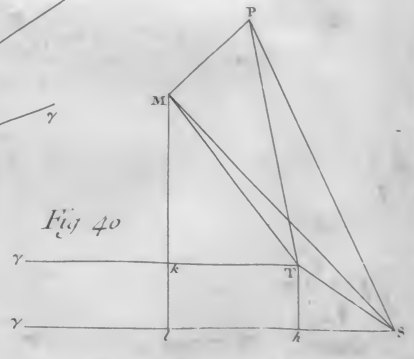


Fig 40



II.

Soient les corps $A, B, C, D, E,$ &c. & soient $Aa, Bb, Cc, Dd, Ee,$ &c. les directions & les vîtesses de ces corps, pour avoir la direction & la vîtesse de leur centre de force.

Soit la masse de tous ces corps $= M$; d'un point quelconque P, je mène $P\alpha$ parallèle à Aa & $= \frac{A.Aa}{M}$, $P\beta$ parallèle à Bb & $= \frac{B.Bb}{M}$, $P\gamma$ parallèle à Cc & $= \frac{C.Cc}{M}$, $P\delta$ parallèle à Dd & $= \frac{D.Dd}{M}$, $P\varepsilon$ parallèle à Ee & $= \frac{E.Ee}{M}$, &c. la dernière diagonale Pp de toutes ces lignes sera parallèle à la direction du centre de force de tous ces corps, & elle sera égale à la vîtesse de ce centre.

III.

Qu'un quelconque D des corps de ce système reçoive dans la direction Dd' un coup $D.Dd'$, du point P je mène $P\delta'$ parallèle à Dd' & $= \frac{D.Dd'}{M}$, la diagonale Pp' du parallélogramme $Ppp'\delta'$ sera la direction & la vîtesse du centre de force des corps $A, B, C, D, E,$ &c. après ce coup.

IV.

Qu'un, ou deux, ou trois, ou quatre, &c. des corps de ce système reçoivent au même instant chacun un ou plusieurs corps, du point P je mène une ligne parallèle à la direction de chaque coup & égale à ce coup divisé par M; la dernière diagonale de toutes ces lignes sera la direction du coup que recevra dans cet instant le centre de force de tout ce système, & le produit de cette ligne par M sera égal à ce coup.

Si tous ces coups sont en équilibre, comme il arrive lorsque plusieurs corps se repoussent ou s'attirent, ou se repoussent & s'attirent en même temps, cette dernière diagonale sera $= 0$, & par conséquent le coup que recevra le centre de force de tout le système, sera nul dans toutes les directions possibles.

NOUVELLE MÉTHODE D'APPROXIMATION,

Pour la ſolution des Problèmes qui ſe réduiſent aux Quadratures.

L'INTÉGRALE de l'élément $y\,dx$, y étant une fonction quelconque de x, eſt égale au produit de $\frac{1}{2^n-1}x$ par une ſuite, dont on aura le premier terme, en mettant $\frac{1}{2^n}x$ au lieu de x dans la fonction donnée y; le ſecond, en y mettant $\frac{3}{2^n}x$; le troiſième, en y mettant $\frac{5}{2^n}x$; le quatrième, en y mettant $\frac{7}{2^n}x$; le cinquième, en y mettant $\frac{9}{2^n}x$, &c. le dernier, en y mettant $\frac{2^n-1}{2^n}x$, d'autant plus exactement que le nombre entier poſitif n ſera plus grand.

EXEMPLE PREMIER.

Suivant cette règle, on aura $\int V(2x-x^2).dx = \frac{1}{2^n-1}x$
$\left(V[2.\frac{1}{2^n}x-(\frac{1}{2^n}x)^2]+V[2.\frac{3}{2^n}x-(\frac{3}{2^n}x)^2]+\right.$
$V[2.\frac{5}{2^n}x-(\frac{5}{2^n}x)^2]+V[2.\frac{7}{2^n}x-(\frac{7}{2^n}x)^2]+$
$\left.V[2.\frac{9}{2^n}x-(\frac{9}{2^n}x)^2]+\&c.+V[2.\frac{2^n-1}{2^n}x-(\frac{2^n-1}{2^n}x)^2]\right)$
ou $\int V(2x-x^2)\,dx = \frac{1}{2^{2n}-1}x\Big[V(2^{n+1}x-x^2)+$
$V(2^{n+1}3x-3^2x^2)+V(2^{n+1}5x-5^2x^2)+$
$V(2^{n+1}7x-7^2x^2)+V(2^{n+1}9x-9^2x^2)+\&c.$
$+V[2^{n+1}(2^n-1)x-(2^n-1)^2x^2]\Big]$
d'autant plus exactement que n ſera plus grand.

Soit, par exemple, $x = 1$ & $n = 5$, l'aire d'un cercle dont le rayon eſt 1 ſera $= \frac{1}{2^7}\left[\sqrt{(63.1)} + \sqrt{(61.3)} + \sqrt{(59.5)} + \sqrt{(57.7)} + \sqrt{(55.9)} + \sqrt{(53.11)} + \sqrt{(51.13)} + \sqrt{(49.15)} + \sqrt{(47.17)} + \sqrt{(45.19)} + \sqrt{(43.21)} + \sqrt{(41.23)} + \sqrt{(39.25)} + \sqrt{(37.27)} + \sqrt{(35.29)} + \sqrt{(33.31)}\right]$. Soit $n = 6$, cette aire ſera $= \frac{1}{2^9}\left[\sqrt{(127.1)} + \sqrt{(125.3)} + \sqrt{(123.5)} + \sqrt{(121.7)} + \sqrt{(119.9)} + \text{&c.} + \sqrt{(65.63)}\right]$.

EXEMPLE II.

On aura $\int \frac{1}{1+x}\,dx = \frac{1}{2^n-1}\,x\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2^n}x} + \frac{1}{1+\frac{3}{2^n}x} + \frac{1}{1+\frac{5}{2^n}x} + \frac{1}{1+\frac{7}{2^n}x} + \frac{1}{1+\frac{9}{2^n}x} + \text{&c.} + \frac{1}{1+\frac{2^n-1}{2^n}x}\right)$

ou $\int \frac{1}{1+x}\,dx = 2x\left(\frac{1}{2^n+x} + \frac{1}{2^n+3x} + \frac{1}{2^n+5x} + \frac{1}{2^n+7x} + \frac{1}{2^n+9x} + \text{&c.} + \frac{1}{2^n+(2^n-1)x}\right)$

d'autant plus exactement que n ſera plus grand.

Mais $\frac{1}{2^n+x} = \frac{1}{2^n} - \frac{x}{2^{2n}} + \frac{x^2}{2^{3n}} - \frac{x^3}{2^{4n}} + \frac{x^4}{2^{5n}} - \frac{x^5}{2^{6n}} + \text{&c.}$ à l'infini.

$\frac{1}{2^n+3x} = \frac{1}{2^n} - \frac{3x}{2^{2n}} + \frac{3^2x^2}{2^{3n}} - \frac{3^3x^3}{2^{4n}} + \frac{3^4x^4}{2^{5n}} - \frac{3^5x^5}{2^{6n}} + \text{&c.}$

$$\frac{1}{2^n+5x} = \frac{1}{2^n} - \frac{5x}{2^{2n}} + \frac{5^2x^2}{2^{3n}} - \frac{5^3x^3}{2^{4n}} + \frac{5^4x^4}{2^{5n}} - \frac{5^5x^5}{2^{6n}} + \&c.$$

$$\frac{1}{2^n+7x} = \frac{1}{2^n} - \frac{7x}{2^{2n}} + \frac{7^2x^2}{2^{3n}} - \frac{7^3x^3}{2^{4n}} + \frac{7^4x^4}{2^{5n}} - \frac{7^5x^5}{2^{6n}} + \&c. \&c.$$

Le nombre des termes étant 2^{n-1}, la somme de la suite $1 + 1 + 1 + 1 + \&c. = 2^{n-1}$.

Celle de la suite $1 + 3 + 5 + 7 + \&c. = 2^{2n-2}$.

Celle de la suite $1 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \&c. = \frac{2^{n-1}(2^{2n}-1)}{3}$.

Celle de la suite $1 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \&c. = 2^{2n-2}(2^{2n-1}-1)$.

Celle de la suite $1 + 3^4 + 5^4 + 7^4 + \&c. = \frac{2^{n-1}[2^{2n+1}.(3.2^{2n-1}-5)+7]}{3.5}$.

Celle de la suite $1 + 3^5 + 5^5 + 7^5 + \&c. = \frac{2^{2n-3}[2^{2n}.(2^{2n}-5)+7]}{3}$.

Par conséquent on aura

$$\int \frac{1}{1+x}\,dx = 2x\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{2^{2n}-1}{3.2^{2n+1}}x^2 - \frac{2^{2n-1}-1}{2^{2n+2}}x^3 + \frac{2^{2n+1}(3.2^{2n-1}-5)+7}{3.5.2^{4n+1}}x^4 - \frac{2^{2n}(2^{2n}-5)+7}{3.2^{4n+2}}x^5 + \&c. \text{ à l'infini.}\right)$$

d'autant plus exactement que n sera plus grand.

Soit n un nombre si grand que $2^{2n} - 1 = 2^{2n}$, $2^{2n-1} - 1 = 2^{2n-1}$, $3.2^{4n-1} - 5 = 3.2^{2n-1}$, $3.2^{4n} + 7 = 3.2^{4n}$, $2^{2n} - 5 = 2^{2n}$, $2^{4n} + 7 = 2^{4n}$, &c.

on aura $\int \frac{1}{1+x}\,dx = 2x\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{10}x^4 - \frac{1}{12}x^5 + \text{&c. à l'infini.}\right)$

ou $\int \frac{1}{1+x}\,dx = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \text{&c.}$

REMARQUE.

Il ſera toûjours facile de changer les ſuites que donnera cette méthode-ci en d'autres où le nombre indéterminé n ne ſe trouvera pas.

Par exemple, nous venons de trouver $\int V(2x - x^2).dx = \frac{1}{2^{2n-1}}x^{\frac{2n}{2}}\left[(2^{n+1} - x)^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}}(2^{n+1} - 3x)^{\frac{1}{2}} + 5^{\frac{1}{2}}(2^{n+1} - 5x)^{\frac{1}{2}} + 7^{\frac{1}{2}}(2^{n+1} - 7x)^{\frac{1}{2}} + \text{&c.}\right]$ En convertiſſant chaque terme de cette ſuite en une ſérie infinie par la méthode du binome de M. Newton, en écrivant à meſure ces ſéries l'une ſous l'autre, & les ajoûtant enſuite enſemble, on auroit $\int V(2x - x^2).dx = x^{\frac{2n}{2}}(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{&c.})$ Pour avoir les coëfficiens A, B, C, D, E, &c. que nous ne ſavons pas déterminer, comme dans l'exemple précédent, je différencie, & j'aurai $V(2x - x^2) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{&c.}) + x^{\frac{3}{2}}(B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \text{&c.})$ ou $V(2 - x) = \frac{3}{2}A + \frac{5}{2}Bx + \frac{7}{2}Cx^2 + \frac{9}{2}Dx^3 + \frac{11}{2}Ex^4 + \text{&c.}$

Mais $(2 - x)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}x - \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}x^2 - \frac{1}{2^{\frac{5}{2}}}x^3 - \frac{5}{2^{\frac{7}{2}}}x^4 - \frac{7}{2^{\frac{9}{2}}}x^5 - \frac{3\cdot 7}{2^{\frac{11}{2}}}x^6 - \&c.$

Donc $A = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{3}$, $B = \frac{-1}{2^{\frac{3}{2}}\cdot 5}$, $C = \frac{-1}{2^{\frac{5}{2}}\cdot 7}$, $D = \frac{-1}{2^{\frac{7}{2}}\cdot 9}$;

$E = \frac{-5}{2^{\frac{9}{2}}\cdot 11}$, $F = \frac{-7}{2^{\frac{11}{2}}\cdot 13}$, $G = \frac{-7}{2^{\frac{13}{2}}\cdot 5}$, &c.

Donc $\int V(2x - x^2).dx = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}\cdot 5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2^{\frac{5}{2}}\cdot 7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{2^{\frac{7}{2}}\cdot 9}x^{\frac{9}{2}} - \frac{15}{2^{\frac{9}{2}}\cdot 11}x^{\frac{11}{2}} - \frac{7}{2^{\frac{11}{2}}\cdot 13}x^{\frac{13}{2}} - \frac{7}{2^{\frac{13}{2}}\cdot 5}x^{\frac{15}{2}} - \&c.$

EXEMPLE III.

On aura $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{1}{2^{n-1}}x\left[\frac{1}{1+(\frac{1}{2^n}x)^2} + \frac{1}{1+(\frac{3}{2^n})x^2} + \frac{1}{1+(\frac{5}{2^n})x^2} + \frac{1}{1+(\frac{7}{2^n})x^2} + \&c. + \frac{1}{1+(\frac{2^n-1}{2^n})x^2}\right]$

ou $\int \frac{1}{1+x^2}dx = 2^{n+1}x\left(\frac{1}{2^{2n}+x^2} + \frac{1}{2^{2n}+3^2x^2} + \frac{1}{2^{2n}+5^2x^2} + \frac{1}{2^{2n}+7^2x^2} + \&c. + \frac{1}{2^{2n}+(2^n-1)^2x^2}\right).$

EXEMPLE IV.

On aura $\int \frac{b}{a}(a-x)dx = \frac{bx}{2^{n-1}a}\left(a - \frac{1}{2^n}x + a - \frac{3}{2^n}x + a - \frac{5}{2^n}x + a - \frac{7}{2^n}x + \&c. + a - \frac{2^n-1}{2^n}x\right)$

ou $\int \frac{b}{a}(a - x)\,dx = \frac{bx}{2^{n-1}a}\left(2^{n-1}a - \frac{1}{2^n}x - \frac{3}{2^n}x - \frac{5}{2^n}x - \frac{7}{2^n}x - \text{\&c.} - \frac{2^n-1}{2^n}x\right)$

ou $\int \frac{b}{a}(a - x)\,dx = bx - \frac{bx}{2^{n-1}a}\left(\frac{1}{2^n}x + \frac{3}{2^n}x + \frac{5}{2^n}x + \frac{7}{2^n}x + \text{\&c.} + \frac{2^n-1}{2^n}x\right)$

ou $\int \frac{b}{a}(a - x)\,dx = bx - \frac{bx}{2^{2n-1}a}(1 + 3 + 5 + 7 + \text{\&c.} + 2^n - 1)$.

Mais le nombre des termes étant 2^{n-1}, la somme de la suite $1 + 3 + 5 + 7 + \text{\&c.} = 2^{2n-2}$; par conséquent on aura

$\int \frac{b}{a}(a - x)\,dx = bx - \frac{bx^2}{2^{2n-1}a} \cdot 2^{2n-2} = bx - \frac{bx^2}{2a} = \frac{bx(2a-x)}{2a}$.

EXEMPLE V.

On aura $\int ax^2\,dx = \frac{ax}{2^{n-1}}\left[\left(\frac{1}{2^n}x\right)^2 + \left(\frac{3}{2^n}x\right)^2 + \left(\frac{5}{2^n}x\right)^2 + \left(\frac{7}{2^n}x\right)^2 + \text{\&c.} + \left(\frac{2^n-1}{2^n}x\right)^2\right]$ ou $\int ax^2\,dx = \frac{ax^3}{2^{3n-1}}[1 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \text{\&c.} + (2^n - 1^2]$.

Mais le nombre des termes étant 2^{n-1}, la somme de la suite $1 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \text{\&c.} = \frac{2^{n-1}(2^{2n}-1)}{3}$; on aura donc $\int ax^2\,dx = \frac{ax^3}{2^{2n}\cdot 3}\cdot(2^{2n} - 1)$ d'autant plus exactement que n sera plus grand.

Soit n un nombre si grand que $2^{2n} - 1 = 2^{2n}$, on aura $\int ax^2\,dx = \frac{1}{3}ax^3$.

EXEMPLE VI.

On aura $\int \sqrt{ax}.dx = \frac{a^{\frac{1}{2}}x}{2^{n-1}}\left(\sqrt{\frac{1}{2^n}}x + \sqrt{\frac{3}{2^n}}x + \sqrt{\frac{5}{2^n}}x + \sqrt{\frac{7}{2^n}}x + \text{&c.} + \sqrt{\frac{2^n-1}{2^n}}x\right)$

ou $\int \sqrt{ax}.dx = \frac{a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{1}{2}n-1}}\left[1 + 3^{\frac{1}{2}} + 5^{\frac{1}{2}} + 7^{\frac{1}{2}} + 9^{\frac{1}{2}} + \text{&c.} + (2^n - 1)^{\frac{1}{2}}\right]$ d'autant plus exactement que n sera plus grand.

Soit la dernière valeur de $\frac{1}{2^{\frac{1}{2}n-1}}\left[1 + 3^{\frac{1}{2}} + 5^{\frac{1}{2}} + 7^{\frac{1}{2}} + 9^{\frac{1}{2}} + \text{&c.} + (2^n - 1)^{\frac{1}{2}}\right] = A$,

on aura $\int \sqrt{ax}.dx = Aa^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$;

& en différenciant, on aura $a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}Aa^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$.

Donc $A = \frac{2}{3}$; donc $\int \sqrt{ax}.dx = \frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$.

EXEMPLE VII.

En général $\int y\,dx$, y étant une fonction de a & de x dont la dimension est $e - 1$, est $= -a^e x \int \frac{y}{a^{e+1}}da$;

ainsi on aura, par exemple,

$$\int \sqrt{(2ax - xx)}.dx = -a^2 x^{\frac{1}{2}} \int \frac{\sqrt{(2a - x)}}{a^3}da.$$

Il s'agit d'avoir l'intégrale de l'élément $\frac{\sqrt{(2a-x)}}{a^3}da$. Mais comme cette méthode-ci exige que l'intégrale soit $= 0$, lorsque l'indéterminée est $= 0$, je fais $a = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z$; il s'agira d'avoir l'intégrale de l'élément $\frac{4z^{\frac{1}{2}}dz}{(x+z)^3}$.

On

On aura $\int \frac{4z^{\frac{1}{2}}}{(x+z)^{\frac{3}{2}}}\,dz = -\frac{A}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2^{n-\frac{3}{2}}}z$

$$\left[\frac{(\frac{1}{2^n}z)^{\frac{1}{2}}}{(x+\frac{1}{2^n}z)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(\frac{3}{2^n}z)^{\frac{1}{2}}}{(x+\frac{3}{2^n}z)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(\frac{5}{2^n}z)^{\frac{1}{2}}}{(x+\frac{5}{2^n}z)^{\frac{3}{2}}} + \right.$$

$$\left. \frac{(\frac{7}{2^n}z)^{\frac{1}{2}}}{(x+\frac{7}{2^n}z)^{\frac{3}{2}}} + \text{\&c.} + \frac{(\frac{2^n-1}{2^n}z)^{\frac{1}{2}}}{(x+\frac{2^n-1}{2^n}z)^{\frac{3}{2}}}\right] \text{ ou}$$

$$\int \frac{4z^{\frac{1}{2}}}{(x+z)^{\frac{3}{2}}}dz = -\frac{A}{x^{\frac{1}{2}}} + 2^{\frac{1}{2}n+3}z^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{(2^n x+z)^{\frac{3}{2}}} + \right.$$

$$\frac{3^{\frac{1}{2}}}{(2^n x+3z)^{\frac{3}{2}}} + \frac{5^{\frac{1}{2}}}{(2^n x+5z)^{\frac{3}{2}}} + \frac{7^{\frac{1}{2}}}{(2^n x+7z)^{\frac{3}{2}}} + \text{\&c.} +$$

$$\left.\frac{(2^n-1)^{\frac{1}{2}}}{[2^n x+(2^n-1)z]^{\frac{3}{2}}}\right], \text{ \& en remettant } 2a-x \text{ au lieu de } z,$$

on aura $\int \frac{\sqrt{(2a-x)}}{a^3}\,da = -\frac{A}{x^{\frac{1}{2}}} + 2^{\frac{1}{2}n+3}(2a-x)^{\frac{1}{2}}$

$$\left[\frac{1}{[(2^n-1)x+2a]^{\frac{3}{2}}} + \frac{3^{\frac{1}{2}}}{[(2^n-3)x+3\cdot 2a]^{\frac{3}{2}}} + \right.$$

$$\left.\frac{5^{\frac{1}{2}}}{[(2^n-5)x+5\cdot 2a]^{\frac{3}{2}}} + \text{\&c.} + \frac{(2^n-1)^{\frac{1}{2}}}{[x+(2^n-1)2a]^{\frac{3}{2}}}\right];$$

Par conſéquent, on aura

$$\int \sqrt{(2ax-xx)}\,dx = Aa^2 - 2^{\frac{1}{2}n+3}a^2(2ax-xx)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left[\frac{1}{[(2^n-1)x+2a]^{\frac{3}{2}}} + \frac{3^{\frac{1}{2}}}{[(2^n-3)x+3\cdot 2a]^{\frac{3}{2}}} + \right.$$

$$\left.\frac{5^{\frac{1}{2}}}{[(2^n-5)x+5\cdot 2a]^{\frac{3}{2}}} + \text{\&c.} + \frac{(2^n-1)^{\frac{1}{2}}}{[x+(2^n-1)2a]^{\frac{3}{2}}}\right].$$

Je veux que cette intégrale ſoit $= o$, lorſque x ſera $= o$, ou, ce qui reviendra au même, lorſque x ſera $= \frac{1}{2^n}a$;

j'aurai $A = 2^{\frac{1}{2}n+3}\left(2\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{2n}}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{\left(\frac{2^n-1}{2^n}+2\right)^3} + \right.$

$\left. \frac{3^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{2^n-3}{2^n}+3.2\right)^3} + \frac{5^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{2^n-5}{2^n}+5.2\right)^3} + \frac{7^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{2^n-7}{2^n}+7.2\right)^3} + \text{&c.}\right]$

ou $A = 2^{\frac{1}{2}n+3}\left[2^n+1(2^n-1)\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{[2.2^n+1(2^n-1)]^3}\right.$

$+ \frac{3^{\frac{3}{2}}}{[4.2^n+3(2^n-1)]^3} + \frac{5^{\frac{3}{2}}}{[6.2^n+5(2^n-1)]^3} +$

$\left. \frac{7^{\frac{3}{2}}}{[8.2^n+7(2^n-1)]^3} + \frac{9^{\frac{3}{2}}}{[10.2^n+9(2^n-1)]^3} + \text{&c.}\right]$

& en suppoſant n ſi grand que $2^n - 1 = 2^n$, on aura

$A = 2^{\frac{5}{2}}\left(\frac{1}{3^3} + \frac{3^{\frac{3}{2}}}{7^3} + \frac{5^{\frac{3}{2}}}{(11)^3} + \frac{7^{\frac{3}{2}}}{(15)^3} + \right.$

$\left. \frac{9^{\frac{3}{2}}}{(19)^3} + \text{&c. à l'infini.}\right)$

On aura donc $\int V(2ax - xx)dx = 2^{\frac{5}{2}}\left(\frac{1}{3^3} + \right.$

$\left. \frac{3^{\frac{3}{2}}}{7^3} + \frac{5^{\frac{3}{2}}}{(11)^3} + \frac{7^{\frac{3}{2}}}{(15)^3} + \frac{9^{\frac{3}{2}}}{(19)^3} + \text{&c.}\right)a^2$

$- 2^{\frac{1}{2}n+3}a^2(2ax - xx)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{[(2^n-1)x+2a]^3}\right.$

$+ \frac{3^{\frac{3}{2}}}{[(2^n-3)x+3.2a]^3} + \frac{5^{\frac{3}{2}}}{[(2^n-5)x+5.2a]^3} +$

$\left. \frac{7^{\frac{3}{2}}}{[(2^n-7)x+7.2a]^3} + \text{&c.}\right)$

Soit, par exemple, $x = 2a$, l'aire d'un cercle, dont le rayon eſt 1, ſera $= 2^{\frac{11}{2}}\left(\frac{1}{3^3} + \frac{3^{\frac{3}{2}}}{7^3} + \frac{5^{\frac{3}{2}}}{(11)^3} + \right.$

$\left. \frac{7^{\frac{3}{2}}}{(15)^3} + \frac{9^{\frac{3}{2}}}{(19)^3} + \text{&c. à l'infini.}\right)$

Ceci, $2^{\frac{1}{2}n+3}a^2(2ax-xx)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{[(2^n-1)x+2a]^3}+\frac{3^{\frac{1}{2}}}{[(2^n-3)x+3.2a]^3}+\frac{5^{\frac{1}{2}}}{[(2^n-5)x+5.2a]^3}+\&c.\right)$ exprime l'aire au delà de la dernière ordonnée ; par conſéquent, ſi l'on y met $2a-x$ au lieu de x, on aura $\int V(2ax-xx)\,dx = 2^{\frac{1}{2}n+3}a^2(2ax-xx)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{[2^{n+1}a-(2^n-1)x]^3}+\frac{3^{\frac{1}{2}}}{[2^{n+1}a-(2^n-3)x]^3}+\frac{5^{\frac{1}{2}}}{[2^{n+1}a-(2^n-5)x]^3}+\&c.+\frac{(2^n-1)^{\frac{1}{2}}}{(2^{n+1}a-x)^3}\right)$.

Soit $x = 2a$, ou, ce qui reviendra au même, ſoit $x = 2a-\frac{1}{2^n}a = \frac{2^{n+1}-1}{2^n}a$, on aura pour l'aire du demi-cercle la même expreſſion que celle que nous venons de trouver. Soit $x = a$, on aura l'aire d'un cercle, dont le rayon eſt a, $= 2^{\frac{1}{2}n+5}\left(\frac{1}{(2^n+1)^3}+\frac{3^{\frac{1}{2}}}{(2^n+3)^3}+\frac{5^{\frac{1}{2}}}{(2^n+5)^3}+\frac{7^{\frac{1}{2}}}{(2^n+7)^3}+\&c.+\frac{(2^n-1)^{\frac{1}{2}}}{(2^{n+1}-1)^3}\right)a^2$ d'autant plus exactement que n ſera plus grand.

D'après la remarque ci-deſſus,

on aura ici $\int V(2ax-xx)\,dx = (2ax-xx)^{\frac{1}{2}}(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\&c.)$ & en différenciant, on aura $(2ax-x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(2ax-x^2)^{-\frac{1}{2}}(2a-2x)(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\&c.)+(2ax-xx)^{\frac{1}{2}}(B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+\&c.)$

ou $+3Aa+5Bax+7Cax^2+9Dax^3+11Eax^4+\&c. = 0.$
$\quad -1 \quad -3A \quad -4B \quad -5C \quad -6D$

Donc $A = \frac{1}{3}a$, $B = \frac{3}{5a}A$, $C = \frac{4}{7a}B$, $D = \frac{5}{9a}C$, $E = \frac{6}{11a}D$, &c. Donc $\int V(2ax - xx)\,dx = (2ax - xx)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}a + \frac{3}{5a}Ax + \frac{4}{7a}Bx^2 + \frac{5}{9a}Cx^3 + \frac{6}{11a}Dx^4 + \&c.\right)$

EXEMPLE VIII.

Qu'il s'agisse de l'élément $\frac{1}{z}dz$, je fais $z = 1 + x$, il s'agira de l'élément $\frac{1}{1+x}dx$; mais $\int \frac{1}{1+x}dx = 2x\left(\frac{1}{2n+x} + \frac{1}{2^n+3x} + \frac{1}{2^n+5x} + \&c.\right)$

Donc, en remettant $z - 1$ au lieu de x, on aura $\int \frac{1}{z}dz = A + 2(z-1)\left(\frac{1}{2^n-1+z} + \frac{1}{2^n-3+3z} + \frac{1}{2^n-5+5z} + \&c.\right)$.

Je veux que cette intégrale soit o lorsque z est o; j'aurai $A = 2\left(\frac{1}{2^n-1} + \frac{1}{2^n-3} + \frac{1}{2^n-5} + \&c. + 1.\right)$

Donc enfin $\int \frac{1}{z}dz = 2\left(\frac{1}{2^n-1} + \frac{1}{2^n-3} + \frac{1}{2^n-5} + \frac{1}{2^n-7} + \&c. + 1\right) + 2(z-1).\left(\frac{1}{2^n-1+z} + \frac{1}{2^n-3+3z} + \frac{1}{2^n-5+5z} + \frac{1}{2^n-7+7z} + \&c. + \frac{1}{1+(2^n-1)z}\right)$.

EXEMPLE IX.

Qu'il s'agiſſe de l'élément $\frac{a^3}{z^2}dz$, je fais $z = a + x$, il s'agira de l'élément $\frac{a^3}{(a+x)^2}dx$, on aura $\int\frac{a^3}{(a+x)^2}dx = \frac{a^3}{2^{n-1}}x\left(\frac{1}{(a+\frac{1}{2^n}x)^2} + \frac{1}{(a+\frac{3}{2^n}x)^2} + \frac{1}{(a+\frac{5}{2^n}x)^2} + \&c.\right)$ ou $\int\frac{a^3}{(a+x)^2}dx = 2^{n+1}a^3x\left(\frac{1}{(2^na+x)^2} + \frac{1}{(2^na+3x)^2} + \frac{1}{(2^na+5x)^2} + \&c.\right)$; & en remettant $z - a$ au lieu de x, on aura $\int\frac{a^3}{z^2}dz = Aa^2 + 2^{n+1}a^3(z-a)\left(\frac{1}{[(2^n-1)a+z]^2} + \frac{1}{[(2^n-3)a+3z]^2} + \frac{1}{[(2^n-5)a+5z]^2} + \frac{1}{[(2^n-7)a+7z]^2} + \&c.\right)$

Je veux que cette intégrale ſoit o, lorſque z eſt o : j'aurai $A = 2^{n+1}\left(\frac{1}{(2^n-1)^2} + \frac{1}{(2^n-3)^2} + \frac{1}{(2^n-5)^2} + \frac{1}{(2^n-7)^2} + \&c. + 1\right)$.

Donc enfin $\int\frac{a^3}{z^2}dz = 2^{n+1}\left(\frac{1}{(2^n-1)^2} + \frac{1}{(2^n-3)^2} + \frac{1}{(2^n-5)^2} + \&c. + 1\right)a^2 + 2^{n+1}a^3(z-a)\left(\frac{1}{[(2^n-1)a+z]^2} + \frac{1}{[(2^n-3)a+3z]^2} + \frac{1}{[(2^n-5)a+5z]^2} + \&c. + \frac{1}{[a+(2^n-1)z]^2}\right)$.

EXEMPLE X.

$\int \frac{b}{a}(a - x)dx = -abx\int \frac{a-x}{a^3}da$; il s'agit d'intégrer l'élément $\frac{a-x}{a^3}da$. Je fais $a = x + z$, & il s'agira d'intégrer l'élément $\frac{z}{(x+z)^3}dz$,

on aura $\int \frac{z}{(x+z)^3}dz = \frac{1}{2^{n-1}}z\left(\frac{\frac{1}{2^n}z}{(x+\frac{1}{2^n}z)^3} + \frac{\frac{3}{2^n}z}{(x+\frac{3}{2^n}z)^3} + \frac{\frac{5}{2^n}z}{(x+\frac{5}{2^n}z)^3} + \text{&c.}\right)$

ou $\int \frac{z}{(x+z)^3}dz = 2^{n+1}z^2\left(\frac{1}{(2^n x+z)^3} + \frac{3}{(2^n x+3z)^3} + \frac{5}{(2^n x+5z)^3} + \text{&c.}\right)$

& en remettant $a - x$ à la place de z, on aura

$\int \frac{a-x}{a^3}da = -\frac{A}{x} + 2^{n+1}(a-x)^2\left(\frac{1}{[(2^n-1)x+a]^3} + \frac{3}{[(2^n-3)x+3a]^3} + \frac{5}{[(2^n-5)x+5a]^3} + \frac{7}{[(2^n-7)x+7a]^3} + \text{&c.}\right)$

Par conséquent,

$\int \frac{b}{a}(a - x)dx = Aab - 2^{n+1}abx(a -)^2\left(\frac{1}{[(2^n-1)x+a]^3} + \frac{3}{[(2^n-3)x+3a]^3} + \frac{5}{[(2^n-5)x+5a]^3} + \frac{7}{[(2^n-7)x+7a]^3} + \text{&c.}\right)$.

Je veux que cette intégrale soit nulle lorsque x sera o,

ou, ce qui reviendra au même, lorſque x ſera $\frac{1}{2^n}a$; j'aurai

$$A = 2^{n+1}(2^n - 1)^2\left(\frac{1}{[2^n + 1(2^n - 1)]^3} + \frac{3}{[2^n + 3(2^n - 1)]^3} + \frac{5}{[2^n + 5(2^n - 1)]^3} + \&c.\right)$$

Soit n un nombre ſi grand que $2^n - 1 = 2^n$, j'aurai

$$A = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{3}{2^3} + \frac{5}{3^3} + \frac{7}{4^3} + \frac{9}{5^3} + \frac{11}{6^3} + \&c.\right)$$

On aura donc enfin $\int \frac{b}{a}(a - x)\,dx = \frac{bx(2a - x)}{2a} =$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1^3} + \frac{3}{2^3} + \frac{5}{3^3} + \frac{7}{4^3} + \frac{9}{5^3} + \&c.\right)$$

$$ab - 2^{n+1}abx(a - x)^2\left(\frac{1}{[(2^n - 1)x + a]^3} + \frac{3}{[(2^n - 3)x + 3a]^3} + \frac{5}{[(2^n - 5)x + 5a]^3} + \&c.\right)$$

Soit $x = a$, on aura

$$2 = \frac{1}{1^3} + \frac{3}{2^3} + \frac{5}{3^3} + \frac{7}{4^3} + \frac{9}{5^3} + \&c.$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \&c. \\ \quad + \frac{1}{2^3} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{4^3} + \frac{4}{5^3} + \frac{5}{6^3} + \&c. \end{array}\right\}$$

$$= 2\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \&c.\right) - \left(\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \&c.\right)$$

EXEMPLE XI.

On aura $\int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx = \frac{1}{2^{n-1}}x\left(\frac{1}{(\frac{1}{2^n}x)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(\frac{3}{2^n}x)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(\frac{5}{2^n}x)^{\frac{1}{2}}} + \&c. + \frac{1}{(\frac{2^n - 1}{2^n}x)^{\frac{1}{2}}}\right)$

ou $\int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx = \frac{1}{2^{\frac{1}{2^n}-1}}\,x^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{5^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{7^{\frac{1}{2}}} + \text{&c.} + \frac{1}{(2^n-1)^{\frac{1}{2}}}\right)$.

EXEMPLE XII.

$$\int \frac{\sqrt{(1+ax^2)}}{\sqrt{(1-bx^2)}}\,dx = \frac{1}{2^{\frac{1}{2^n}-1}}\,x\left(\frac{\sqrt{\left[1+a\left(\frac{1}{2^n}x\right)^2\right]}}{\sqrt{\left[1-b\left(\frac{1}{2^n}x\right)^2\right]}} + \frac{\sqrt{\left[1+a\left(\frac{3}{2^n}x\right)^2\right]}}{\sqrt{\left[1-b\left(\frac{3}{2^n}x\right)^2\right]}} + \frac{\sqrt{\left[1+a\left(\frac{5}{2^n}x\right)^2\right]}}{\sqrt{\left[1-b\left(\frac{5}{2^n}x\right)^2\right]}} + \text{&c.}\right)$$

ou $\int \frac{\sqrt{(1+ax^2)}}{\sqrt{(1-bx^2)}}\,dx = \frac{1}{2^{\frac{1}{2^n}-1}}\,x\left(\frac{\sqrt{(2^{2n}+ax^2)}}{\sqrt{(2^{2n}-bx^2)}} + \frac{\sqrt{(2^{2n}+3^2ax^2)}}{\sqrt{(2^{2n}-3^2bx^2)}} + \frac{\sqrt{(2^{2n}+5^2ax^2)}}{\sqrt{(2^{2n}-5^2bx^2)}} + \text{&c.}\right)$ ou

$$\int\left(\frac{1+ax^2}{1-bx^2}\right)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2^{\frac{1}{2^n}-1}}\,x\cdot\frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{2^n}}}{(1-bx^2)^{\frac{1}{2^n}}}\cdot\frac{(1-bx^2)^{\frac{1}{2^n}}}{(1+ax^2)^{\frac{1}{2^n}}}\left(\frac{(2^{2n}+ax^2)^{\frac{1}{2^n}}}{(2^{2n}-bx^2)^{\frac{1}{2^n}}} + \frac{(2^{2n}+3^2ax^2)^{\frac{1}{2^n}}}{(2^{2n}-3^2bx^2)^{\frac{1}{2^n}}} + \text{&c.}\right)$$ ou

$$\int\left(\frac{1+ax^2}{2-bx^2}\right)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2^{\frac{1}{2^n}-1}}\,x\left(\frac{1+ax^2}{1-bx^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[(1+ax^2)^{-\frac{1}{2}}(1-bx^2)^{\frac{1}{2}}(2^{2n}+ax^2)^{\frac{1}{2}}(2^{2n}-bx^2)^{-\frac{1}{2}} + (1+ax^2)^{-\frac{1}{2}}(1-bx^2)^{\frac{1}{2}}(2^{2n}+3^2ax^2)^{\frac{1}{2}}(2^{2n}-3^2bx^2)^{-\frac{1}{2}} + (1+ax^2)^{-\frac{1}{2}}(1-bx^2)^{\frac{1}{2}}(2^{2n}+5^2ax^2)^{\frac{1}{2}}(2^{2n}-5^2bx^2)^{-\frac{1}{2}} + \text{&c.}\right]$$

Chaque terme de cette dernière suite est composé de quatre facteurs. Chacun de ces facteurs peut se convertir en une série infinie par la formule du Binome de M. Newton; l'on peut prendre le produit de ces quatre séries, & n'en avoir qu'une seule pour

pour chaque terme ; l'on peut ajoûter toutes ces séries ensemble, & n'en avoir qu'une seule pour tous les termes de la suite.

Par ce moyen, on aura $\int\left(\frac{1+ax^2}{1-bx^2}\right)^{\frac{1}{2}}dx = \left(\frac{1+ax^2}{1-bx^2}\right)^{\frac{1}{2}}(Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + Ex^9 + \&c.)$

En différenciant,

on aura $\left(\frac{1+ax^2}{1-bx^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\left(\frac{1+ax^2}{1-bx^2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{2(a+b)x}{(1-bx^2)^2}(Ax + Bx^3 + Cx^5 + \&c.) + \left(\frac{1+ax^2}{1-bx^2}\right)^{\frac{1}{2}}(A + 3Bx^2 + 5Cx^4 + 7Dx^6 + 9Ex^8 + \&c.)$

ou $(1-bx^2)^2 = 3(a+b)x(Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + \&c.) + [1 + (a-b)x^2 - abx^4](A + 3Bx^2 + 5Cx^4 + 7Dx^6 + 9Ex^8 + \&c.)$

ou
$$\left\{\begin{array}{llll} +A & +3Bx^2 & +5Cx^4 & +7Dx^6 \\ -1 & +(4a+2b)A & +6aB & +(8a-2b)C \\ & +2b & -abA & -3abB \\ & & -b^2 & \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lll} +9Ex^8 & +11Fx^{10} & +\&c. \\ +(10a-4b)D & +(12a-6b)E & +\&c. \\ -5abC & -7abD & -\&c. \end{array}\right\} = 0.$$

Donc $A = 1$, $B = -\frac{4}{3}(a+b)$, $C = \frac{1}{5}(8a+b)(a+b)$, $D = \frac{3abB - 2(4a-b)C}{7}$, $E = \frac{5abC - 2(5a-2b)D}{9}$, $F = \frac{7abD - 2(6a-3b)E}{11}$, $G = \frac{9abE - 2(7a-4b)F}{13}$, &c.

Donc $\int\frac{\sqrt{(1+ax^2)}}{\sqrt{(1-bx^2)}}dx = \left(\frac{1+ax^2}{1-bx^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[x - \frac{4}{3}(a+b)x^3 + \frac{1}{5}(8a+b)(a+b)x^5 + \frac{3abB - 2(4a-b)C}{7}x^7 + \frac{5abC - 2(5a-2b)D}{9}x^9 + \frac{7abD - 2(6a-3b)E}{11}x^{11} + \frac{9abE - 2(7a-4b)F}{13}x^{13} + \&c.\right]$

ADDITION À L'EXEMPLE III.

Soit, par exemple, la tangente x infinie, ou, ce qui revient au même, soit $x = 2^n$, on aura l'angle de 90 degrés $=$

$$2\left(\frac{1}{1+1^2}+\frac{1}{1+3^2}+\frac{1}{1+5^2}+\frac{1}{1+7^2}+\frac{1}{1+9^2}+\&c.\right)$$

EXEMPLE XIII.

Le rayon étant 1, & le sinus verse x, l'élément de l'angle sera $\frac{1}{\sqrt{(2x-x^2)}}dx$, & on aura $\int\frac{1}{\sqrt{(2x-x^2)}}dx = \frac{1}{2^{n-1}}x$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{[2\cdot\frac{1}{2^n}x-(\frac{1}{2^n}x)^2]}}+\frac{1}{\sqrt{[2\cdot\frac{3}{2^n}x-(\frac{3}{2^n}x)^2]}}+\&c.\right) =$$

$$2x^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{(2^{n+1}-x)}}+\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}\sqrt{(2^{n+1}-3x)}}+\frac{1}{5^{\frac{1}{2}}\sqrt{(2^{n+1}-5x)}}+\&c.\right)$$

ou $\int\frac{1}{\sqrt{(2x-x^2)}}dx = 2\sqrt{(2x-x^2)}\,[(2-x)^{-\frac{1}{2}}$

$(2^{n+1}-x)^{-\frac{1}{2}}+3^{-\frac{1}{2}}(2-x)^{-\frac{1}{2}}(2^{n+1}-3x)^{-\frac{1}{2}}$

$+5^{-\frac{1}{2}}\cdot(2-x)^{-\frac{1}{2}}(2^{n+1}-5x)^{-\frac{1}{2}}+\&c.\,]$

& d'après la formule du binome, on aura $\int\frac{1}{\sqrt{(2x-x^2)}}dx$

$= \sqrt{(2x-x^2)}\,(A+Bx+Cx^2+Dx^3+\&c.)$

& en différenciant, l'on trouvera $A = 1$, $B = \frac{1}{3}$,

$C = \frac{1\cdot 2}{3\cdot 5}$, $D = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7}$, $E = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}$, &c.

EXEMPLE XIV.

Soit $dt = \frac{M}{(2a+b+b\cos.\theta)^2}d\theta$,

on aura $t = \int\frac{M}{(2a+b+b\cos.\theta)^2}d\theta = \frac{M}{2^{n-1}}\theta\cdot$

$$\left(\frac{1}{(2a+b+b\cos.\frac{1}{2^n}\theta)^2}+\frac{1}{(2a+b+b\cos.\frac{3}{2^n}\theta)^2}+\right.$$

$$\left.\frac{1}{(2a+b+b\cos.\frac{5}{2^n}\theta)^2}+\&c.+\frac{1}{(2a+b+b\cos.\frac{2^n-1}{2^n}\theta)^2}\right).$$

SUR LES LOGARITHMES.

L'On conçoit une ſuite infinie de nombres en progreſſion géométrique, rangés en ligne droite à une égale diſtance l'un de l'autre, & l'on ſuppoſe la progreſſion ſi lente, que tous les nombres poſſibles depuis 1 juſqu'a ∞, & depuis 1 juſqu'à 0, s'y trouvent.

La diſtance de 1 à un nombre donné m étant faite $= a$, par exemple, la diſtance de 1 à 10 étant faite $= 1$, l'on ſait trouver la diſtance x de 1 à un nombre quelconque y, & x ſe nomme le logarithme de y.

Si l'on me demande la diſtance de 1 à un nombre pris négativement, par exemple, à -7, l'on me fait une queſtion abſurde, car cé nombre n'eſt pas dans la progreſſion; ainſi dès qu'on a établi a pour être le logarithme du nombre poſitif m, le logarithme de -7 eſt une chimère.

Les logarithmes des nombres ſont comme les expoſans de ces nombres dans la progreſſion où ils ont été pris; 1 étant le premier terme de cette progreſſion, & α ou $\frac{1}{\alpha}$ le ſecond, la progreſſion ſera

$\&\ \alpha^{-7}, \alpha^{-6}, \alpha^{-5}, \alpha^{-4}, \alpha^{-3}, \alpha^{-2}, \alpha^{-1}, \alpha^{0}, \alpha^{1}, \alpha^{2}, \alpha^{3}, \alpha^{4}, \alpha^{5}, \alpha^{6}, \alpha^{7}, \&c.$

La diſtance de 1 à 2, par exemple, c'eſt-à-dire, le logarithme de 2 eſt comme l'expoſant de la puiſſance de α qui eſt $= 2$; le logarithme de 3 eſt comme l'expoſant de la puiſſance de α qui eſt $= 3$; le logarithme de 4 eſt comme l'expoſant de la puiſſance de α qui eſt $= 4$; le logarithme de 5 eſt comme l'expoſant de la puiſſance de α qui eſt $= 5$, & ainſi de ſuite; le logarithme de $\sqrt{2}$ eſt comme l'expoſant

de la puiſſance de α qui eſt $= \sqrt{2}$; le logarithme de $3^{\frac{2}{3}}$ eſt comme l'expoſant de la puiſſance de α qui eſt $= 3^{\frac{2}{3}}$; le logarithme de $\frac{1}{2}$ eſt comme l'expoſant de la puiſſance de α qui eſt $= \frac{1}{2}$; le logarithme de $\frac{3}{5}$ eſt comme l'expoſant de la puiſſance de α qui eſt $= \frac{3}{5}$, &c.

Repréſentez 1 par une ligne droite infiniment longue, & α par cette même ligne augmentée d'un point, en entendant par un point ce qu'ont de commun deux lignes qui ſe coupent perpendiculairement, & vous concevrez comment il n'y a point de nombre qui ne puiſſe être exprimé par α^{e} ou par α^{-e}, e déſignant un nombre entier poſitif.

L'expoſant de pq = l'expoſant de p + l'expoſant de q ; donc $lpq = lp + lq$.

L'expoſant de $\frac{A}{B}$ = l'expoſant de A — l'expoſant de B ; donc $l\frac{A}{B} = lA - lB$.

L'expoſant de y^m = le produit de l'expoſant de y par m ; donc $ly^m = mly$, &c.

Le logarithme de 1 eſt néceſſairement = 0, car il eſt comme l'expoſant de la puiſſance de α qui eſt = 1, lequel eſt néceſſairement = 0.

Soit dx la diſtance entre les termes de la progreſſion, & ſoient y, y', y'', trois termes conſécutifs de cette progreſſion, on aura $y : y' :: y' : y''$ ou $y' : y :: y'' : y'$ ou $y' - y : y :: y'' - y' : y'$ ou $dy : y :: dy' : y'$; donc $\frac{dy}{y} = \frac{dy'}{y'}$; par conſéquent, $\frac{dy}{y}$ eſt conſtant de même que dx.

Soient y, y', y'', y''', y'''', y''''', &c. une infinité de termes conſécutifs de la progreſſion, on aura $y : y' :: 1 : \alpha$ ou $y' : y :: \alpha : 1$, ou $y' - y : y :: \alpha - 1 : 1$, ou $dy : y :: \alpha - 1 : 1$; donc, la diſtance étant dx, $\frac{dy}{y} = \alpha - 1$; on aura $y : y'' :: 1 : \alpha^2$, ou $y'' : y :: \alpha^2 : 1$, ou $y'' - y : y :: \alpha^2 - 1 : 1$, ou $dy : y :: \alpha^2 - 1 : 1$; donc la diſtance étant $2dx$, $\frac{dy}{y} = \alpha^2 - 1 = (\alpha - 1)(\alpha + 1) = 2(\alpha - 1)$.

Par la même raiſon, la diſtance étant $3dx$, $\frac{dy}{y} = \alpha^3 - 1 = (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 3(\alpha - 1)$.

La diſtance étant $4dx$, $\frac{dy}{y} = \alpha^4 - 1 = (\alpha - 1)(\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1) = 4(\alpha - 1)$.

La diſtance étant $5dx$, $\frac{dy}{y} = 5(\alpha - 1)$ &c.

Suppoſons que les termes de la progreſſion ſe ſuivent d'auſſi près l'un de l'autre que les points de la ligne, le long de laquelle ils ſont diſpoſés, on aura généralement $\frac{dy}{y}$ comme dx; & par conſéquent, en prenant M pour une quantité déterminée, on aura $dx = \frac{Mdy}{y}$; donc $x = \int \frac{Mdy}{y}$. Si on pouvoit intégrer, l'on feroit que y ſoit $= 1$ lorſque x eſt $= 0$, & enſuite l'on détermineroit M tellement que x fût, par exemple $= 1$, lorſque y ſeroit $= 10$.

Soit $y = 1 + u$, on aura x ou $l(1 + u) = \int \frac{Mdu}{1+u} = \int M(1 - u + u^2 - u^3 + u^4 - u^5 + \&c.)\,du = M(u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{6}u^6 + \&c.)a$.

x étant donné, ſi l'on veut avoir $1 + u$ ou y, l'on trouvera

$\frac{x}{M} + \frac{x^2}{2M^2} + \frac{x^3}{6M^3} + \frac{x^4}{24M^4} + \frac{x^5}{120M^5} +$ &c. $= u$, & par conſéquent, $1 + u$ ou $y = 1 + \frac{x}{M} + \frac{x^2}{2M^2} + \frac{x^3}{6M^3} + \frac{x^4}{24M^4} + \frac{x^5}{120M^5} +$ &c.

Soit $x = M$, on aura le nombre, dont le logarithme eſt M, $= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} +$ &c.

Soit $y = 1 - u$, on aura x ou $l(1 - u) = -\int \frac{M\,du}{1-u} = -\int M(1 + u + u^2 + u^3 +$ &c.$)\,du = -M\,(u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{4}u^4 +$ &c.$)$

x étant donné, ſi l'on veut avoir $1 - u$ ou y, on aura $-\frac{x}{M} - \frac{x^2}{2M^2} - \frac{x^3}{6M^3} - \frac{x^4}{24M^4} - \frac{x^5}{120M^5} -$ &c. $= u$, & par conſéquent $1 - u$ ou $y = 1 + \frac{x}{M} + \frac{x^2}{2M^2} + \frac{x^3}{6M^3} + \frac{x^4}{24M^4} + \frac{x^5}{120M^5} +$ &c.

Soit $x = -M$, on aura le nombre, dont le logarithme eſt $-M$, $= 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} - \frac{1}{5040} +$ &c.

z étant un nombre permanent quelconque, & v un nombre variable, trouver la diſtance de $z - v$ à $z + v$.

La diſtance de 1 à $z + v$ eſt $= \int \frac{M\,dv}{z+v}$; celle de 1 à $z - v$ eſt $= -\int \frac{M\,dv}{z-v}$; par conſéquent, la diſtance de $z - v$ à $z + v$ eſt $= \int \frac{M\,dv}{z+v} + \int \frac{M\,du}{z-v} = M\int \left(\frac{1}{z+v} + \frac{1}{z-v}\right) dv = 2M\int \frac{z}{z^2-v^2}\,dv$

$= 2M\int \frac{1}{z - \frac{v^2}{z}} dv = 2M\int\left(\frac{1}{z} + \frac{v^2}{z^3} + \frac{v^4}{z^5} + \frac{v^6}{z^7} + \&c.\right) dv = 2M\left(\frac{v}{z} + \frac{v^3}{3z^3} + \frac{v^5}{5z^5} + \frac{v^7}{7z^7} + \&c.\right)$

Si la somme de deux nombres est z, & leur différence v, & si l'on fait $\frac{2Mv}{z} = A$, $\frac{Av^2}{z^2} = B$, $\frac{Bv^2}{z^2} = C$, $\frac{Cv^2}{z^2} = D$, &c. la distance du moindre au plus grand, sera $= A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{5}C + \frac{1}{7}D + \&c.$

Par exemple, en faisant $M = 1$, l'on trouvera la distance p de 125 à 126, la distance q de 224 à 225, la distance r de 2400 à 2401, & la distance s de 4374 à 4375.

Mais $p =$ la distance de 1 à 126 moins la distance de 1 à 125 $= l126 - l125 = l2.3^2.7 - l5^3 = l2 + 2l3 - 3l5 + l7$.

$q = l225 - l224 = l3^2.5^2 - l2^5.7 = -5l2 + 2l3 + 2l5 - l7$.

$r = l2401 - l2400 = l7^4 - l2^5.3.5^2 = -5l2 - l3 - 2l5 + 4l7$.

$s = l4375 - l4374 = l5^4.7 - l2.3^7 = -l2 - 7l3 + 4l5 + l7$.

Donc $ap = al2 + 2al3 - 3al5 + al7$.

$bq = -5bl2 + 2bl3 + 2bl5 - bl7$.

$cr = -5cl2 - cl3 - 2cl5 + 4cl7$.

$ds = -dl2 - 7dl3 + 4dl5 + dl7$.

Je veux que a, b, c, d, soient tels que $ap + bq + cr + ds = l2 + l5$.

Je trouve $a = 239$, $b = 90$, $c = -63$, $d = 103$; donc $239p + 90q - 63r + 103s$ ou 2302585092994, &c. $= l\,10$.

Quelle eſt la valeur qu'il auroit fallu donner à M pour trouver $1 = l\,10$, comme dans les Tables des logarithmes de Brigs & d'Ulac? on aura le logarithme 2302585092994 de 10 que nous venons de trouver, au logarithme 1 du même nombre 10, comme la valeur 1 que nous avons donnée à M, à la valeur qu'il auroit fallu lui donner.

Donc $M = \frac{1}{2302585092994} = \frac{1000000000000}{2302585092994} = \frac{1000000000000}{2302585092994}$ ou $\frac{1000000000000}{2302585092994} = 0,434294481903$, &c.

En mettant pour M cette valeur, on aura

$M(202p + 76q - 53r + 87s) = l\,7$,

$M(167p + 63q - 44r + 72s) = l\,5$,

$M(114p + 43q - 30r + 49s) = l\,3$ &

$1 - M(167p + 63q - 44r + 72s) = l\,2$.

Ayant M & les logarithmes des nombres premiers, 2, 3, 5, 7, au deſſous de 10, pour avoir les logarithmes des nombres premiers, 11, 13, 17, 19, &c. au deſſus de 10, ſoit A un nombre premier quelconque, je ſuppoſe qu'on a les logarithmes de tous les nombres premiers qui précèdent A, on aura $lA = \frac{1}{2}\left[l\frac{A^2}{A^2-1} + l(A-1) + l(A+1)\right]$; mais $l\frac{A^2}{A^2-1} =$ la diſtance de $A^2 - 1$ à A^2, que nous venons d'apprendre à déterminer, & $l(A-1)$, $l(A+1)$ ſont donnés.

DOUTES

DOUTES sur la Méthode d'Approximation dont M. Clairaut s'eſt ſervi pour déterminer le mouvement de la Lune autour de la Terre, & autre route pour la ſolution de ce Problème.

DEUX corps T & L s'attirent mutuellement, & ſont attirés par un troiſième corps S en raiſon des maſſes & en raiſon inverſe du quarré des diſtances : le mouvement de S autour de T étant donné, trouver celui de L auſſi autour de T.

La force qui accélère L vers T, eſt $= \frac{T}{(TL)^2}$; celle qui l'accélère vers S, eſt $= \frac{S}{(LS)^2}$.

La force qui accélère T vers L, eſt $= \frac{L}{(TL)^2}$; celle qui l'accélère vers S, eſt $= \frac{S}{(TS)^2}$.

Je ne changerois rien au mouvement de ces trois corps entr'eux, ſi à un même inſtant quelconque je leur imprimois une vîteſſe égale & directement contraire à la vîteſſe qu'auroit le corps T dans cet inſtant, & ſi à tous les inſtans ſuivans, outre les forces qui les accéléreroient, je les accélérois de plus par des forces égales & directement contraires à celles qui accéléreroient le corps T dans ces inſtans.

Par ce moyen, le corps T ſeroit en repos dans l'eſpace abſolu ; les corps S, L continueroient de ſe mouvoir autour de T comme ils s'y meuvent, & le corps L ſeroit perpétuellement accéléré par quatre forces ; ſavoir :

1.° Dans la direction LT par la force $\frac{T}{(TL)^2}$.

2.° Dans la direction TL par la force $\frac{-L}{(TL)^2}$.

3.° Dans la direction LS par la force $\frac{S}{(LS)^2}$.

4.° Enfin dans la direction TS par la force $\frac{-S}{(TS)^2}$.

Je suppose que le corps S se meut autour de T dans le plan γTS, & que Sf, Ll sont deux petites lignes que parcourent en même temps les corps S, L.

Du point S je mène au plan LTl la perpendiculaire SS', & du point S' je mène à TL la perpendiculaire $S'P$.

La force $\frac{S}{(LS)^2}$ dans la direction LS, peut être regardée comme résultante d'une force dans la direction $S'S = \frac{S.SS'}{(LS)^3}$, & d'une force dans la direction $LS' = \frac{S.LS'}{(LS)^3}$.

La force $\frac{S.LS'}{(LS)^3}$ dans la direction LS', peut être regardée comme résultante d'une force dans la direction $TL = \frac{S.LP}{(LS)^3}$; & d'une force dans la direction $PS' = \frac{S.S'P}{(LS)^3}$.

La force $\frac{-S}{(TS)^2}$ dans la direction TS, peut être regardée comme résultante d'une force dans la direction $S'S = \frac{-S.SS'}{(TS)^3}$, & d'une force dans la direction $TS' = \frac{-S.TS'}{(TS)^3}$.

La force $\frac{-S.TS'}{(TS)^3}$ dans la direction TS', peut être regardée comme résultante d'une force dans la direction $TL = \frac{-S.TP}{(TS)^3}$, & d'une force dans la direction $PS' = \frac{-S.S'P}{(TS)^3}$.

La force qui accélère le corps L dans la direction LT est donc $= \frac{T+L}{(TL)^2} - \frac{S.LP}{(LS)^3} + \frac{S.TP}{(TS)^3} = \Sigma$.

Celle qui l'accélère dans la direction PS', eſt $= \frac{S.S'P}{(LS)^3} - \frac{S.S'P}{(TS)^3} = \Pi$.

Celle enfin qui l'accélère dans la direction $S'S$, eſt $= \frac{S.SS'}{(LS)^3} - \frac{S.SS'}{(TS)^3} = \Psi$.

Soit l'angle $LTl = \dot{v}$, $TL = r$, le temps que le corps L met à parcourir $Ll = \dot{x}$, l'arc LR, décrit du centre T & du rayon TL qui coupe Tl en R, ſera $= r\dot{v}$, $Rl = \dot{r}$, $Ll = \sqrt{(r^2\dot{v}^2 + \dot{r}^2)} = \dot{f}$.

La vîteſſe angulaire de L autour de $T = \frac{\dot{v}}{\dot{x}}$, & ſa vîteſſe autour de $T = r(\frac{\dot{v}}{\dot{x}})$; la force centrifuge de $L = r(\frac{\dot{v}}{\dot{x}})^2$; la vîteſſe de L le long de $TL = \frac{\dot{r}}{\dot{x}}$.

Par le principe qu'une force agiſſant ſans ceſſe eſt égale à l'effet qu'elle produit, diviſé par le temps qu'elle met à le produire, on aura cette équation-ci, $r(\frac{\dot{v}}{\dot{x}})^2 - \Sigma = \frac{d(\frac{\dot{r}}{\dot{x}})}{\dot{x}}$.

Le corps L arrivé en l continueroit de ſe mouvoir dans la direction Ll avec la vîteſſe avec laquelle il vient de parcourir Ll.

Soit la la ligne qu'il parcourroit dans le ſecond inſtant, on aura $\dot{f} : la :: \dot{x} : \dot{x}'$ ou $\dot{f} : la - \dot{f} :: \dot{x} : \ddot{x}$; donc $la = \dot{f} + \frac{\dot{f}\ddot{x}}{\dot{x}}$.

Mais à cauſe de la force Σ' dans la direction lT, le corps L a auſſi au point l une petite vîteſſe dans cette direction $= \Sigma'\dot{x}'$, en vertu de laquelle il parcourroit dans le ſecond inſtant une ligne $= \Sigma'\dot{x}'\dot{x}' = \Sigma\dot{x}^2 + d(\Sigma\dot{x}^2) = \Sigma\dot{x}^2$.

Et à cauſe de la force Π' dans la direction pf', le corps L parcourroit pareillement dans le ſecond inſtant une ligne $= \Pi \dot{x}^2$.

Soit ab parallèle à pf' & $= \Pi \dot{x}^2$, ac parallèle à lT & $= \Sigma \dot{x}^2$, & ſoit achevé le rectangle $abhc$.

Le corps L, en vertu de ſa vîteſſe & des deux forces précédentes, parcourroit donc la ligne lh.

Du centre l & du rayon lh ſoit décrit l'arc $h\partial$ qui coupe la au point ∂, laquelle a déjà été coupée par bh au point g.

On aura les deux triangles abg, ghd ſemblables entre eux, & au triangle LRl.

Donc $ag = ab.\frac{\dot{f}}{r\dot{v}}$, $bg = ab.\frac{\dot{r}}{r\dot{v}}$; donc $gh = \Sigma \dot{x}^2 - \frac{\dot{r}}{r\dot{v}}\Pi \dot{x}^2$ & $g\partial = la - \dot{f} - \frac{\dot{f}}{r\dot{v}}\Pi \dot{x}^2 = -\ddot{f} + \frac{\dot{f}\ddot{x}}{\dot{x}} - \frac{\dot{f}}{r\dot{v}}\Pi \dot{x}^2$.

Donc $\frac{gh}{g\partial} = \frac{\dot{f}}{\dot{r}}$, ou $d(\frac{\dot{f}^2}{\dot{x}^2}) + 2\Sigma \dot{r} + 2\Pi r\dot{v} = 0$, ou $d(\frac{r^2\dot{v}^2 + \dot{r}^2}{\dot{x}^2}) + 2\Sigma \dot{r} + 2\Pi r\dot{v} = 0$.

Par la première équation, on aura $2\Sigma \dot{r} = 2r\dot{r}(\frac{\dot{v}^2}{\dot{x}^2}) - d(\frac{\dot{r}^2}{\dot{x}^2})$, & en ſubſtituant cette valeur de $2\Sigma \dot{r}$ dans la ſeconde, on aura $d(\frac{r^2\dot{v}^2}{\dot{x}^2}) + 2r\dot{r}(\frac{\dot{v}^2}{\dot{x}^2}) + 2\Pi r\dot{v} = 0$,

ou $r^2 d(\frac{\dot{v}^2}{\dot{x}^2}) + 4r\dot{r}(\frac{\dot{v}^2}{\dot{x}^2}) + 2\Pi r\dot{v} = 0$,

ou $r^4 d(\frac{\dot{v}^2}{\dot{x}^2}) + 4r^3\dot{r}(\frac{\dot{v}^2}{\dot{x}^2}) + 2\Pi r^3\dot{v} = 0$;

& en intégrant, on aura $\frac{r^4\dot{v}^2}{\dot{x}^2} + 2\int \Pi r^3\dot{v} = f^2$, d'où l'on tirera $\dot{x} = \frac{r^2\dot{v}}{\sqrt{(f^2 - 2\int \Pi r^3\dot{x})}}$.

Je fubſtitue cette valeur de $\dot{x}$ dans la première équation ; mais auparavant je fais $T + L = M$, & $\Sigma = \frac{M}{r^2} + \Phi$. J'aurai $2r\dot{r}\left(\frac{f^2 - 2\int \Pi r^3 \dot{v}}{r^4}\right) - d\left[\left(f^2 - 2\int \Pi r^3 \dot{v}\right)\frac{\dot{r}^2}{r^4 \dot{v}^2}\right] = \frac{2M\dot{r}}{r^2} + 2\Phi\dot{r}$, ou $\frac{2\dot{r}}{r^3}\left(f^2 - 2\int \Pi r^3 \dot{v}\right) - d\left(\frac{\dot{r}^2}{r^4\dot{v}^2}\right)\left(f^2 - 2\int \Pi r^3 \dot{v}\right) - \frac{\dot{r}^2}{r^4\dot{v}^2} d\left(f^2 - 2\int \Pi r^3 \dot{v}\right) = \frac{2M\dot{r}}{r^2} + 2\Phi\dot{r}$, ou $\frac{2\dot{r}}{r^3} - d\left(\frac{\dot{r}}{r^2\dot{v}}\right)^2 = \frac{\frac{2M\dot{r}}{r^2} + 2\Phi\dot{r} - \frac{2\Pi r^2 \dot{r}}{\dot{v}}}{f^2 - 2\int \Pi r^3 \dot{v}}$, ou

$$\frac{f^2}{Mr} - \frac{f^2}{M\dot{v}} d\left(\frac{\dot{r}}{r^2\dot{v}}\right) = \frac{1 + \frac{\Phi r^2}{M} - \frac{\Pi r \dot{r}}{M\dot{v}}}{1 - 2\int \frac{\Pi r^3 \dot{v}}{f^2}}, \text{ ou}$$

$$-1 + \frac{f^2}{Mr} - \frac{f^2}{M\dot{v}} d\left(\frac{\dot{r}}{r^2\dot{v}}\right) = \frac{\frac{\Phi r^2}{M} - \frac{\Pi r \dot{r}}{M\dot{v}} + 2\int \frac{\Pi r^3 \dot{v}}{f^2}}{1 - 2\int \frac{\Pi r^3 \dot{v}}{f^2}} = \Omega.$$

Soit $\dot{v}$ conſtant, on aura $-1 + \frac{f^2}{Mr} - \frac{f^2}{M\dot{v}^2} d\left(\frac{\dot{r}}{r^2}\right) = \Omega$; mais parce que $\frac{\dot{r}}{r^2} = -d\left(\frac{1}{r}\right)$, on aura

$$\frac{f^2}{Mr} - 1 + \frac{\frac{f^2}{M} dd\left(\frac{1}{r}\right)}{\dot{v}^2} = \Omega,$$

$$\text{ou } \frac{f^2}{Mr} - 1 + \frac{dd\left(\frac{f^2}{Mr}\right)}{\dot{v}^2} = \Omega,$$

$$\text{ou } \frac{f^2}{Mr} - 1 + \frac{dd\left(\frac{f^2}{Mr} - 1\right)}{\dot{v}^2} = \Omega,$$

$$\text{ou enfin } \left(1 - \frac{f^2}{Mr}\right) + \frac{dd\left(1 - \frac{f^2}{Mr}\right)}{\dot{v}^2} + \Omega = 0.$$

Je ſuppoſe que l'on ſache que $\alpha + \zeta \cos. \mu v$ eſt une valeur approchée de $\frac{1}{r}$, ſans cependant connoître les conſtantes α, ζ, μ, & qu'en ſubſtituant $\alpha + \zeta \cos. \mu v$ au lieu de $\frac{1}{r}$ dans Ω, l'on parvienne à rendre $\Omega = A + B \cos. mv + D \cos. nv +$ &c. on aura $\left(1 - \frac{f^2}{Mr}\right) + \frac{dd\left(1 - \frac{f^2}{Mr}\right)}{\dot{v}^2} + A + B \cos. mv + D \cos. nv +$ &c. $= 0$.

A, B, D, &c. m, n, &c. déſignent des fonctions données des inconnues α, ζ, μ; & en multipliant par $\cos. v \dot{v}$, on aura $\left(1 - \frac{f^2}{Mr}\right) \cos. v \dot{v} + \frac{dd\left(1 - \frac{f^2}{Mr} \cos. v\right)}{\dot{v}} +$ $A \cos. v \dot{v} + B \cos. mv \cos. v \dot{v} + D \cos. nv \cos. v \dot{v} = 0$; & en intégrant, on aura $\frac{d\left(1 - \frac{f^2}{Mr}\right) \cos. v}{\dot{v}} +$ $\left(1 - \frac{f^2}{Mr}\right) \sin. v + A \sin. v + B. \frac{m \cos. v \sin. mv - \sin. v \cos. mv}{m^2 - 1}$ $+ D. \frac{n \cos. v \sin. nv - \sin. v \cos. nv}{n^2 - 1} +$ &c. $= g$.

Je veux que lorſque l'angle $v = 0$, le rayon vecteur ſoit perpendiculaire à la courbe, c'eſt-à-dire, qu'à ce point $\dot{r}$ ſoit $= 0$; j'aurai $g = 0$; & en multipliant par $\frac{\dot{v}}{(\cos. v)^2}$, j'aurai $\frac{d\left(1 - \frac{f^2}{Mr}\right)}{\cos. v} + \frac{\left(1 - \frac{f^2}{Mr}\right) \sin. v \dot{v}}{(\cos. v)^2} +$ $\frac{A \sin. v \dot{v}}{(\cos. v)^2} + \frac{B}{m^2 - 1} \cdot \frac{m \cos. v \sin. mv \dot{v} - \sin. v \cos. mv \dot{v}}{(\cos. v)^2} +$ $\frac{D}{n^2 - 1} \cdot \frac{n \cos. v \sin. nv \dot{v} - \sin. v \cos. nv \dot{v}}{(\cos. v)^2} +$ &c. $= 0$.

En intégrant, j'aurai $\frac{1-\frac{f^2}{Mr}}{\text{cos. } v} + \frac{A}{\text{cos. } v} - \frac{B}{m^2-1}\frac{\text{cos. } mv}{\text{cos. } v} - \frac{D}{n^2-1}\frac{\text{cos. } nv}{\text{cos. } v} - \&c. = h$,

ou $\frac{1}{r} = \frac{M}{f^2} + \frac{MA}{f^2} - \frac{Mh\,\text{cos. } v}{f^2} - \frac{MB}{f^2(m^2-1)}\,\text{cos. } mv - \frac{MD}{f^2(n^2-1)}\,\text{cos. } nv - \&c.$

Les lettres A, B, D, &c. m, n, &c. désignent, comme nous l'avons dit, des fonctions données des inconnues α, ζ, μ; par conséquent, si l'on étoit effectivement sûr que $\alpha + \zeta\,\text{cos. } \mu v$ est une valeur approchée de $\frac{1}{r}$; si de plus les constantes α, ζ, μ étoient données, & si toutes les négligences que l'on a été obligé de faire pour rendre $\Omega = A + B\,\text{cos. } mv + D\,\text{cos. } nv + \&c.$ n'étoient pas trop fortes, l'équation $\frac{1}{r} = \frac{M}{f^2} + \frac{MA}{f^2} - \frac{Mh}{f^2}\,\text{cos. } v - \frac{MB}{f^2(m^2-1)}\,\text{cos. } mv - \frac{MD}{f^2(n^2-1)}\,\text{cos. } nv - \&c.$ seroit plus vraie que celle-ci, $\frac{1}{r} = \alpha + \zeta\,\text{cos. } \mu v$, & l'on pourroit s'en servir pour en trouver une autre encore plus approchée, comme l'on s'est servi de celle-ci, $\frac{1}{r} = \alpha + \zeta\,\text{cos. } \mu v$.

Mais comme les constantes α, ζ, μ ne sont pas données, M. Clairaut, pour les déterminer, fait égales ensemble les deux valeurs de $\frac{1}{r}$, celle qu'il a supposé, & celle qu'il en a déduit, & il faut, pour cet effet, qu'il fasse la constante h, que nous avons ajoûtée en intégrant, $= 0$; or il est certain que si les constantes α, ζ, μ étoient données, M. Clairaut ne feroit pas $h = 0$: pourquoi? parce que ces constantes ne sont pas données, est-il plus permis de faire $h = 0$? Il est vrai que de la manière dont M. Clairaut a intégré

son équation, il a pû ne pas s'apercevoir que ce qu'il faisoit revenoit à faire $h = 0$.

Je suppose que les forces φ & π fussent telles que l'on eût tout de suite, & sans aucune supposition $\Omega = A + B \cos. mv + D \cos. nv +$ &c. A, B, D, &c. m, n, &c. étant des quantités données, pour avoir l'équation de l'orbite de la Lune autour de la Terre, on intégreroit cette équation-ci, $\left(1 - \frac{f^2}{Mr}\right) + \frac{dd\left(1 - \frac{f^2}{Mr}\right)}{\dot{v}^2} + A + B \cos. mv + D \cos. nv + E \cos. pv +$ &c. $= 0$, & l'on détermineroit les constantes que l'on auroit ajoûtées en intégrant par quelques phénomènes du mouvement de la Lune, au lieu de les déterminer arbitrairement.

Soient, par exemple, $\varphi = \frac{V\dot{r}}{r^4 \dot{v}} + \frac{W}{r^2}$ & $\pi = \frac{V}{r^3}$ (V & W étant deux fonctions quelconques de v qui sont données) on aura $\Omega = \frac{\frac{W}{M} + 2\int \frac{V\dot{v}}{f^2}}{1 - 2\int \frac{V\dot{v}}{f^2}}$; fera-t-on $h = 0$?

D'ailleurs, je ne sais pas comment M. Clairaut a pû savoir que cette équation-ci $\frac{1}{r} = \alpha + \zeta \cos. \mu v$ approchoit beaucoup d'être l'équation de l'orbite de la Lune autour de la Terre, sans connoître en même temps les constantes α, ζ, μ. Si c'étoit réellement là l'équation de cette orbite à peu près, la meilleure façon seroit de tâcher de déterminer les constantes α, ζ, μ par quelques phénomènes du mouvement de la Lune, & ensuite de voir si elle satisferoit à tous les autres phénomènes du mouvement de cet astre; l'on supposeroit ensuite $\frac{1}{r} = \alpha + \zeta \cos. \mu v + \gamma \cos. \nu v$, mais α, ζ, μ n'auroient

n'auroient pas dans cette ſeconde ſuppoſition les mêmes valeurs que dans la première, ce qui eſt encore un des défauts de la ſolution de M. Clairaut, lorſqu'il joint de nouveaux termes à ſon équation, il ſuppoſe que les coëfficiens des premiers reſtent les mêmes.

De la ſolution de M. Clairaut, il ſuit que ſans l'action du Soleil la Lune décriroit autour de la Terre un cercle ; car tous les autres termes de ſon équation ſont dûs à l'action du Soleil.

Voici maintenant une autre route que l'on pourroit prendre pour réſoudre ce problème-ci à la manière de M. Clairaut.

Je reprends l'équation $1 - \frac{f^2}{Mr} + \frac{dd\left(\frac{-f^2}{Mr}\right)}{\dot{v}^2} + \Omega = 0$, & je l'écris ainſi,

$$1 - \frac{f^2}{Mr} + \frac{e}{r} + \frac{dd\left(\frac{-f^2}{Mr}\right)}{\dot{v}^2} + \Omega - \frac{e}{r} = 0, \text{ ou ainſi,}$$

$$\left(1 - \frac{f^2 - eM}{Mr}\right) + \frac{dd\left(-\frac{f^2 - eM}{Mr}\right)}{\frac{f^2 - eM}{f^2}\dot{v}^2} + \Omega - \frac{e}{r} = 0, \text{ ou}$$

$$\left(1 - \frac{f^2 - eM}{Mr}\right) + \frac{dd\left(1 - \frac{f^2 - eM}{Mr}\right)}{\frac{1}{f}\sqrt{(f^2 - eM)}\dot{v} \times \frac{1}{f}\sqrt{(f^2 - eM)}\dot{v}} + \Omega - \frac{e}{r} = 0.$$

Je multiplie par $\text{cof.}\ \frac{1}{f}\sqrt{(f^2 - eM)}v \times \frac{1}{f}\sqrt{(f^2 - eM)}\dot{v}$, j'aurai $\left(1 - \frac{f^2 - eM}{Mr}\right) \text{cof.}\ \frac{1}{f}\sqrt{(f^2 - eM)}v \times \frac{1}{f}\sqrt{(f^2 - eM)}\dot{v}$

$$+ \frac{dd\left(1 - \frac{f^2 - eM}{Mr}\right) \text{cof.}\ \frac{1}{f}\sqrt{(f^2 - eM)}v}{\frac{1}{f}\sqrt{(f^2 - eM)}\dot{v}} + \left(\Omega - \frac{e}{r}\right) \cdot$$

$$\text{cof.}\ \frac{1}{f}\sqrt{(f^2 - eM)}v \times \frac{1}{f}\sqrt{(f^2 - eM)}\dot{v} = 0, \&$$

en intégrant, j'aurai $\frac{d\left(1-\frac{f^2-eM}{Mr}\right)\cos.\frac{1}{f}\sqrt{(f^2-eM)}v}{\frac{1}{f}\sqrt{(f^2-eM)}\dot{v}}+$

$\left(1-\frac{f^2-eM}{Mr}\right)\sin.\frac{1}{f}\sqrt{(f^2-eM)}v+\int\left(\Omega-\frac{e}{r}\right)$

$\cos.\frac{1}{f}\sqrt{(f^2-eM)}v\times\frac{1}{f}\sqrt{(f^2-eM)}\dot{v}=g.$

Je multiplie par

$\frac{\frac{1}{f}\sqrt{(f^2-eM)}\dot{v}}{\left[\cos.\frac{1}{f}\sqrt{(f^2-eM)}v\right]^2}$; j'aurai $\frac{d\left(1-\frac{f^2-eM}{Mr}\right)}{\cos.\frac{1}{f}\sqrt{(f^2-eM)}v}+$

$\frac{\left(1-\frac{f^2-eM}{Mr}\right)\sin.\frac{1}{f}\sqrt{(f^2-eM)}v.\frac{1}{f}\sqrt{(f^2-eM)}\dot{v}}{\left[\cos.\frac{1}{f}\sqrt{(f^2-eM)}v\right]^2}+$

$\frac{\frac{1}{f}\sqrt{(f^2-eM)}\dot{v}}{\left[\cos.\frac{1}{f}\sqrt{(f^2-eM)}v\right]^2}\int\left(\Omega-\frac{e}{r}\right)\cos.\frac{1}{f}\sqrt{(f^2-eM)}v;$

$\frac{1}{f}\sqrt{(f^2-eM)}v=\frac{g\frac{1}{f}\sqrt{(f^2-eM)}\dot{v}}{\left[\cos.\frac{1}{f}\sqrt{(f^2-eM)}v\right]^2}$; & en inté-

grant, j'aurai $\frac{\left(1-\frac{f^2-eM}{Mr}\right)}{\cos.\frac{1}{f}\sqrt{(f^2-eM)}v}+\frac{\sin.\frac{1}{f}\sqrt{(f^2-eM)}v}{\cos.\frac{1}{f}\sqrt{(f^2-eM)}v}$

$\int\left(\Omega-\frac{e}{r}\right)\cos.\frac{1}{f}\sqrt{(f^2-eM)}v.\frac{1}{f}\sqrt{(f^2-eM)}\dot{v}-$

$\int\left(\Omega-\frac{e}{r}\right)\sin.\frac{1}{f}\sqrt{(f^2-eM)}v.\frac{1}{f}\sqrt{(f^2-eM)}\dot{v}=$

$\frac{g\sin.\frac{1}{f}\sqrt{(f^2-eM)}v}{\cos.\frac{1}{f}\sqrt{(f^2-eM)}v}+h$, ou

$\frac{1}{r} = \frac{M}{f^2 - eM} - \frac{Mg}{f^2 - eM} \text{ sin. } \frac{1}{f}\sqrt{(f^2 - eM)}\,v - \frac{Mh}{f^2 - eM}$
$\text{cos. } \frac{1}{f}\sqrt{(f^2 - eM)}\,v + \frac{M}{f^2 - eM} \text{ sin. } \frac{1}{f}\sqrt{(f^2 - eM)}\,v$
$\int (\Omega - \frac{e}{r}) \text{ cos. } \frac{1}{f}\sqrt{(f^2 - eM)}\,v \times \frac{1}{f}\sqrt{(f^2 - eM)}\,\dot{v}$
$- \frac{M}{f^2 - eM} \text{ cos. } \frac{1}{f}\sqrt{(f^2 - eM)}\,v \int (\Omega - \frac{e}{r})$
$\text{sin. } \frac{1}{f}\sqrt{(f^2 - eM)}\,v \cdot \frac{1}{f}\sqrt{(f^2 - eM)}\,\dot{v}.$

Pour première approximation, je fais $\Omega - \frac{e}{r} = 0$; j'aurai $\frac{1}{r} = \frac{M}{f^2 - eM} - \frac{Mg}{f^2 - eM} \text{ sin. } \frac{1}{f}\sqrt{(f^2 - eM)}\,v -$
$\frac{Mh}{f^2 - eM} \text{ cos. } \frac{1}{f}\sqrt{(f^2 - eM)}\,v.$

Au moyen de ces deux équations, & des autres équations du Problème, j'aurai une équation dans laquelle il n'y aura qu'une seule indéterminée; je ferai le coëfficient de chaque terme de cette équation $= 0$, &c.

SUR LE MOUVEMENT DE LA LUNE AUTOUR DE LA TERRE, d'après le ſyſtème de la Peſanteur.

LEMME I.

JE ſuppoſe que x & z ſont deux quantités indéterminées, qui dépendent l'une de l'autre, ou entre leſquelles il règne une équation dans la nature des choſes, & que l'indéterminée z va toûjours en croiſſant; ſi par aucune voie connue on ne peut parvenir à trouver l'expreſſion de x en z, ni abſolument, ni par approximation, voici une méthode pour avoir cette expreſſion par le moyen de pluſieurs obſervations, du moins pour l'intervalle compris entre la première & la dernière obſervation.

Soient, par exemple, a, a, a, a, a, cinq valeurs ſucceſſives de z, & $\alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha$, autant de valeurs correſpondantes de x. Je fais $x = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4$; par conſéquent, j'aurai $\alpha = A + aB + a^2C + a^3D + a^4E$, & en différenciant, j'aurai

$$\frac{\alpha - \alpha}{a - a} = \mathfrak{C} = B + (a + a)C + (a^2 + aa + a^2)D + (a^3 + a^2a + aa^2 + a^3)E,$$

$$\frac{\mathfrak{C} - \mathfrak{C}}{a - a} = \gamma = C + (a + a + a)D + (a^2 + aa + aa^2 + a + aa + a^2)E,$$

$$\frac{\gamma - \gamma}{a - a} = \mathfrak{D} = D + (a + a + a + a)E,$$

$$\frac{\mathfrak{D} - \mathfrak{D}}{a - a} = \varepsilon = E.$$

Donc $A = \alpha - a\mathcal{C} + aa\gamma - aaa\delta + aaaa\varepsilon$,

$B = \mathcal{C} - (a + a)\gamma + (aa + aa + aa)\delta - (aaa + aaa + aaa + aaa)\varepsilon$,

$C = \gamma - (a + a + a)\delta + (aa + aa + aa + aa + aa + aa)\varepsilon$,

$D = \delta - (a + a + a + a)\varepsilon$,

$E = \varepsilon$.

Donc $x = \alpha - a\mathcal{C} + aa\gamma - aaa\delta + aaaa\varepsilon + [\mathcal{C} - (a + a).\gamma + (aa + aa + aa)\delta - (aaa + aaa + aaa + aaa).\varepsilon]z + [\gamma - (a + a + a)\delta + (aa + aa + aa + aa + aa + aa).\varepsilon]z^2 + [\delta - (a + a + a + a).\varepsilon]z^3 + \varepsilon z^4$, ou

$x = \alpha + \mathcal{C}(z - a) + \gamma(z - a)(z - a) + \delta(z - a)(z - a)(z - a) + \varepsilon(z - a)(z - a)(z - a)(z - a)$.

Si nous étions partis de six observations, nous aurions fait $x = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5$, & nous aurions eu

$A = \alpha - a\mathcal{C} + aa\gamma - aaa\delta + aaaa\varepsilon - aaaaa\zeta$.

$B = \mathcal{C} - (a + a)\gamma + (aa + aa + aa)\delta - (aaa + aaa + aaa + aaa)\varepsilon + (aaaa + aaaa + aaaa + aaaa + aaaa)\zeta$.

$C = \gamma - (a + a + a)\delta + (aa + aa + aa + aa + aa + aa)\varepsilon - (aaa + aaa + aaa +$

$$aaa + aaa + aaa + aaa + aaa + aaa)\zeta.$$

$$D = \delta - (a + a + a + a)\varepsilon + (aa + aa + aa + aa + aa + aa + aa + aa + aa + aa)\zeta.$$

$$E = \varepsilon - (a + a + a + a + a)\zeta.$$

$$F = \zeta.$$

Donc $x =$ &c. ou $x = \alpha + \beta(z - a) + \gamma(z-a)(z-a) + \delta(z-a)(z-a)(z-a) + \varepsilon(z-a)(z-a)(z-a)(z-a) + \zeta(z-a)(z-a)(z-a)(z-a)(z-a)$ &c.

Quant aux coëfficiens β, γ, δ, ε, ζ, &c. on les déterminera de la manière ſuivante.

$$\frac{\alpha - \alpha}{a - a} \quad \frac{\alpha - \alpha}{a - a} \quad \frac{\alpha - \alpha}{a - a} \quad \frac{\alpha - \alpha}{a - a} \quad \frac{\alpha - \alpha}{a - a} \text{ &c.}$$
$$\beta \qquad \beta \qquad \beta \qquad \beta \qquad \beta$$

$$\frac{\beta - \beta}{a - a} \quad \frac{\beta - \beta}{a - a} \quad \frac{\beta - \beta}{a - a} \quad \frac{\beta - \beta}{a - a} \text{ &c.}$$
$$\gamma \qquad \gamma \qquad \gamma \qquad \gamma$$

$$\frac{\gamma - \gamma}{a - a} \quad \frac{\gamma - \gamma}{a - a} \quad \frac{\gamma - \gamma}{a - a} \text{ &c.}$$
$$\delta \qquad \delta \qquad \delta$$

$$\frac{\delta - \delta}{a - a} \quad \frac{\delta - \delta}{a - a} \text{ &c.}$$
$$\varepsilon \qquad \varepsilon$$

$$\frac{\varepsilon - \varepsilon}{a - a} \text{ &c.}$$

LEMME II.

Je suppose que vous ayez une équation entre z, $\dot{z}$, x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dddot{x}$, &c. à laquelle vous soyez arrivé, en faisant $\dot{z}$ constant, & que vous vouliez avoir x en z.

z étant $= a$, soit $x = c$, $\dot{x} = \dot{c}$, $\ddot{x} = \ddot{c}$, $\dddot{x} = \dddot{c}$, &c. à l'infini.

z étant $a + v$, on aura $x = c + \alpha v \frac{\dot{c}}{\dot{z}} + \beta v^2 \frac{\ddot{c}}{\dot{z}^2} + \gamma v^3 \frac{\dddot{c}}{\dot{z}^3} + \delta v^4 \frac{\ddddot{c}}{\dot{z}^4} +$ &c.

Il faut déterminer les coëfficiens α, β, γ, δ, &c.

En différenciant, on aura $\dot{x} = \alpha \dot{c} + 2\beta v \frac{\ddot{c}}{\dot{z}} + 3\gamma v^2 \frac{\dddot{c}}{\dot{z}^2} + 4\delta v^3 \frac{\ddddot{c}}{\dot{z}^3} +$ &c.

Mais chaque coëfficient de cette dernière suite doit être égal à son correspondant dans la première.

Donc $\alpha = 1$, $2\beta = \alpha$ ou $\beta = \frac{1}{2}$, $3\gamma = \beta$ ou $\gamma = \frac{1}{2.3}$, $4\delta = \gamma$ ou $\delta = \frac{1}{2.3.4}$, &c.

Par conséquent, z étant $a + v$, on aura $x = c + \frac{v}{1} \frac{\dot{c}}{\dot{z}} + \frac{v^2}{1.2} \frac{\ddot{c}}{\dot{z}^2} + \frac{v^3}{1.2.3} \frac{\dddot{c}}{\dot{z}^3} + \frac{v^4}{1.2.3.4} \frac{\ddddot{c}}{\dot{z}^4} +$ &c.

Maintenant au moyen de l'équation donnée & de ses différences à l'infini, vous aurez $\dddot{x}$, $\ddddot{x}$, $\dddddot{x}$, $\ddddddot{x}$, &c. en z, $\dot{z}$, x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$.

Par conséquent vous aurez $\dddot{c}$, $\ddddot{c}$, $\dddddot{c}$, $\ddddddot{c}$, &c. en a, $\dot{z}$, c, $\dot{c}$, $\ddot{c}$,

Substituez ces valeurs, & vous aurez x en $a, \dot{z}, c, \dot{c}, \ddot{c}$, & en v.

Remettez $z - a$ à la place de v, & vous aurez x en $a, z, \dot{z}, c, \dot{c}, \ddot{c}$, &c.

Faites $\dot{z} = 1$, & déterminez $c, \dot{c}, \ddot{c}$, en satisfaisant aux conditions de votre problème.

Si vous vouliez avoir z en x, il faudroit à la place de l'équation que vous avez, trouver celle que l'on auroit eue en ne faisant ni $\dot{x}$ ni $\dot{z}$ constant, & ensuite faire dans cette nouvelle équation $\ddot{x} = 0$, $\dddot{x} = 0$, &c.

PROBLÉME.

Deux corps T & L *(fig. 38.)* s'attirent mutuellement, & sont attirés par un troisième corps S en raison des masses & en raison inverse du quarré des distances : le mouvement de S autour de T étant donné, trouver celui de L aussi autour de T.

La force qui accélère L vers T, est $= \frac{T}{(TL)^2}$; celle qui l'accélère vers S, est $= \frac{S}{(LS)^2}$.

La force qui accélère T vers L, est $= \frac{L}{(TL)^2}$; celle qui l'accélère vers S, est $= \frac{S}{(TS)^2}$.

Je ne changerois rien au mouvement de ces trois corps entr'eux, si à un même instant quelconque je leur imprimois une vîtesse égale & directement contraire à la vîtesse qu'auroit le corps T dans cet instant, & si à tous les instans suivans, outre les forces qui les accéléreroient, je les accélérois de plus par des forces égales & directement contraires à celles qui accéléreroient le corps T dans ces instans.

Par

Par ce moyen, le corps T ſeroit en repos dans l'eſpace abſolu ; les corps S, L continueroient de ſe mouvoir autour de T comme ils s'y meuvent, & le corps L ſeroit perpétuellement accéléré par quatre forces ; ſavoir :

1.° Dans la direction LT par la force $\frac{T}{(TL)^2}$.

2.° Dans la direction TL par la force $\frac{-L}{(TL)^2}$.

3.° Dans la direction LS par la force $\frac{S}{(LS)^2}$.

4.° Enfin dans la direction TS par la force $\frac{-S}{(TS)^2}$.

Je ſuppoſe que le corps S ſe meut autour de T dans le plan γTS. Soient S & L les lieux des corps S & L dans un inſtant quelconque, du point L je mène au plan γTS la perpendiculaire LM, & du point M je mène à $T\gamma$ la perpendiculaire MP ; je fais $TP = p$, $PM = q$, $ML = r$; la force qui accélère L dans la direction $TP = -P$, celle qui l'accélère dans la direction $PM = -Q$, celle qui l'accélère dans la direction $ML = -R$; le temps $= t$.

En ſuppoſant i conſtant, j'aurai $\ddot{p} = -Pi^2$, $\ddot{q} = -Qi^2$, $\ddot{r} = -Ri^2$.

Soit l'angle $\gamma TS = \theta$, $TS = y$; l'angle $\gamma TM = \varphi$, l'angle STM ſera $= \varphi - \theta$. Soit l'angle $MTL = \downarrow$, $TL = x$; TM ſera $= x$ cof. $\downarrow$, $r = x$ ſin. $\downarrow$, $q = x$ cof. $\downarrow$ ſin. φ, $p = x$ cof. $\downarrow$ cof. φ.

Donc $dd(x \text{ cof. } \downarrow \text{ cof. } \varphi) = -Pi^2$,

$dd(x \text{ cof. } \downarrow \text{ ſin. } \varphi) = -Qi^2$,

$dd(x \text{ ſin. } \downarrow) = -Ri^2$.

Il ne s'agit donc plus que d'avoir l'expreſſion des forces P, Q, R.

Du point M je mène à TM la perpendiculaire MQ, & à TS la perpendiculaire ME; j'aurai $ME = x \cos.\psi \sin.(\varphi - \theta)$; $TE = x \cos.\psi \cos.(\varphi - \theta)$; donc $ES = y - x \cos.\psi \cos.(\varphi - \theta)$, $MS = \sqrt{[x^2 (\cos.\psi)^2 + y^2 - 2xy \cos.\psi \cos.(\varphi - \theta)]}$, $LS = \sqrt{[y^2 - 2xy \cos.\psi \cos.(\varphi - \theta) + x^2]} = u$.

La force $\frac{T+L}{x^2}$ dans la direction LT, peut être prise pour le résultat d'une force dans la direction $LM = \frac{(T+L)\sin.\psi}{x^2}$, & d'une force dans la direction $MT = \frac{(T+L)\cos.\psi}{x^2}$.

La force $\frac{S}{u^2}$ dans la direction LS, peut être prise pour le résultat d'une force dans la direction $LM = \frac{Sx \sin.\psi}{u^3}$, & d'une force dans la direction $MS = \frac{S.MS}{u^3}$.

La force $\frac{S.MS}{u^3}$ dans la direction MS, peut être prise pour le résultat d'une force dans la direction $MT = \frac{Sx \cos.\psi}{u^3}$, & d'une force dans la direction $TS = \frac{Sy}{u^3}$.

La force $\frac{Sy}{u^3} - \frac{S}{y^2}$ dans la direction TS, peut être prise pour le résultat d'une force dans la direction $MT = \frac{S\cos.(\varphi-\theta)}{y^2} - \frac{Sy\cos.(\varphi-\theta)}{u^3}$, & d'une force dans la direction $MQ = \frac{Sy\sin.(\varphi-\theta)}{u^3} - \frac{S\sin.(\varphi-\theta)}{y^2}$.

La force $\frac{(T+L)\cos.\psi}{x^2} + \frac{Sx\cos.\psi}{u^3} + \frac{S\cos.(\varphi-\theta)}{y^2} - \frac{Sy\cos.(\varphi-\theta)}{u^3}$ dans la direction MT, peut être prise pour le résultat d'une force dans la direction $PT = \frac{(T+L)\cos.\psi\cos.\varphi}{x^2} + \frac{Sx\cos.\psi\cos.\varphi}{u^3} + \frac{S\cos.\varphi\cos.(\varphi-\theta)}{y^2} - \frac{Sy\cos.\varphi\cos.(\varphi-\theta)}{u^3}$,

& d'une force dans la direction $MP = \frac{(T+L)\text{ cof.}\downarrow\text{ fin.}\varphi}{x^2} + \frac{S x\text{ cof.}\downarrow\text{ fin.}\varphi}{u^3} + \frac{S\text{ fin.}\varphi\text{ cof.}(\varphi-\theta)}{y^2} - \frac{S y\text{ fin.}\varphi\text{ cof.}(\varphi-\theta)}{u^3}$.

La force $\frac{S y\text{ fin.}(\varphi-\theta)}{u^3} - \frac{S\text{ fin.}(\varphi-\theta)}{y^2}$ dans la direction MQ, peut être prise pour le réſultat d'une force dans la direction $MP = \frac{S y\text{ cof.}\varphi\text{ fin.}(\varphi-\theta)}{u^3} - \frac{S\text{ cof.}\varphi\text{ fin.}(\varphi-\theta)}{y^2}$,

& d'une force dans la direction $PT = \frac{S\text{ fin.}\varphi\text{ fin.}(\varphi-\theta)}{y^2} - \frac{S y\text{ fin.}\varphi\text{ fin.}(\varphi-\theta)}{u^3}$.

On aura donc $P = \frac{(T+L)\text{ cof.}\downarrow\text{ cof.}\varphi}{x^2} + \frac{S x\text{ cof.}\downarrow\text{ cof.}\varphi}{u^3} + \frac{S\text{ cof.}\theta}{y^2} - \frac{S y\text{ cof.}\theta}{u^3}$,

$Q = \frac{(T+L)\text{ cof.}\downarrow\text{ fin.}\varphi}{x^2} + \frac{S x\text{ cof.}\downarrow\text{ fin.}\varphi}{u^3} + \frac{S\text{ fin.}\theta}{y^2} - \frac{S y\text{ fin.}\theta}{u^3}$,

$R = \frac{(T+L)\text{ fin.}\downarrow}{x^2} + \frac{S x\text{ fin.}\downarrow}{u^3}$,

& nos trois équations ſeront

$dd(x\text{ cof.}\downarrow\text{ cof.}\varphi) = -\left(\frac{(T+L)\text{ cof.}\downarrow\text{ cof.}\varphi}{x^2} + \frac{S x\text{ cof.}\downarrow\text{ cof.}\varphi}{u^3} - \frac{S y\text{ cof.}\theta}{u^3} + \frac{S\text{ cof.}\theta}{y^2}\right)t^2$,

$dd(x\text{ cof.}\downarrow\text{ fin.}\varphi) = -\left(\frac{(T+L)\text{ cof.}\downarrow\text{ fin.}\varphi}{x^2} + \frac{S x\text{ cof.}\downarrow\text{ fin.}\varphi}{u^3} - \frac{S y\text{ fin.}\theta}{u^3} + \frac{S\text{ fin.}\theta}{y^2}\right)t^2$,

$dd(x\text{ fin.}\downarrow) = -\left(\frac{(T+L)\text{ fin.}\downarrow}{x^2} + \frac{S x\text{ fin.}\downarrow}{u^3}\right)t^2$.

En multipliant la première par ſin. φ, la deuxième par

cos. φ, & en supposant $T + L = M$, j'aurai ces deux équations-ci,

$$dd(x\cos.\downarrow\cos.\varphi)\sin.\varphi = -\frac{M\cos.\downarrow\sin.\varphi\cos.\varphi}{x^2}\,t^2 - \frac{S x\cos.\downarrow\sin.\varphi\cos.\varphi}{u^3}\,t^2 + \frac{S y\sin.\varphi\cos.\theta}{u^3}\,t^2 - \frac{S\sin.\varphi\cos.\theta}{y^2}\,t^2,$$

$$dd(x\cos.\downarrow\sin.\varphi)\cos.\varphi = -\frac{M\cos.\downarrow\sin.\varphi\cos.\varphi}{x^2}\,t^2 - \frac{S x\cos.\downarrow\sin.\varphi\cos.\varphi}{u^3}\,t^2 + \frac{S y\cos.\varphi\sin.\theta}{u^3}\,t^2 - \frac{S\cos.\varphi\sin.\theta}{y^2}\,t^2,$$

qui, étant ôtées l'une de l'autre, donneront celle-ci,

$$dd(x\cos.\downarrow\cos.\varphi)\sin.\varphi - dd(x\cos.\downarrow\sin.\varphi)\cos.\varphi = \frac{S y\sin.(\varphi-\theta)}{u^3}\,t^2 - \frac{S\sin.(\varphi-\theta)}{y^2}\,t^2.$$

En multipliant la première par cos. φ, la deuxième par sin. φ, j'aurai ces deux équations-ci,

$$dd(x\cos.\downarrow\cos.\varphi)\cos.\varphi = -\frac{M\cos.\downarrow(\cos.\varphi)^2}{x^2}\,t^2 - \frac{S x\cos.\downarrow(\cos.\varphi)^2}{u^3}\,t^2 + \frac{S y\cos.\varphi\cos.\theta}{u^3}\,t^2 - \frac{S\cos.\varphi\cos.\theta}{y^2}\,t^2,$$

$$dd(x\cos.\downarrow\sin.\varphi)\sin.\varphi = -\frac{M\cos.\downarrow(\sin.\varphi)^2}{x^2}\,t^2 - \frac{S x\cos.\downarrow(\sin.\varphi)^2}{u^3}\,t^2 + \frac{S y\sin.\varphi\sin.\theta}{u^3}\,t^2 - \frac{S\sin.\varphi\sin.\theta}{y^2}\,t^2,$$

qui, étant ajoûtées ensemble, donneront celle-ci,

$$dd(x\cos.\downarrow\cos.\varphi)\cos.\varphi + dd(x\cos.\downarrow\sin.\varphi)\sin.\varphi = -\frac{M\cos.\downarrow}{x^2}\,t^2 - \frac{S x\cos.\downarrow}{u^3}\,t^2 + \frac{S y\cos.(\varphi-\theta)}{u^3}\,t^2 - \frac{S\cos.(\varphi-\theta)}{y^2}\,t^2.$$

Nos trois équations seront donc deformais

$$dd(x\,\text{cos.}\,\psi\,\text{cos.}\,\varphi)\,\text{sin.}\,\varphi \;-\; dd(x\,\text{cos.}\,\psi\,\text{sin.}\,\varphi)\,\text{cos.}\,\varphi = \frac{Sy\,\text{sin.}\,(\varphi-\theta)}{u^3}\,t^2 \;-\; \frac{S\,\text{sin.}\,(\varphi-\theta)}{y^2}\,t^2,$$

$$dd(x\,\text{cos.}\,\psi\,\text{cos.}\,\varphi)\,\text{cos.}\,\varphi + dd(x\,\text{cos.}\,\psi\,\text{sin.}\,\varphi)\,\text{sin.}\,\varphi = -\frac{M\,\text{cos.}\,\psi}{x^2}\,t^2 - \frac{Sx\,\text{cos.}\,\psi}{u^3}\,t^2 + \frac{Sy\,\text{cos.}\,(\varphi-\theta)}{u^3}\,t^2 - \frac{S\,\text{cos.}\,(\varphi-\theta)}{y^2}\,t^2,$$

$$dd(x\,\text{sin.}\,\psi) = -\frac{M\,\text{sin.}\,\psi}{x^2}\,t^2 - \frac{Sx\,\text{sin.}\,\psi}{u^3}\,t^2.$$

En multipliant la première par cos. $(\varphi - \theta)$, la deuxième par sin. $(\varphi - \theta)$, nous aurons ces deux-ci,

$$dd(x\,\text{cos.}\,\psi\,\text{cos.}\,\varphi)\,\text{sin.}\,\varphi\,\text{cos.}\,(\varphi-\theta) - dd(x\,\text{cos.}\,\psi\,\text{sin.}\,\varphi)\,\text{cos.}\,\varphi\,\text{cos.}\,(\varphi-\theta) = \frac{Sy\,\text{sin.}\,(\varphi-\theta)\,\text{cos.}\,(\varphi-\theta)}{u^3}\,t^2 - \frac{S\,\text{sin.}\,(\varphi-\theta)\,\text{cos.}\,(\varphi-\theta)}{y^2}\,t^2,$$

$$dd(x\,\text{cos.}\,\psi\,\text{cos.}\,\varphi)\,\text{cos.}\,\varphi\,\text{sin.}\,(\varphi-\theta) + dd(x\,\text{cos.}\,\psi\,\text{sin.}\,\varphi)\,\text{cos.}\,\varphi\,\text{sin.}\,(\varphi-\theta) = -\frac{M\,\text{cos.}\,\psi\,\text{sin.}\,(\varphi-\theta)}{x^2}\,t^2 - \frac{Sx\,\text{cos.}\,\psi\,\text{sin.}\,(\varphi-\theta)}{u^3}\,t^2 + \frac{Sy\,\text{sin.}\,(\varphi-\theta)\,\text{cos.}\,(\varphi-\theta)}{u^3}\,t^2 - \frac{S\,\text{sin.}\,(\varphi-\theta)\,\text{cos.}\,(\varphi-\theta)}{y^2}\,t^2,$$

qui, étant ôtées l'une de l'autre, donneront celle-ci,

$$dd(x\,\text{cos.}\,\psi\,\text{cos.}\,\varphi)\,\text{sin.}\,\theta \;-\; dd(x\,\text{cos.}\,\psi\,\text{sin.}\,\varphi)\,\text{cos.}\,\theta = \frac{M\,\text{cos.}\,\psi\,\text{sin.}\,(\varphi-\theta)}{x^2}\,t^2 + \frac{Sx\,\text{cos.}\,\psi\,\text{sin.}\,(\varphi-\theta)}{u^3}\,t^2.$$

Et nos trois équations seront

$$dd(x\,\text{cos.}\,\psi\,\text{cos.}\,\varphi)\,\text{sin.}\,\varphi \;-\; dd(x\,\text{cos.}\,\psi\,\text{sin.}\,\varphi)\,\text{cos.}\,\varphi = \frac{Sy\,\text{sin.}\,(\varphi-\theta)}{u^3}\,t^2 \;-\; \frac{S\,\text{sin.}\,(\varphi-\theta)}{y^2}\,t^2,$$

$$dd(x\cos.\downarrow\cos.\varphi)\sin.\theta \;-\; dd(x\cos.\downarrow\sin.\varphi)\cos.\theta = \frac{M\cos.\downarrow\sin.(\varphi-\theta)}{x^2}\,i^2 + \frac{Sx\cos.\downarrow\sin.(\varphi-\theta)}{u^3}\,i^2,$$

$$dd(x\sin.\downarrow) = -\frac{M\sin.\downarrow}{x^2}\,i^2 - \frac{Sx\sin.\downarrow}{u^3}\,i^2.$$

En multipliant la deuxième par $\sin.\downarrow$, la troisième par $\cos.\downarrow\sin.(\varphi-\theta)$, nous aurons ces deux-ci,

$$dd(x\cos.\downarrow\cos.\varphi)\sin.\theta\sin.\downarrow - dd(x\cos.\downarrow\sin.\varphi)\cos.\theta\sin.\downarrow = \frac{M\sin.\downarrow\cos.\downarrow\sin.(\varphi-\theta)}{x^2}\,i^2 + \frac{Sx\sin.\downarrow\cos.\downarrow\sin.(\varphi-\theta)}{u^3}\,i^2,$$

$$dd(x\sin.\downarrow)\cos.\downarrow\sin.(\varphi-\theta) = -\frac{M\sin.\downarrow\cos.\downarrow\sin.(\varphi-\theta)}{x^2}\,i^2 - \frac{Sx\sin.\downarrow\cos.\downarrow\sin.(\varphi-\theta)}{u^3}\,i^2,$$

qui, étant ajoûtées ensemble, donneront celle-ci,

$$dd(x\cos.\downarrow\cos.\varphi)\sin.\theta\sin.\downarrow - dd(x\cos.\downarrow\sin.\varphi)\cos.\theta\sin.\downarrow + dd(x\sin.\downarrow)\cos.\downarrow\sin.(\varphi-\theta) = 0.$$

Nos trois équations seront donc présentement

$$dd(x\cos.\downarrow\cos.\varphi)\sin.\varphi \;-\; dd(x\cos.\downarrow\sin.\varphi)\cos.\varphi = \frac{Sy\sin.(\varphi-\theta)}{u^3}\,i^2 - \frac{S\sin.(\varphi-\theta)}{y^2}\,i^2,$$

$$dd(x\sin.\downarrow) = -\frac{M\sin.\downarrow}{x^2}\,i^2 - \frac{Sx\sin.\downarrow}{u^3}\,i^2,$$

$$dd(x\cos.\downarrow\cos.\varphi)\sin.\theta\sin.\downarrow - dd(x\cos.\downarrow\sin.\varphi)\cos.\theta\sin.\downarrow + dd(x\sin.\downarrow)\cos.\downarrow\sin.(\varphi-\theta) = 0, \text{ ou}$$

$$x\,[\sin.\varphi\,dd(\cos.\downarrow\cos.\varphi) - \cos.\varphi\,dd(\cos.\downarrow\sin.\varphi)] + 2\,[\sin.\varphi\,d(\cos.\downarrow\cos.\varphi) - \cos.\varphi\,d(\cos.\downarrow\sin.\varphi)]\,\dot{x} = \frac{Sy\sin.(\varphi-\theta)}{u^3}\,i^2 - \frac{S\sin.(\varphi-\theta)}{y^2}\,i^2,$$

$$x\,dd\sin.\psi + 2\,d\sin.\psi\,\dot{x} + \sin.\psi\,\ddot{x} = -\frac{M\sin.\psi}{x^2}\,\dot{t}^2 - \frac{S x\sin.\psi}{u^3}\,\dot{t}^2,$$

$$x\big[\sin.\psi\sin.\theta\,dd(\cos.\psi\cos.\varphi) - \sin.\psi\cos.\theta\,dd(\cos.\psi\sin.\varphi) + \cos.\psi\sin.(\varphi-\theta)\,dd\sin.\psi\big] + 2\big[\sin.\psi\sin.\theta\,d(\cos.\psi\cos.\varphi) - \sin.\psi\cos.\theta\,d(\cos.\psi\sin.\varphi) + \cos.\psi\sin.(\varphi-\theta)\,d\sin.\psi\big]\,\dot{x} = 0,$$

ou, en mettant dans la première pour $\dot{x}$ sa valeur prise de la troisième,

$$\frac{\sin.\Psi\big[d(\cos.\psi\cos.\varphi)\,dd(\cos.\psi\sin.\varphi) - d(\cos.\psi\sin.\varphi)\,dd(\cos.\psi\cos.\varphi)\big] + \cos.\psi\sin.\varphi\big[d\sin.\psi\,dd(\cos.\psi\cos.\varphi) - d(\cos.\psi\cos.\varphi)\,dd\sin.\psi\big] - \cos.\psi\cos.\varphi\big[d\sin.\psi\,dd(\cos.\psi\sin.\varphi) - d(\cos.\psi\sin.\varphi)\,dd\sin.\psi\big]}{\sin.\psi\sin.\theta\,d(\cos.\psi\cos.\varphi) - \sin.\psi\cos.\theta\,d(\cos.\psi\sin.\varphi) + \sin.(\varphi-\theta)\cos.\psi\,d\sin.\psi}\,x = \frac{Sy}{u^3}\,\dot{t}^2 - \frac{S}{y^2}\,\dot{t}^2,$$

$$x\,dd\sin.\psi + 2\,d\sin.\psi\,\dot{x} + \sin.\psi\,\ddot{x} = -\frac{M\sin.\psi}{x^2}\,\dot{t}^2 - \frac{S x\sin.\psi}{u^3}\,\dot{t}^2,$$

$$\frac{2\dot{x}}{x} = -\frac{\big[\sin.\psi\sin.\theta\,dd(\cos.\psi\cos.\varphi) - \sin.\psi\cos.\theta\,dd(\cos.\psi\sin.\varphi) + \cos.\psi\sin.(\varphi-\theta)\,dd\sin.\psi\big]}{\sin.\psi\sin.\theta\,d(\cos.\psi\cos.\varphi) - \sin.\psi\cos.\theta\,d(\cos.\psi\sin.\varphi) + \sin.(\varphi-\theta)\cos.\psi\,d\sin.\psi}$$

Soit $\sin.\Psi\big[d(\cos.\psi\cos.\varphi)\,dd(\cos.\psi\sin.\varphi) - d(\cos.\psi\sin.\varphi)\,dd(\cos.\psi\cos.\varphi)\big] + \cos.\psi\sin.\varphi\big[d\sin.\psi\,dd(\cos.\psi\cos.\varphi) - d(\cos.\psi\cos.\varphi)\,dd\sin.\psi\big] - \cos.\psi\cos.\varphi\big[d\sin.\psi\,dd(\cos.\psi\sin.\varphi) - d\cos.\psi\sin.\varphi)\,dd\sin.\psi\big] = \dot{\dot{A}}$,

$$\sin.\psi\sin.\theta\,dd(\cos.\psi\cos.\varphi) - \sin.\psi\cos.\theta\,dd(\cos.\psi\sin.\varphi) + \cos.\psi\sin.(\varphi-\theta)\,dd\sin.\psi = \ddot{B},$$

$\text{fin.}\,\psi\,\text{fin.}\,\theta\,d(\text{cof.}\,\psi\,\text{cof.}\,\varphi) - \text{fin.}\,\psi\,\text{cof.}\,\theta\,d(\text{cof.}\,\psi\,\text{fin.}\,\varphi) +$
$\text{fin.}\,(\varphi-\theta)\,\text{cof.}\,\psi\,d\,\text{fin.}\,\psi = \dot{C},$

nos trois équations seront $\frac{\ddot{A}x}{\dot{C}} = \frac{Sy\dot{t}^2}{u^3} - \frac{S\dot{t}^2}{y^2}$,

$x\,dd\,\text{fin.}\,\psi + 2\,d\,\text{fin.}\,\psi\,\dot{x} + \text{fin.}\,\psi\,\ddot{x} = \frac{-M\,\text{fin.}\,\psi\,\dot{t}^2}{x^2} -$
$\frac{Sx\,\text{fin.}\,\psi\,\dot{t}^2}{u^3}$, $\frac{2\dot{x}}{x} = \frac{-\ddot{B}}{\dot{C}}$.

Et en mettant dans la seconde pour $\dot{x}$ & pour x leurs valeurs tirées de la troisième, elles seront

$\frac{x\ddot{A}}{\dot{C}} = \frac{Sy\dot{t}^2}{u^3} - \frac{S\dot{t}^2}{y^2}$,

$x\Big[4\dot{C}\,\text{fin.}\,\theta.[d(\text{cof.}\,\psi\,\text{cof.}\,\varphi)\,dd\,\text{fin.}\,\psi - d\,\text{fin.}\,\psi\,dd(\text{cof.}\,\psi\,\text{cof.}\,\varphi)] -$
$4\dot{C}\,\text{cof.}\,\theta.[d(\text{cof.}\,\psi\,\text{fin.}\,\varphi)\,dd\,\text{fin.}\,\psi - d\,\text{fin.}\,\psi\,dd(\text{cof.}\,\psi\,\text{fin.}\,\varphi)] -$
$2\dot{C}\ddot{B} + \ddot{B}^2 + 2\ddot{C}\ddot{B}\Big] = \frac{-4M\dot{C}^2\dot{t}^2}{x^2} - \frac{4Sx\dot{C}^2\dot{t}^2}{x^3}$,

$\frac{2\dot{x}}{x} = \frac{-\ddot{B}}{\dot{C}}$.

Soit $4\dot{C}\,\text{fin.}\,\theta[(d\,\text{cof.}\,\psi\,\text{cof.}\,\varphi)\,dd\,\text{fin.}\,\psi - d\,\text{fin.}\,\psi\,dd(\text{cof.}\,\psi\,\text{cof.}\,\varphi)] -$
$4\dot{C}\,\text{cof.}\,\theta[d(\text{cof.}\,\psi\,\text{fin.}\,\varphi)\,dd\,\text{fin.}\,\psi - d\,\text{fin.}\,\psi\,dd(\text{cof.}\,\psi\,\text{fin.}\,\varphi)] -$
$2\dot{C}\ddot{B} + \ddot{B}^2 + 2\ddot{C}\ddot{B} = \dddot{D}$,

nos équations seront $\frac{x\ddot{A}}{\dot{C}} = \frac{Sy\dot{t}^2}{u^3} - \frac{S\dot{t}^2}{y^2}$,

$x\ddot{D} = \frac{-4M\dot{C}^2\dot{t}^2}{x^2} - \frac{4Sx\dot{C}^2\dot{t}^2}{u^3}$,

$\frac{2\dot{x}}{x} = \frac{-\ddot{B}}{\dot{C}}$.

Au

Au moyen des deux premières,

on aura $u^3 = \frac{Sy^3\dot{C}i^2}{xy^2\ddot{A} + S\dot{C}i^2}$, $u^3 = \frac{-4Sx^3\dot{C}^2i^2}{x^3\ddot{D} + 4M\dot{C}^2i^2}$,

& en égalant ces deux valeurs de u^3, on aura

$$x^3y^3\ddot{D} + 4My^3\dot{C}^2i^2 + 4x^4y^2\dot{C}\ddot{A} + 4Sx^3\dot{C}^2i^2 = 0.$$

Nos trois équations seront donc

$$[y^2 - 2xy\cos.\psi\cos.(\varphi - \theta) + x^2]^{\frac{1}{2}} = \frac{Sy^3\dot{C}i^2}{xy^2\ddot{A} + S\dot{C}i^2},$$

$$x^3y^3\ddot{D} + 4My^3\dot{C}^2i^2 + 4x^4y^2\dot{C}\ddot{A} + 4Sx^3\dot{C}^2i^2 = 0,$$

$$\frac{2\dot{x}}{x} = \frac{-\ddot{B}}{\dot{C}}.$$

Au moyen de la première qui sera du septième degré, & de la seconde qui est du quatrième, on aura deux valeurs de x sans aucune extraction de racines; en égalant ces deux valeurs de x, & en substituant pour x la première de ses deux valeurs dans l'équation $\frac{2\dot{x}}{x} = \frac{-\ddot{B}}{\dot{C}}$, on aura deux équations entre les indéterminées y, θ, t, φ, ψ. Mais le mouvement de S autour de T étant donné, on aura y & θ en t; par conséquent l'on aura deux équations entre φ, ψ & t; l'on chassera ψ, & l'on aura une équation entre φ & t; l'on chassera φ, & l'on aura une équation entre ψ & t. Au moyen de l'équation entre φ & t & du Lemme II, on aura φ en t; au moyen de l'équation entre ψ & t & du même Lemme, on aura ψ en t, & l'on déterminera les constantes par le moyen de quelques observations choisies.

Mais en attendant que l'on fasse ce calcul, en voici un très-curieux à faire pour s'assurer si réellement tout se passe

dans le Ciel comme si la Terre & la Lune s'attiroient mutuellement, & qu'elles fussent attirées par le Soleil en raison des masses & en raison inverse du quarré des distances. Je suppose que le Soleil S se meut autour de la Terre T dans une ellipse dont T est un des deux foyers; soit a le sommet de cette ellipse le plus près de T, & A son sommet le plus éloigné de T, je fais $Ta = a$, $TA = a + b$, l'angle $aT\gamma = \alpha$; j'aurai $y = \frac{2a(a+b)}{2a+b+b\cos.(\alpha+\theta)}$, & je substituerai cette valeur de y dans les deux expressions de x, lesquelles ne seront plus composées que des indéterminées t, sin. θ, cos. θ, sin. φ, cos. φ, sin. ψ, cos. ψ, & de leurs différences. Maintenant au moyen des observations & du Lemme I, j'aurai les expressions de sin. θ, cos. θ, sin. φ, cos. φ, sin. ψ, cos. ψ en t; je substituerai ces expressions dans celles de x, & je verrai si elles auront une même valeur, & si cette valeur sera conforme à ce que l'on sait.

ANALYSE du Problème où il s'agit, par le moyen de trois observations, de déterminer dans le système de M. Newton, la trajectoire d'une Comète, en supposant qu'elle se meut dans une ellipse infiniment alongée, ou dans une parabole.

LA Terre T se meut autour du Soleil S en vertu d'une force motrice vers $S = \frac{S.T}{(ST)^2}$, & décrit par conséquent autour de S une ellipse dont S est un des deux foyers.

Soit a le sommet de cette ellipse le plus proche de S, & A son sommet le plus éloigné de S, je conçois que la Terre va de a vers A.

Soit $Sa = a$, $SA = a + b$,

on aura $ST = \frac{2a.(a+b)}{2a+b+b\cos.aST}$; l'élément du temps

$$= \frac{(ST)^2 daST}{\sqrt{[\frac{2Sa.(a+b)}{2a+b}]}} = \frac{\sqrt{(\frac{2a+b}{2S})}.STdST}{\sqrt{[-a.(a+b)+(2a+b).ST-(ST)^2]}}.$$

Une planète P se meut pareillement autour de S en vertu d'une force motrice vers $S = \frac{S.P}{(SP)^2}$, & trace par conséquent autour de S une ellipse dont S est un des deux foyers.

Soit a' le sommet de cette ellipse le plus près de S, & A' son sommet le plus éloigné de S, je conçois que cette planète va de a' vers A' & du même sens que T.

Soit $Sa' = \alpha$, $SA' = \alpha + \zeta$,

on aura $SP = \frac{2\alpha.(\alpha+\zeta)}{2\alpha+\zeta+\zeta\cos.a'SP}$; l'élément du temps

$$= \frac{(SP)^2 . dd\,SP}{\sqrt{\left[\frac{2S\alpha.(\alpha+\zeta)}{2\alpha+\zeta}\right]}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{2\alpha+\zeta}{2S}\right)} . SP\,dSP}{\sqrt{[-\alpha.(\alpha+\zeta)+(2\alpha+\zeta).SP-(SP)^2]}}.$$

Du point S je mène vers un point quelconque γ de l'Écliptique infiniment éloigné de S, la ligne $S\gamma$;

j'aurai l'angle $aST = aS\gamma + \gamma ST$,

& ST sera $= \frac{2a.(a+b)}{2a+b+b(\text{cos.}\,aS\gamma\,\text{cos.}\,\gamma ST - \text{sin.}\,aS\gamma\,\text{sin.}\,\gamma ST)}$;

Soit SN la commune section du plan de l'orbe de la Terre & du plan de l'orbe de la planète,

j'aurai l'angle $a'SP = a'SN + NSP$,

& SP sera $= \frac{2\alpha.(\alpha+\zeta)}{2\alpha+\zeta+\zeta(\text{cos.}\,a'SN\,\text{cos.}\,NSP - \text{sin.}\,a'SN\,\text{sin.}\,NSP)}$;

Du point P *(fig. 39)* j'abaisse sur le plan γSN la perpendiculaire PM. Sur SP je prends $Sp = 1$, & sur SM je prends $Sm = 1$. Du point p je mène à SM la perpendiculaire pq, & à SN la perpendiculaire pr; prq est l'angle du plan NSP sur le plan γSN.

J'aurai $1 : \text{sin.}\,prq :: \text{sin.}\,NSP : \text{sin.}\,MSP$; donc

$$\text{sin.}\,NSP = \frac{\text{sin.}\,MSP}{\text{sin.}\,prq},$$

$$1 : \text{cos.}\,prq :: \frac{\text{sin.}\,MSP}{\text{sin.}\,prq} : qr = \frac{\text{sin.}\,MSP\,\text{cos.}\,prq}{\text{sin.}\,prq},$$

J'aurai $1 : \text{sin.}\,(\gamma SM - \gamma SN) :: \text{cos.}\,MSP : \frac{\text{sin.}\,MSP\,\text{cos.}\,prq}{\text{sin.}\,prq}$;

donc $\frac{\text{cos.}\,prq\,\text{sin.}\,MSP}{\text{sin.}\,prq} = \text{cos.}\,MSP(\text{cos.}\,\gamma SN\,\text{sin.}\,\gamma SM - \text{sin.}\,\gamma SN\,\text{cos.}\,\gamma SM)$;

$1 : \text{cos.}\,(\gamma SM - \gamma SN) :: \text{cos.}\,MSP : \text{cos.}\,NSP$; donc $\text{cos.}\,NSP = \text{cos.}\,MSP\,(\text{sin.}\,\gamma SN\,\text{sin.}\,\gamma SM + \text{cos.}\,\gamma SN\,\text{cos.}\,\gamma SM)$.

Nos équations seront $ST = \frac{2a.(a+b)}{2a+b+b(\text{cof.}\,aS\gamma\,\text{cof.}\,\gamma ST - \text{fin.}\,aS\gamma\,\text{fin.}\,\gamma ST)}$,

$SP = \frac{2a.(a+\mathcal{C}).\text{fin.}\,prq}{(2a+\mathcal{C}).\text{fin.}\,prq + \mathcal{C}\,[\text{cof.}\,a'SN\,\text{fin.}\,prq\,\text{cof.}\,MSP.(\text{fin.}\,\gamma SN\,\text{fin.}\,\gamma SM + \text{cof.}\,\gamma SN\,\text{cof.}\,\gamma SM) - \text{fin.}\,a'SN\,\text{fin.}\,MSP]}$,

$\frac{\text{cof.}\,prq\,\text{fin.}\,MSP}{\text{fin.}\,prq} = \text{cof.}\,MSP(\text{cof.}\,\gamma SN\,\text{fin.}\,\gamma SM - \text{fin.}\,\gamma SN\,\text{cof.}\,\gamma SM)$,

& $\frac{\sqrt{(2a+b).STdST}}{\sqrt{[-a.(a+b)+(2a+b).ST-(ST)^2]}} = \frac{\sqrt{(2a+\mathcal{C}).SPdSP}}{\sqrt{[-a.(a+\mathcal{C})+(2a+\mathcal{C})SP-(SP)^2]}}$,

Du point T (*fig. 40*) je mène vers P la ligne TP, & vers γ la ligne $T\gamma$.

J'aurai 1 : fin. MSP :: SP : $PM = SP$ fin. MSP,

& 1 : cof. MSP :: SP : $SM = SP$ cof. MSP.

J'aurai 1 : fin. γSM :: SP cof. MSP : $Ml = SP$ cof. MSP fin. γSM

& 1 : cof. γSM :: SP cof. MSP : $Sl = SP$ cof. MSP cof. γSM.

J'aurai 1 : fin. γST :. ST : $Th = ST$ fin. γST, &

1 : cof. γST :: ST : $Sh = ST$ cof. γST.

Donc $Mk = SP$ cof. MSP fin. $\gamma SM - ST$ fin. γST

& $Tk = SP$ cof. MSP cof. $\gamma SM - ST$ cof. γST.

J'aurai fin. MTP : 1 :: SP fin. MSP : $TP = \frac{SP\,\text{fin.}\,MSP}{\text{fin.}\,MTP}$, &

fin. MTP : cof. MTP :: SP fin. MSP : $TM = \frac{SP\,\text{fin.}\,MSP\,\text{cof.}\,MTP}{\text{fin.}\,MTP}$.

Enfin j'aurai 1 : fin. γTM :: $\frac{SP\,\text{fin.}\,MSP\,\text{cof.}\,MTP}{\text{fin.}\,MTP}$:

SP cof. MSP fin. $\gamma SM - ST$ fin. γST,

& 1 : cof. γTM :: $\frac{SP\,\text{fin.}\,MSP\,\text{cof.}\,MTP}{\text{fin.}\,MTP}$:

SP cof. MSP cof. $\gamma SM - ST$ cof. γST.

Maintenant je fais cof. $\gamma ST = X$, fin. $\gamma ST = Y$, cof. $\gamma SM = p$, fin. $\gamma SM = q$, cof. $MSP = r$, fin. $MSP = \int$, cof. $\gamma TM = x$, fin. $\gamma TM = y$, cof. $MTP = \zeta$, fin. $MTP = u$.

cof. $aS\gamma = c$, fin. $aS\gamma = \partial$, cof. $a'SN = \gamma$, fin. $a'SN = \delta$, cof. $\gamma SN = \varepsilon$, fin. $\gamma SN = \zeta$, cof. $prq = \eta$, fin. $prq = \theta$.

J'aurai $ST = \frac{2a.(a+b)}{2a+b+b(cX-\partial Y)}$,

$$SP = \frac{2\alpha.(\alpha+\mathfrak{C})\theta}{(2\alpha+\mathfrak{C}).\theta+\mathfrak{C}[\gamma\theta r.(\zeta q+\varepsilon p)-\delta\int]},$$

$$\eta\int = \theta r.(\varepsilon q-\zeta p),$$

$$\frac{SP}{ST} = \frac{Yu}{qru-\int\zeta y}, \quad \frac{SP}{ST} = \frac{Xu}{pru-\int\zeta x}.$$

En égalant enſemble les deux valeurs de $\frac{SP}{ST}$, on aura $\frac{Y}{qru-\int\zeta y} = \frac{X}{pru-\int\zeta x}$; donc $\frac{\int}{r} = \frac{Xqu-Ypu}{Xy\zeta-Yx\zeta}$.

En égalant enſemble les deux valeurs de $\frac{\int}{r}$, on aura

$$[\eta Xu-\varepsilon\theta\zeta.(Xy-Yx)]q = [\eta Yu-\zeta\theta\zeta.(Xy-Yx)]p;$$

$$\text{donc } p = \frac{\eta Xu-\varepsilon\theta\zeta.(Xy-Yx)}{\sqrt{[[\eta Xu-\varepsilon\theta\zeta.(Xy-Yx)]^2+[\eta Yu-\zeta\theta\zeta.(Xy-Yx)]^2]}},$$

$$q = \frac{\eta Yu-\zeta\theta\zeta.(Xy-Yx)}{\sqrt{[[\eta Xu-\varepsilon\theta\zeta.(Xy-Yx)]^2+[\eta Yu-\zeta\theta\zeta.(Xy-Yx)]^2]}}.$$

En ſubſtituant pour p & q ces valeurs, on aura

$$r = \frac{\sqrt{[[\eta Xu-\varepsilon\theta\zeta.(Xy-Yx)]^2+[\eta Yu-\zeta\theta\zeta.(Xy-Yx)]^2]}}{\sqrt{[\theta^2u^2(\varepsilon Y-\zeta X)^2+[\eta Xu-\varepsilon\theta\zeta.(Xy-Yx)]^2+[\eta Yu-\zeta\theta\zeta.(Xy-Yx)]^2]}},$$

$$\int = \frac{\theta u.(\varepsilon Y-\zeta X)}{\sqrt{[\theta^2u^2(\varepsilon Y-\zeta X)^2+[\eta Xu-\varepsilon\theta\zeta.(Xy-Yx)]^2+[\eta Yu-\zeta\theta\zeta.(Xy-Yx)]^2]}}.$$

En substituant pour p, q, r, s, ces valeurs, nos équations feront $ST = \frac{2a.(a+b)}{2a+b+b(cX-\delta Y)}$,

$$SP = \frac{ST\sqrt{[\theta^2u^2(\epsilon Y-\zeta X)^2+[nXu-\epsilon\theta z.(Xy-Yx)]^2+[nYu-\zeta\theta z.(Xy-Yx)]^2]}}{nu-\theta z.(\epsilon y-\zeta x)},$$

$$SP = \frac{2\alpha.(\alpha+\mathcal{C}).\sqrt{[\theta^2u^2(\epsilon Y-\zeta X)^2+[nXu-\epsilon\theta z.(Xy-Yx)]^2+[nYu-\zeta\theta z.(Xy-Yx)]^2]}.}{(2\alpha+\mathcal{C}).\sqrt{[\theta^2u^2(\epsilon Y-\zeta X)^2+[nXu-\epsilon\theta z.(Xy-Yx)]^2+[nYu-\zeta\theta z.(Xy-Yx)]^2]}+}$$
$$\mathcal{C}\gamma[n\alpha.(\epsilon X+\zeta Y)-\theta z.(Xy-Yx)]-\mathcal{C}\delta u.(\epsilon Y-\zeta X)},$$

$$\& \frac{\sqrt{(2a+b).STdST}}{\sqrt{[-a.(a+b)+(2a+b).ST-(ST)^2]}} = \frac{\sqrt{(2\alpha+\mathcal{C}).SPdSP}}{\sqrt{[-\alpha.(\alpha+\mathcal{C})+(2\alpha+\mathcal{C}).SP-(SP)^2]}}.$$

En intégrant cette dernière équation, on auroit quatre équations, qui, en chassant ST, SP, se réduiroient à deux; au moyen desquelles, avec trois observations, on auroit six équations outre ces trois-ci, $\gamma^2+\delta^2=1$, $\epsilon^2+\zeta^2=1$, $\eta^2+\theta^2=1$, pour déterminer les huit inconnues α, $\mathcal{C}$, γ, δ, ϵ, ζ, η, θ, & la constante qu'on auroit ajoûtée en intégrant; mais cette voie est impraticable, premièrement, parce que l'équation n'est pas intégrable; secondement, parce que, quand même elle le seroit, le calcul seroit immense.

Je suppose qu'il s'agit d'une Comète, qui, se mouvant dans une ellipse excessivement alongée, c'est-à-dire, où $\mathcal{C}$ est extrêmement grand par rapport à α, peut être regardée comme se mouvant dans une parabole; l'équation qu'il s'agit d'intégrer sera $\frac{\sqrt{(2a+b)}STdST}{\sqrt{[-a.(a+b)+(2a+b).ST-(ST)^2]}} = \frac{SPdSP}{\sqrt{(SP-\alpha)}}$.

Soit le secteur elliptique tracé par le rayon vecteur de la Terre, & compris dans l'angle $\gamma ST = Q$, on aura $2\sqrt{(\frac{2a+b}{a.(a+b)})}.dQ = \frac{SPdSP}{\sqrt{(SP-\alpha)}}$, & en intégrant, on aura

$$(SP+2\alpha).\sqrt{(SP-\alpha)} = 3\sqrt{(\frac{2a+b}{a.(a+b)})}.Q+\mu.$$

Par conſéquent, dans cette hypothèſe-ci, nos équations ſeront $ST = \frac{2a.(a+b)}{2a+b+bcX-bcY}$,

$$SP = \frac{ST\sqrt{[\theta^2u^2(\varepsilon Y-\zeta X)^2+[nXu-\varepsilon\theta z.(Xy-Yx)]^2+[nYu-\zeta\theta z.(Xy-Yx)]^2]}}{nu-\theta z.(\varepsilon y-\zeta x)},$$

$$SP = \frac{2\alpha\sqrt{[\theta^2u^2(\varepsilon Y-\zeta x)^2+[nXu-\varepsilon\theta z.(Xy-Yx)]^2+[nYu-\zeta\theta z.(Xy-Yx)]^2]}}{\sqrt{[\theta^2u^2(\varepsilon Y-\zeta x)^2+[nXu-\varepsilon\theta z.(Xy-Yx)]^2+[nYu-\zeta\theta z.(Xy-Yx)]^2]}+\gamma[nu.(\varepsilon X+\zeta Y)-\theta z.(Xy-Yx)]-\delta u.(\varepsilon Y-\zeta X)},$$

$$(SP+2\alpha).\sqrt{(SP-\alpha)} = 3\sqrt{(\tfrac{2a+b}{a.(a+b)})}.Q+\mu.$$

Ainſi le Problème eſt plus que déterminé par trois obſervations, car pour les huit inconnues α, γ, δ, ε, ζ, n, θ, μ, on auroit neuf équations; mais le calcul eſt, comme nous l'avons dit, impraticable.

Au moyen de la ſeconde des quatre équations précédentes, on aura

$$\sqrt{[\theta^2u^2(\varepsilon Y-\zeta X)^2+[nXu-\varepsilon\theta z.(Xy-Yx)]^2+[nYu-\zeta\theta z.(Xy-Yx)]^2]} = \frac{SP}{ST}.(nu-\theta z.(\varepsilon y-\zeta x)],$$

& en ſubſtituant dans la troiſième, on aura

$$SP.[nu-\theta z.(\varepsilon y-\zeta x)] = 2[nu-\theta z.(\varepsilon y-\zeta x)]\alpha - ST.[nu.(\varepsilon X+\zeta Y)-\theta z.(Xy-Yx)]\gamma + ST.u.(\varepsilon Y-\zeta X)\delta.$$

Je remarque qu'au moyen de cette équation, ſi les nombres ε, ζ, n, θ étoient donnés avec trois obſervations, on auroit α, γ, δ; car on auroit SP par la ſeconde équation.

Nous avons trouvé ci-deſſus

$$TP = \frac{SP\,\text{ſin.}\,MSP}{\text{ſin.}\,MTP} = SP.\frac{f}{u} = \frac{\theta.(\varepsilon Y-\zeta X).ST}{nu-\theta z.(\varepsilon y-\zeta x)},$$

Je

Je fais $\zeta = \varepsilon x$, $\theta = \eta\lambda$; donc $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$, $\eta = \frac{1}{\sqrt{(1+\lambda^2)}}$, & je ſubſtitue pour ζ, θ ces valeurs; nous aurons $ST = \frac{2a.(a+b)}{2a+b+bcX-bcY}$,

$$TP[u - \varepsilon\lambda z.(y - xx)] = \varepsilon\lambda.(Y - xX).ST,$$

$$SP = \frac{ST\sqrt{[\varepsilon^2\lambda^2\eta^2(Y-xX)^2+[Xu-\varepsilon\lambda z.(Xy-Yx)]^2+[Yu-\varepsilon\lambda.xz.(Xy-Yx)]^2]}}{u-\varepsilon\lambda z.(y-xx)},$$

$$\eta SP[u-\varepsilon\lambda z.(y-xx)] = 2\eta[u-\varepsilon\lambda z.(y-xx)]\alpha - \eta ST[\varepsilon u.(X+xY) - \lambda z.(Xy-Yx)]\gamma + \varepsilon u.ST(Y-xX)\delta,$$

$$(SP+2a).\sqrt{(SP-a)} = 3\sqrt{\left(\frac{2a+b}{a.(a+b)}\right)}Q + \mu.$$

Je ſuppoſe qu'à la première obſervation les valeurs de $X, Y, ST, TP, SP, Q, x, y, z, u$, ſont $A, B, C, D, E, F, e, f, g, h$; qu'à la ſeconde elles ſont $A', B', C', D', E', F', e', f', g', h'$, & qu'à la troiſième elles ſont $A'', B'', C'', D'', E'', F'', e'', f'', g'', h''$.

En ſubſtituant les valeurs de la première obſervation dans l'équation $TP[u-\varepsilon\lambda z.(y-xx)] = \varepsilon\lambda.(Y-xX)ST$, on aura $D[h-\varepsilon\lambda g.(f-xe)] = \varepsilon\lambda.(B-xA)C$, & en y ſubſtituant celles de la ſeconde, on aura $D'[h'-\varepsilon\lambda g'.(f'-xe')] = \varepsilon\lambda.(B'-xA')C'$; & au moyen de ces deux équations, D & D' étant pris à volonté, l'on déterminera $\varepsilon\lambda$ & x, & par conſéquent on aura $\varepsilon, \zeta, \eta, \theta, x, \lambda$.

$\varepsilon\lambda$ & x étant donnés, on aura SP généralement par le moyen de l'équation ſuivante.

$$SP = \frac{ST\sqrt{[\varepsilon^2\lambda^2u^2(Y-\varkappa X)^2+[Xu-\varepsilon\lambda z.(Xy-Yx)]^2+[Yu-\varepsilon\lambda.\varkappa z.(Xy-Y\varkappa)]^2]}}{u-\varepsilon\lambda z.(y-\varkappa x)},$$

& par conſéquent on aura E, E, E.

En ſubſtituant les valeurs de la première obſervation dans l'équation

$$\varpi.SP.[u-\varepsilon\lambda z.(y-\varkappa x)] = 2\varpi[u-\varepsilon\lambda z.(y-\varkappa x)]\alpha - \varpi.ST[\varepsilon u.(X+\varkappa Y)-\lambda z.(Xy-Yx)]\gamma + \varepsilon u.ST(Y-\varkappa X)\delta,$$ on aura

$$\varpi E[h-\varepsilon\lambda g.(f-\varkappa e)] = 2\varpi[h-\varepsilon\lambda g.(f-\varkappa e)]\alpha - \varpi C[\varepsilon h.(A+\varkappa B)-\lambda g.(Af-Be)]\gamma + \varepsilon hC(B-\varkappa A)\delta;$$

& en y ſubſtituant celles de la ſeconde, on aura

$$\varpi E[h-\varepsilon\lambda g.(f-\varkappa e)] = 2\varpi[h-\varepsilon\lambda g.(f-\varkappa e)]\alpha - \varpi C[\varepsilon h.(A+\varkappa B)-\lambda g.(Af-Be)]\gamma + \varepsilon hC(B-\varkappa A)\delta,$$

& en y ſubſtituant celles de la troiſième, on aura

$$\varpi E[h-\varepsilon\lambda g.(f-\varkappa e)] = 2\varpi[h-\varepsilon\lambda g.(f-\varkappa e)]\alpha - \varpi C[\varepsilon h.(A+\varkappa B)-\lambda g.(Af-Be)]\gamma + \varepsilon hC(B-\varkappa A)\delta;$$

& au moyen de ces trois équations, l'on déterminera α, γ, δ.

Le problème ſeroit donc réſolu, ſi D & D avoient été pris exactement; mais comme on ne connoît pas ces deux lignes, je ſuppoſe que la valeur que l'on a donnée à D eſt exacte, & je dis qu'il faut que D ſoit tel que $\gamma^2+\delta^2-1=0$.

L'on recommencera l'opération, en augmentant ou en

diminuant D à chaque fois, jusqu'à ce que cette condition soit remplie.

Enfin, au moyen de cette équation-ci,

$$(SP + 2a).\sqrt{(SP - a)} = 3\sqrt{\left(\frac{2a+b}{a.(a+b)}\right)}.Q + \mu,$$

on aura les trois équations qui suivent.

$$(E + 2a).\sqrt{(E - a)} = 3\sqrt{\left(\frac{2a+b}{a.(a+b)}\right)}.F + \mu,$$

$$(E_{\prime} + 2a).\sqrt{(E_{\prime} - a)} = 3\sqrt{\left(\frac{2a+b}{a.(a+b)}\right)}.F_{\prime} + \mu,$$

$$(E_{\prime\prime} + 2a).\sqrt{(E_{\prime\prime} - a)} = 3\sqrt{\left(\frac{2a+b}{a.(a+b)}\right)}.F_{\prime\prime} + \mu.$$

Soit $A = 1$, $B = 0$; donc $C = \frac{2a.(a+b)}{2a+b+bc}$, $F = 0$, on aura $\mu = (E + 2a).\sqrt{(E - a)}$, & en mettant cette valeur de μ dans les deux équations restantes, on aura

$$(E_{\prime} + 2a).\sqrt{(E_{\prime} - a)} = 3\sqrt{\left(\frac{2a+b}{a.(a+b)}\right)}.F_{\prime} + (E + 2a).\sqrt{(E - a)},$$

$$(E_{\prime\prime} + 2a).\sqrt{(E_{\prime\prime} - a)} = 3\sqrt{\left(\frac{2a+b}{a.(a+b)}\right)}.F_{\prime\prime} + (E + 2a).\sqrt{(E - a)}.$$

Soit le temps entre la première & la seconde observation $= L$, celui entre la première & la troisième $= L_{\prime}$, on aura $F_{\prime} : F_{\prime\prime} :: L : L_{\prime}$; donc $F_{\prime\prime} = \frac{FL}{L_{\prime}}$, & D devra avoir été pris tel que

$$\frac{(E_{\prime\prime} + 2a).\sqrt{(E_{\prime\prime} - a)} - (E + 2a).\sqrt{(E - a)}}{(E_{\prime} + 2a).\sqrt{(E_{\prime} - a)} - (E + 2a).\sqrt{(E - a)}} = \frac{L}{L_{\prime}}.$$

L'on recommencera donc l'opération, en augmentant ou en diminuant D à chaque fois, jusqu'à ce que cette condition soit remplie.

Par la première condition pour chaque D l'on trouve le $D_{\prime}$ qui lui appartient, & par la seconde l'on trouve le vrai D.

REMARQUE.

A la première opération, en ſubſtituant pour γ & pour δ leurs valeurs dans cette équation-ci $\gamma^2 + \delta^2 - 1 = 0$, ou dans celle-ci, $1 - \gamma^2 - \delta^2 = 0$, vous trouverez un reſte > 0.

Je ſuppoſe qu'à la ſeconde opération où vous aurez augmenté D, vous trouviez encore un reſte > 0, mais moindre que le premier reſte, vous ſerez ſûr que le premier D étoit trop petit, que le ſecond D eſt auſſi trop petit, mais qu'il approche plus du vrai que le premier.

Si à la troiſième opération où vous aurez encore augmenté D, vous trouvez un reſte < 0, vous ſerez ſûr que ce nouveau D là eſt trop grand, qu'ainſi, le vrai D eſt entre celui-là & le précédent.

Si à la ſeconde opération où vous aurez augmenté D, vous trouvez un reſte non ſeulement > 0, mais plus grand que le premier reſte, vous ſerez ſûr que le premier D étoit trop grand, qu'ainſi, au lieu de l'augmenter, il falloit le diminuer.

La même choſe aura lieu à l'égard de D, lorſque l'on ſatisfera à cette équation-ci,

$$(E'' + 2a).\sqrt{(E'' - a)} - (E + 2a).\sqrt{(E - a)} - \frac{L''}{L}[(E' + 2a).\sqrt{(E' - a)} - (E + 2a).\sqrt{(E - a)}] = 0,$$

ou à celle-ci,

$$-(E'' + 2a).\sqrt{(E'' - a)} + (E + 2a).\sqrt{(E - a)} + \frac{L''}{L}[(E' + 2a).\sqrt{(E' - a)} - (E + 2a).\sqrt{(E - a)}] = 0.$$

SOLUTION D'UN PROBLÈME

SUR LES JEUX DE HASARD.

PIERRE me propoſe de jouer avec lui à *croix* ou *pile*, & il offre de me donner un écu, ſi j'amène croix au premier coup; deux, ſi je ne l'amène qu'au ſecond; quatre, ſi je ne l'amène qu'au troiſième; huit, ſi je ne l'amène qu'au quatrième; ſeize, ſi je ne l'amène qu'au cinquième, & ainſi de ſuite en doublant; trouver la ſomme que je dois lui donner au commencement de chaque partie pour que le jeu ſoit égal.

En ſuivant les règles ordinaires des jeux de haſard, l'on trouvoit que je devois donner à Pierre une ſomme infinie, & il falloit réſoudre cette difficulté.

Je ſuppoſe que nous jouons, Pierre & moi, argent ſur jeu, enſorte que, quelque choſe qui arrive, je ne puiſſe jamais gagner au delà de ce qui eſt au jeu; il eſt évident que cette condition ne change rien à l'énoncé du Problème, car l'on peut ſuppoſer que Pierre met tout ſon bien au jeu.

Soit la ſomme d'écus que Pierre met au jeu $= x$, celle que je dois y mettre, pour que le jeu ſoit parfaitement égal, $= y$, l'argent du jeu ſera $= x + y$, & on aura $y = \frac{(n+1)2^n + x}{2^{n+1} - 1}$.

Quant au nombre entier poſitif n, on le déterminera par la condition que x doit être $> \frac{2^{n+1} - n - 2}{2}$ & $< \frac{2^{n+2} - n - 3}{2}$.

Je suppose, par exemple, que Pierre met un million au jeu, c'est-à-dire, que $x = 333333 + \frac{1}{3}$, on aura $333333 + \frac{1}{3} > \frac{2^{n+1} - n - 2}{2}$ & $< \frac{2^{n+2} - n - 3}{2}$; donc $n = 18$; donc $y = \frac{19.2^{18} + \frac{1000000}{3}}{2^{19} - 1} = 30^{l}\ 8^{s}\ 2^{d}$ à peu près.

Si c'est ma mise qui est donnée, & que l'on veuille avoir celle de Pierre, on aura $x = 2^{n+1} y - (n+1) 2^{n} - y$, & n sera $> 2y - 3$ & $< 2y - 2$.

Si y est un nombre entier, vous ferez $n = 2y - 3$, ou $n = 2y - 2$, & vous aurez $x = 2^{2y-2} - y$.

Pour jouer à ce jeu-là, il n'y auroit qu'à avoir un dé à six faces, dont trois seroient noires, & les trois autres blanches; on auroit de plus une large & pesante pièce à deux faces, l'une noire & l'autre blanche; l'on retourneroit la pièce à chaque fois avant de jeter le dé, & l'on conviendroit qu'aussi-tôt que la couleur du dé & celle de la pièce seront les mêmes, la partie sera finie. Je suppose qu'en commençant la partie, la face supérieure de la pièce soit noir.

Je jette le dé; si j'amène noir, Pierre me donnera un écu. Si j'amène blanc, l'on fera une marque pour se souvenir que j'ai joué un coup; l'on retournera la pièce, & sa couleur sera blanc.

Je jette le dé; si j'amène blanc, Pierre me donnera deux écus. Si j'amène noir, l'on marquera que j'ai joué deux coups; l'on retournera la pièce, & sa couleur sera noir.

Je jette le dé; si j'amène noir, Pierre me donnera quatre écus. Si j'amène blanc, l'on marquera que j'ai joué trois coups; l'on retournera la pièce, & sa couleur sera blanc.

Je jette le dé ; ſi j'amène blanc, Pierre me donnera huit écus. Si j'amène noir, l'on marquera que j'ai joué quatre coups; l'on retournera la pièce, & ſa couleur ſera noir.

Je jette le dé ; ſi j'amène noir, Pierre me donnera ſeize écus. Si j'amène blanc, l'on marquera que j'ai joué cinq coups; l'on retournera la pièce, & ſa couleur ſera blanc, &c.

Pour n'avoir pas à calculer au commencement de chaque partie, il faudra que Pierre tienne toûjours la même ſomme au jeu.

Soit, par exemple, $y = 10$ écus, on aura
$x = 2^{2 \cdot 10 - 2} - 10 = 2^{18} - 10 = 262134$ écus; ainſi, ſi Pierre tient au jeu 262134 écus, au commencement de chaque partie, j'y mettrai 10 écus.

Soit $y = 11$ écus, on aura
$x = 2^{2 \cdot 11 - 2} - 11 = 2^{20} - 11 = 1048565$ écus. Si Pierre tient au jeu 1048565 écus, j'y mettrai 11 écus au commencement de chaque partie.

L'ART DE RÉSOUDRE LES ÉQUATIONS.

Dès les premiers temps l'on réſolut généralement la formule du ſecond degré, & l'on trouva que $x^2 + Mx + N =$

$$[x + \tfrac{1}{2}M + \tfrac{1}{2}\sqrt{(M^2 - 4N)}]$$
$$[x + \tfrac{1}{2}M - \tfrac{1}{2}\sqrt{(M^2 - 4N)}].$$

Enſuite vint la Méthode de Cardan pour le troiſième degré, dont en ſuivant les procédés pas à pas, je trouve que

$$x^3 + Mx^2 + Nx + \frac{z^2 + (9MN - 2M^3)z + (M^2 - 3N)^3}{27z}$$

eſt diviſible exactement par $x + \dfrac{z^{\frac{2}{3}} + Mz^{\frac{1}{3}} + (M^2 - 3N)}{3z^{\frac{1}{3}}}$.

Je fais $\dfrac{z^2 + (9MN - 2M^3)z + (M^2 - 3N)^3}{27z} = P$, ou

$$z^2 - (2M^3 - 9MN + 27P)z + (M^2 - 3N)^3 = 0;$$

j'ai $z = \frac{1}{2}(2M^3 - 9MN + 27P) - \frac{1}{2}\sqrt{[(2M^3 - 9MN + 27P)^2 - 4(M^2 - 3N)^3]}$;

d'où je conclus que la formule $x^3 + Mx^2 + Nx + P$ eſt diviſible exactement par

$$x + \frac{[2M^3 - 9MN + 27P - \sqrt{[(2M^3 - 9MN + 27P)^2 - 4(M^2 - 3N)^3]}]^{\frac{1}{3}} + M[2M^3 - 9MN + 27P - \sqrt{[(2M^3 - 9MN + 27P)^2 - 4(M^2 - 3N)^3]}]^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}(M^2 - 3N)}{2^{\frac{1}{3}} \cdot 3[2M^3 - 9MN + 27P - \sqrt{[(2M^3 - 9MN + 27P)^2 - 4(M^2 - 3N)^3]}]^{\frac{1}{3}}},$$

ou

ou par $x + \frac{1}{3}M + \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}\cdot 3}[2M^3 - 9MN + 27P + \sqrt{[(2M^3 - 9MN + 27P)^2 - 4(M^2 - 3N)^3]}]^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}\cdot 3}[2M^3 - 9MN + 27P - \sqrt{[(2M^3 - 9MN + 27P)^2 - 4(M^2 - 3N)^3]}]^{\frac{1}{3}}$.

Cette méthode a été suivie de celle de Descartes pour la résolution de la formule du quatrième degré, dont en suivant aussi les procédés pas à pas, je trouve que $x^4 + Mx^3 + Nx^2 + Px + \frac{z^3 + (8N - 3M^2)z^2 + (3M^4 - 16M^2N + 16MP + 16N^2)z - (M^3 - 4MN + 8P)^2}{64z} =$

$$[x^2 + \tfrac{1}{2}(M + z^{\frac{1}{2}})x + \frac{z^{\frac{3}{2}} + Mz + (4N - M^2)z^{\frac{1}{2}} - (M^3 - 4MN + 8P)}{8z^{\frac{1}{2}}}] \times$$

$$[x^2 + \tfrac{1}{2}(M - z^{\frac{1}{2}})x + \frac{z^{\frac{3}{2}} - Mz + (4N - M^2)z^{\frac{1}{2}} + (M^3 - 4MN + 8P)}{8z^{\frac{1}{2}}}].$$

Je fais $\frac{z^3 + (8N - 3M^2)z^2 + (3M^4 - 16M^2N + 16MP + 16N^2)z - (M^3 - 4MN + 8P)^2}{64z} = Q$ ou $z^3 + (8N - 3M^2)z^2 + (3M^4 - 16M^2N + 16MP + 16N^2 - 64Q)z - (M^3 - 4MN + 8P)^2 = 0$;

j'aurai z, & par conséquent j'aurai les facteurs de la formule $x^4 + Mx^3 + Nx^2 + Px + Q$.

L'on pourroit peut-être faire dépendre la résolution de la formule du cinquième degré, de la résolution d'une équation du quatrième; celle de la formule du sixième degré, de la résolution d'une équation du cinquième, &c. c'est ce que je n'ai pas tenté, ayant tourné mes vûes sur cette matière d'un autre côté, comme on va le voir.

PROPOSITION I.

Les lettres m, n, p, q, r, s, t, &c. désignant des nombres réels positifs, les formules du premier degré sont,

1.ere $x + m$,

2. $x - m$.

Celles du second degré sont,

1.ere $x^2 + mx + n$,

2. $x^2 + mx - n$,

3. $x^2 - mx + n$,

4. $x^2 - mx - n$,

5. $x^2 + n$,

6. $x^2 - n$.

Celles du troisième degré sont,

1.ere $x^3 + mx^2 + nx + p$,

2. $x^3 + mx^2 + nx - p$,

3. $x^3 + mx^2 - nx + p$,

4. $x^3 - mx^2 + nx + p$,

5. $x^3 + mx^2 - nx - p$,

6. $x^3 - mx^2 + nx - p$,

7. $x^3 - mx^2 - nx + p$,

8. $x^3 - mx^2 - nx - p$,

9. $x^3 + mx^2 + p$,

10. $x^3 + mx^2 - p$,

11. $x^3 - mx^2 + p$,

12. $x^3 - mx^2 - p$,

13. $x^3 + nx + p$,
14. $x^3 + nx - p$,
15. $x^3 - nx + p$,
16. $x^3 - nx - p$,
17. $x^3 + p$,
18. $x^3 - p$.

Celles du quatrième degré sont,

1.ere $x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q$,
2. $x^4 + mx^3 + nx^2 + px - q$,
3. $x^4 + mx^3 + nx^2 - px + q$,
4. $x^4 + mx^3 - nx^2 + px + q$,
5. $x^4 - mx^3 + nx^2 + px + q$,
6. $x^4 + mx^3 + nx^2 - px - q$,
7. $x^4 + mx^3 - nx^2 + px - q$,
8. $x^4 - mx^3 + nx^2 + px - q$,
9. $x^4 + mx^3 - nx^2 - px + q$,
10. $x^4 - mx^3 + nx^2 - px + q$,
11. $x^4 - mx^3 - nx^2 + px + q$,
12. $x^4 + mx^3 - nx^2 - px - q$,
13. $x^4 - mx^3 + nx^2 - px - q$,
14. $x^4 - mx^3 - nx^2 + px - q$,
15. $x^4 - mx^3 - nx^2 - px + q$,
16. $x^4 - mx^3 - nx^2 - px - q$,
17. $x^4 + mx^3 + nx^2 + q$,
18. $x^4 + mx^3 + nx^2 - q$,

19. $x^4 + mx^3 - nx^2 + q,$
20. $x^4 - mx^3 + nx^2 + q,$
21. $x^4 + mx^3 - nx^2 - q,$
22. $x^4 - mx^3 + nx^2 - q,$
23. $x^4 - mx^3 - nx^2 + q,$
24. $x^4 - mx^3 - nx^2 - q,$
25. $x^4 + mx^3 + px + q,$
26. $x^4 + mx^3 + px - q,$
27. $x^4 + mx^3 - px + q,$
28. $x^4 - mx^3 + px + q,$
29. $x^4 + mx^3 - px - q,$
30. $x^4 - mx^3 + px - q,$
31. $x^4 - mx^3 - px + q,$
32. $x^4 - mx^3 - px - q,$
33. $x^4 + nx^2 + px + q,$
34. $x^4 + nx^2 + px - q,$
35. $x^4 + nx^2 - px + q,$
36. $x^4 - nx^2 + px + q,$
37. $x^4 + nx^2 - px - q,$
38. $x^4 - nx^2 + px - q,$
39. $x^4 - nx^2 - px + q,$
40. $x^4 - nx^2 - px - q,$
41. $x^4 + mx^3 + q,$
42. $x^4 + mx^3 - q,$
43. $x^4 - mx^3 + q,$
44. $x^4 - mx^3 - q,$

45. $x^4 + nx^2 + q$,
46. $x^4 + nx^2 - q$,
47. $x^4 - nx^2 + q$,
48. $x^4 - nx^2 - q$,
49. $x^4 + px + q$,
50. $x^4 + px - q$,
51. $x^4 - px + q$,
52. $x^4 - px - q$,
53. $x^4 + q$,
54. $x^4 - q$.

Celles du cinquième degré ſont;

1.ere $x^5 + mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$,
2. $x^5 + mx^4 + nx^3 + px^2 + qx - r$,
3. $x^5 + mx^4 + nx^3 + px^2 - qx + r$,
4. $x^5 + mx^4 + nx^3 - px^2 + qx + r$,
5. $x^5 + mx^4 - nx^3 + px^2 + qx + r$,
6. $x^5 - mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$,
7. $x^5 + mx^4 + nx^3 + px^2 - qx - r$,
8. $x^5 + mx^4 + nx^3 - px^2 + qx - r$,
9. $x^5 + mx^4 - nx^3 + px^2 + qx - r$,
10. $x^5 - mx^4 + nx^3 + px^2 + qx - r$,
11. $x^5 + mx^4 + nx^3 - px^2 - qx + r$,
12. $x^5 + mx^4 - nx^3 + px^2 - qx + r$,
13. $x^5 - mx^4 + nx^3 + px^2 - qx + r$,
14. $x^5 + mx^4 - nx^3 - px^2 + qx + r$,

15. $x^5 - mx^4 + nx^3 - px^2 + qx + r,$
16. $x^5 - mx^4 - nx^3 + px^2 + qx + r,$
17. $x^5 + mx^4 + nx^3 - px^2 - qx - r,$
18. $x^5 + mx^4 - nx^3 + px^2 - qx - r,$
19. $x^5 + mx^4 - nx^3 - px^2 + qx - r,$
20. $x^5 + mx^4 - nx^3 - px^2 - qx + r,$
21. $x^5 - mx^4 + nx^3 + px^2 - qx - r,$
22. $x^5 - mx^4 + nx^3 - px^2 + qx - r,$
23. $x^5 - mx^4 + nx^3 - px^2 - qx + r,$
24. $x^5 - mx^4 - nx^3 + px^2 + qx - r,$
25. $x^5 - mx^4 - nx^3 + px^2 - qx + r,$
26. $x^5 - mx^4 - nx^3 - px^2 + qx + r,$
27. $x^5 + mx^4 - nx^3 - px^2 - qx - r,$
28. $x^5 - mx^4 + nx^3 - px^2 - qx - r,$
29. $x^5 - mx^4 - nx^3 + px^2 - qx - r,$
30. $x^5 - mx^4 - nx^3 - px^2 + qx - r,$
31. $x^5 - mx^4 - nx^3 - px^2 - qx + r,$
32. $x^5 - mx^4 - nx^3 - px^2 - qx - r,$
33. $x^5 + mx^4 + nx^3 + px^2 + r,$
34. $x^5 + mx^4 + nx^3 + px^2 - r,$
35. $x^5 + mx^4 + nx^3 - px^2 + r,$
36. $x^5 + mx^4 - nx^3 + px^2 + r,$
37. $x^5 - mx^4 + nx^3 + px^2 + r,$
38. $x^5 + mx^4 + nx^3 - px^2 - r,$
39. $x^5 + mx^4 - nx^3 + px^2 - r,$
40. $x^5 - mx^4 + nx^3 + px^2 - r,$

41. $x^5 + mx^4 - nx^3 - px^2 + r,$
42. $x^5 - mx^4 + nx^3 - px^2 + r,$
43. $x^5 - mx^4 - nx^3 + px^2 + r,$
44. $x^5 + mx^4 - nx^3 - px^2 - r,$
45. $x^5 - mx^4 + nx^3 - px^2 - r,$
46. $x^5 - mx^4 - nx^3 + px^2 - r,$
47. $x^5 - mx^4 - nx^3 - px^2 + r,$
48. $x^5 - mx^4 - nx^3 - px^2 - r,$
49. $x^5 + mx^4 + nx^3 + qx + r,$
50. $x^5 + mx^4 + nx^3 + qx - r,$
51. $x^5 + mx^4 + nx^3 - qx + r,$
52. $x^5 + mx^4 - nx^3 + qx + r,$
53. $x^5 - mx^4 + nx^3 + qx + r,$
54. $x^5 + mx^4 + nx^3 - qx - r,$
55. $x^5 + mx^4 - nx^3 + qx - r,$
56. $x^5 - mx^4 + nx^3 + qx - r,$
57. $x^5 + mx^4 - nx^3 - qx + r,$
58. $x^5 - mx^4 + nx^3 - qx + r,$
59. $x^5 - mx^4 - nx^3 + qx + r,$
60. $x^5 + mx^4 - nx^3 - qx - r,$
61. $x^5 - mx^4 + nx^3 - qx - r,$
62. $x^5 - mx^4 - nx^3 + qx - r,$
63. $x^5 - mx^4 - nx^3 - qx + r,$
64. $x^5 - mx^4 - nx^3 - qx - r,$
65. $x^5 + mx^4 + px^2 + qx + r,$
66. $x^5 + mx^4 + px^2 + qx - r,$

67. $x^5 + mx^4 + px^2 - qx + r,$
68. $x^5 + mx^4 - px^2 + qx + r,$
69. $x^5 - mx^4 + px^2 + qx + r,$
70. $x^5 + mx^4 + px^2 - qx - r,$
71. $x^5 + mx^4 - px^2 + qx - r,$
72. $x^5 - mx^4 + px^2 + qx - r,$
73. $x^5 + mx^4 - px^2 - qx + r,$
74. $x^5 - mx^4 + px^2 - qx + r,$
75. $x^5 - mx^4 - px^2 + qx + r,$
76. $x^5 + mx^4 - px^2 - qx - r,$
77. $x^5 - mx^4 + px^2 - qx - r,$
78. $x^5 - mx^4 - px^2 + qx - r,$
79. $x^5 - mx^4 - px^2 - qx + r,$
80. $x^5 - mx^4 - px^2 - qx - r,$
81. $x^5 + nx^3 + px^2 + qx + r,$
82. $x^5 + nx^3 + px^2 + qx - r,$
83. $x^5 + nx^3 + px^2 - qx + r,$
84. $x^5 + nx^3 - px^2 + qx + r,$
85. $x^5 - nx^3 + px^2 + qx + r,$
86. $x^5 + nx^3 + px^2 - qx - r,$
87. $x^5 + nx^3 - px^2 + qx - r,$
88. $x^5 - nx^3 + px^2 + qx - r,$
89. $x^5 + nx^3 - px^2 - qx + r,$
90. $x^5 - nx^3 + px^2 - qx + r,$
91. $x^5 - nx^3 - px^2 + qx + r,$
92. $x^5 + nx^3 - px^2 - qx - r,$

93.

93. $x^5 - nx^3 + px^2 - qx - r$,
94. $x^5 - nx^3 - px^2 + qx - r$,
95. $x^5 - nx^3 - px^2 - qx + r$,
96. $x^5 - nx^3 - px^2 - qx - r$,
97. $x^5 + mx^4 + nx^3 + r$,
98. $x^5 + mx^4 + nx^3 - r$,
99. $x^5 + mx^4 - nx^3 + r$,
100. $x^5 - mx^4 + nx^3 + r$,
101. $x^5 + mx^4 - nx^3 - r$,
102. $x^5 - mx^4 + nx^3 - r$,
103. $x^5 - mx^4 - nx^3 + r$,
104. $x^5 - mx^4 - nx^3 - r$,
105. $x^5 + mx^4 + px^2 + r$,
106. $x^5 + mx^4 + px^2 - r$,
107. $x^5 + mx^4 - px^2 + r$,
108. $x^5 - mx^4 + px^2 + r$,
109. $x^5 + mx^4 - px^2 - r$,
110. $x^5 - mx^4 + px^2 - r$,
111. $x^5 - mx^4 - px^2 + r$,
112. $x^5 - mx^4 - px^2 - r$,
113. $x^5 + nx^3 + px^2 + r$,
114. $x^5 + nx^3 + px^2 - r$,
115. $x^5 + nx^3 - px^2 + r$,
116. $x^5 - nx^3 + px^2 + r$,
117. $x^5 + nx^3 - px^2 - r$,
118. $x^5 - nx^3 + px^2 - r$,

119. $x^5 - nx^3 - px^2 + r,$
120. $x^5 - nx^3 - px^2 - r,$
121. $x^5 + mx^4 + qx + r,$
122. $x^5 + mx^4 + qx - r,$
123. $x^5 + mx^4 - qx + r,$
124. $x^5 - mx^4 + qx + r,$
125. $x^5 + mx^4 - qx - r,$
126. $x^5 - mx^4 + qx - r,$
127. $x^5 - mx^4 - qx + r,$
128. $x^5 - mx^4 - qx - r,$
129. $x^5 + nx^3 + qx + r,$
130. $x^5 + nx^3 + qx - r,$
131. $x^5 + nx^3 - qx + r,$
132. $x^5 - nx^3 + qx + r,$
133. $x^5 + nx^3 - qx - r,$
134. $x^5 - nx^3 + qx - r,$
135. $x^5 - nx^3 - qx + r,$
136. $x^5 - nx^3 - qx - r,$
137. $x^5 + px^2 + qx + r,$
138. $x^5 + px^2 + qx - r,$
139. $x^5 + px^2 - qx + r,$
140. $x^5 - px^2 + qx + r,$
141. $x^5 + px^2 - qx - r,$
142. $x^5 - px^2 + qx - r,$
143. $x^5 - px^2 - qx + r,$
144. $x^5 - px^2 - qx - r,$

145. $x^5 + mx^4 + r$,
146. $x^5 + mx^4 - r$,
147. $x^5 - mx^4 + r$,
148. $x^5 - mx^4 - r$,
149. $x^5 + nx^3 + r$,
150. $x^5 + nx^3 - r$,
151. $x^5 - nx^3 + r$,
152. $x^5 - nx^3 - r$,
153. $x^5 + px^2 + r$,
154. $x^5 + px^2 - r$,
155. $x^5 - px^2 + r$,
156. $x^5 - px^2 - r$,
157. $x^5 + qx + r$,
158. $x^5 + qx - r$,
159. $x^5 - qx + r$,
160. $x^5 - qx - r$,
161. $x^5 + r$,
162. $x^5 - r$.

Celles du ſixième degré ſont,

1.ere $x^6 + mx^5 + nx^4 + px^3 + qx^2 + rx + s$, &c.

485. $x^6 + s$,
486. $x^6 - s$.

PROPOSITION II.

a & b étant des nombres réels positifs, & a étant plus grand que b, tout nombre, quel qu'il soit, & quelque compliquée que soit son expression, pourra toûjours se désigner par a, ou par $-a$, ou par $a\sqrt{-1}$, ou par $-a\sqrt{-1}$, ou par $a+a\sqrt{-1}$, ou par $a-a\sqrt{-1}$, ou par $-a+a\sqrt{-1}$, ou par $-a-a\sqrt{-1}$, ou par $a+b\sqrt{-1}$, ou par $a-b\sqrt{-1}$, ou par $-a+b\sqrt{-1}$, ou par $-a-b\sqrt{-1}$, ou par $b+a\sqrt{-1}$, ou par $b-a\sqrt{-1}$, ou par $-b+a\sqrt{-1}$, ou par $-b-a\sqrt{-1}$.

PROPOSITION III.

A & B étant des nombres réels positifs ou négatifs, si l'un des facteurs d'une formule est $x+A+B\sqrt{-1}$, ceci $x+A-B\sqrt{-1}$ sera nécessairement un autre des facteurs de cette même formule, sans quoi les nombres m, n, p, q, r, s, t, &c. ne seroient pas des nombres réels, comme nous le supposons.

PROPOSITION IV.

a, b, c, d, e, f, g, &c. étant des nombres réels positifs, & a étant plus grand que b, b plus grand que c, c plus grand que d, d plus grand que e, e plus grand que f, f plus grand que g, &c.

Les systèmes de facteurs des formules du second degré sont,

$(x+a)(x+a)$
$(x+a)(x-a)$
$(x-a)(x-a)$
$(x\pm a)(x\pm b)$

$(x+a)(x-b)$
$(x-a)(x+b)$
$(x-a)(x-b)$
$(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$
$(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$
$(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$
$(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$
$(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$
$(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$

Ceux des formules du troisième degré sont,

$(x+a)(x+a)(x+a)$
$(x+a)(x+a)(x-a)$
$(x+a)(x-a)(x-a)$
$(x-a)(x-a)(x-a)$
$(x+a)(x+b)(x+b)$
$(x+a)(x+b)(x-b)$
$(x-a)(x+b)(x+b)$
$(x+a)(x-b)(x-b)$
$(x-a)(x+b)(x-b)$
$(x-a)(x-b)(x-b)$
$(x+a)(x+a)(x+b)$
$(x+a)(x+a)(x-b)$
$(x+a)(x-a)(x+b)$
$(x+a)(x-a)(x-b)$
$(x-a)(x-a)(x+b)$
$(x-a)(x-a)(x-b)$
$(x+a)(x+b)(x+c)$
$(x+a)(x+b)(x-c)$
$(x+a)(x-b)(x+c)$
$(x-a)(x+b)(x+c)$
$(x+a)(x-b)(x-c)$
$(x-a)(x+b)(x-c)$

$(x-a)(x-b)(x+c)$

$(x-a)(x-b)(x-c)$

$(x+a)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$

$(x-a)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$

$(x+a)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$

$(x-a)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$

$(x+b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$

$(x-b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$

$(x+a)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$

$(x+a)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$

$(x-a)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$

$(x-a)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$

$(x+a)(x+b-b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$

$(x+a)(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1})$

$(x-a)(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$

$(x-a)(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1})$

$(x+b)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$

$(x+b)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$

$(x-b)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$

$(x-b)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$

$(x+b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$

$(x+b)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$

$(x-b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$

$(x-b)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$

$(x+a)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$

$(x+a)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$

$(x-a)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$

$(x-a)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$

$(x+a)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$

$(x+a)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$

$(x-a)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$

$(x-a)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$

$(x+b)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$

$(x+b)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$

$(x-b)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$
$(x+b)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$
$(x+b)(x-a+c\sqrt{-1})(x-a-c\sqrt{-1})$
$(x-b)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-a+c\sqrt{-1})(x-a-c\sqrt{-1})$
$(x+b)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1})$
$(x+c)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$
$(x+c)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$
$(x-c)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$
$(x-c)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$
$(x+c)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$
$(x+c)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$
$(x-c)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$
$(x-c)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$

Ceux des formules du quatrième degré sont,

$(x+a)(x+a)(x+a)(x+a)$
$(x+a)(x+a)(x+a)(x-a)$
$(x+a)(x+a)(x-a)(x-a)$
$(x+a)(x-a)(x-a)(x-a)$
$(x-a)(x-a)(x-a)(x-a)$
$(x+a)(x+b)(x+b)(x+b)$
$(x+a)(x+b)(x+b)(x-b)$

$(x-a)(x+b)(x+b)(x+b)$
$(x+a)(x+b)(x-b)(x-b)$
$(x-a)(x+b)(x+b)(x-b)$
$(x+a)(x-b)(x-b)(x-b)$
$(x-a)(x+b)(x-b)(x-b)$
$(x-a)(x-b)(x-b)(x-b)$
$(x+a)(x+a)(x+a)(x+b)$
$(x+a)(x+a)(x+a)(x-b)$
$(x+a)(x+a)(x-a)(x+b)$
$(x+a)(x+a)(x-a)(x-b)$
$(x+a)(x-a)(x-a)(x+b)$
$(x+a)(x-a)(x-a)(x-b)$
$(x-a)(x-a)(x-a)(x+b)$
$(x-a)(x-a)(x-a)(x-b)$
$(x+a)(x+a)(x+b)(x+b)$
$(x+a)(x+a)(x+b)(x-b)$
$(x+a)(x-a)(x+b)(x+b)$
$(x+a)(x+a)(x-b)(x+b)$
$(x-a)(x-a)(x+b)(x+b)$
$(x+a)(x-a)(x+b)(x-b)$
$(x+a)(x-a)(x-b)(x-b)$
$(x-a)(x-a)(x-b)(x+b)$
$(x+a)(x+b)(x+c)(x+c)$
$(x+a)(x+b)(x+c)(x-c)$
$(x+a)(x-b)(x+c)(x+c)$
$(x-a)(x+b)(x+c)(x+c)$
$(x+a)(x+b)(x-c)(x-c)$
$(x+a)(x-b)(x+c)(x-c)$
$(x-a)(x+b)(x+c)(x-c)$
$(x-a)(x-b)(x+c)(x+c)$
$(x+a)(x-b)(x-c)(x-c)$
$(x-a)(x+b)(x-c)(x-c)$
$(x-a)(x-b)(x+c)(x-c)$
$(x-a)(x-b)(x-c)(x-c)$

$(x+a)$

$(x+a)(x+b)(x+b)(x+c)$
$(x+a)(x+b)(x+b)(x-c)$
$(x+a)(x+b)(x-b)(x+c)$
$(x-a)(x+b)(x+b)(x+c)$
$(x+a)(x+b)(x-b)(x-c)$
$(x-a)(x+b)(x+b)(x-c)$
$(x+a)(x-b)(x-b)(x+c)$
$(x-a)(x+b)(x-b)(x+c)$
$(x+a)(x-b)(x-b)(x-c)$
$(x-a)(x+b)(x-b)(x-c)$
$(x-a)(x-b)(x-b)(x+c)$
$(x-a)(x-b)(x-b)(x-c)$
$(x+a)(x+a)(x+b)(x+c)$
$(x+a)(x+a)(x+b)(x-c)$
$(x+a)(x+a)(x-b)(x+c)$
$(x+a)(x-a)(x+b)(x+c)$
$(x+a)(x+a)(x-b)(x-c)$
$(x+a)(x-a)(x+b)(x-c)$
$(x+a)(x-a)(x-b)(x+c)$
$(x-a)(x-a)(x+b)(x+c)$
$(x+a)(x-a)(x-b)(x-c)$
$(x-a)(x-a)(x+b)(x-c)$
$(x-a)(x-a)(x-b)(x+c)$
$(x-a)(x-a)(x-b)(x-c)$
$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$
$(x+a)(x+b)(x+c)(x-d)$
$(x+a)(x+b)(x-c)(x+d)$
$(x+a)(x-b)(x+c)(x+d)$
$(x-a)(x+b)(x+c)(x+d)$
$(x+a)(x+b)(x-c)(x-d)$
$(x+a)(x-b)(x+c)(x-d)$
$(x-a)(x+b)(x+c)(x-d)$
$(x+a)(x-b)(x-c)(x+d)$
$(x-a)(x+b)(x-c)(x+d)$
$(x-a)(x-b)(x+c)(x+d)$

$(x+a)(x-b)(x-c)(x-d)$
$(x-a)(x+b)(x-c)(x-d)$
$(x-a)(x-b)(x+c)(x-d)$
$(x-a)(x-b)(x-c)(x+d)$
$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$
$(x+a)(x+a)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-a)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-a)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+a)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-a)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-a)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+b)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x+b)(x+b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x-b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+b)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x+b)(x+c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x-c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x+c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+a)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$

$(x+a)(x+a)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-a)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-a)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-a)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-a)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+b)(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+b)(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1})$
$(x+b)(x+b)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$
$(x+b)(x+b)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$
$(x+b)(x-b)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$
$(x+b)(x-b)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-b)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-b)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$
$(x+b)(x+b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x+b)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x-b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x-b)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-b)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+a)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+a)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-a)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-a)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-a)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-a)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+a)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+a)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-a)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-a)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-a)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$

$(x-a)(x-a)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+b)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+b)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+a)(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+a)(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-a)(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-a)(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-a)(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-a)(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+b)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+b)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+b)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x+b)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x+b)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x-b)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x-b)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$

$(x-b)(x-b)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-b)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+b)(x+c+c\sqrt{-1})(x+c-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+b)(x-c+c)\sqrt{-1})(x-c-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x+c+c\sqrt{-1})(x+c-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x+c+c\sqrt{-1})(x+c-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x-c+c\sqrt{-1})(x-c-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x-c+c\sqrt{-1})(x-c-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x+c+c\sqrt{-1})(x+c-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x-c+c\sqrt{-1})(x-c-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+c)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+c)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-c)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+c)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-c)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+c)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-c)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-c)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})$
$(x+b)(x+c)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$
$(x+b)(x+c)(x-a+c\sqrt{-1})(x-a-c\sqrt{-1})$
$(x+b)(x-c)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$
$(x-b)(x+c)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$
$(x+b)(x-c)(x-a+c\sqrt{-1})(x-a-c\sqrt{-1})$
$(x-b)(x+c)(x-a+c\sqrt{-1})(x-a-c\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-c)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-c)(x-a+c\sqrt{-1})(x-a-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+c)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+c)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-c)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+c)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-c)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+c)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-c)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-c)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$
$(x+c)(x+c)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$

$(x+c)(x+c)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$
$(x+c)(x-c)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$
$(x+c)(x-c)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$
$(x-c)(x-c)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$
$(x-c)(x-c)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$
$(x+b)(x+c)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x+c)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x-c)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x+c)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x-c)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x+c)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-c)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-c)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1})$
$(x+c)(x+c)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$
$(x+c)(x+c)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$
$(x+c)(x-c)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$
$(x+c)(x-c)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$
$(x-c)(x-c)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$
$(x-c)(x-c)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+b)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+b)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})$
$(x+b)(x+b)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$
$(x+b)(x+b)(x-a+c\sqrt{-1})(x-a-c\sqrt{-1})$
$(x+b)(x-b)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$
$(x+b)(x-b)(x-a+c\sqrt{-1})(x-a-c\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-b)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-b)(x-a+c\sqrt{-1})(x-a-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+b)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+b)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$

$(x+a)(x-b)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+c)(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+c)(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-c)(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+c)(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-c)(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+c)(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-c)(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-c)(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1})$
$(x+b)(x+c)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$
$(x+b)(x+c)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$
$(x+b)(x-c)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$
$(x-b)(x+c)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$
$(x+b)(x-c)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$
$(x-b)(x+c)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-c)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-c)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$
$(x+b)(x+b)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x+b)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x-b)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x-b)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-b)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-b)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x+c)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x+c)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x-c)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x+c)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x-c)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x+c)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-c)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$

$(x-b)(x-c)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+a)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+a)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-a)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-a)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-a)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-a)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+b)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+b)(x-a+c\sqrt{-1})(x-a-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x-a+c\sqrt{-1})(x-a-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x-a+c\sqrt{-1})(x-a-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x-a+c\sqrt{-1})(x-a-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+a)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+a)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-a)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-a)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-a)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-a)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+c)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+c)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-c)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+c)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-c)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+c)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-c)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-c)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+b)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1})$

$(x-a)$

$(x-a)(x-b)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+c)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+c)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-c)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+c)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-c)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+c)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-c)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-c)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x+c)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x+c)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x-c)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x+c)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x-c)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x+c)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-c)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-c)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+b)(x+c+d\sqrt{-1})(x+c-d\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+b)(x-c+d\sqrt{-1})(x-c-d\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x+c+d\sqrt{-1})(x+c-d\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x+c+d\sqrt{-1})(x+c-d\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x-c+d\sqrt{-1})(x-c-d\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x-c+d\sqrt{-1})(x-c-d\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x+c+d\sqrt{-1})(x+c-d\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x-c+d\sqrt{-1})(x-c-d\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+c)(x+b+d\sqrt{-1})(x+b-d\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+c)(x-b+d\sqrt{-1})(x-b-d\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-c)(x+b+d\sqrt{-1})(x+b-d\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+c)(x+b+d\sqrt{-1})(x+b-d\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-c)(x-b+d\sqrt{-1})(x-b-d\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+c)(x-b+d\sqrt{-1})(x-b-d\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-c)(x+b+d\sqrt{-1})(x+b-d\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-c)(x-b+d\sqrt{-1})(x-b-d\sqrt{-1})$

$(x+b)(x+c)(x+a+d\sqrt{-1})(x+a-d\sqrt{-1})$
$(x+b)(x+c)(x-a+d\sqrt{-1})(x-a-d\sqrt{-1})$
$(x+b)(x-c)(x+a+d\sqrt{-1})(x+a-d\sqrt{-1})$
$(x-b)(x+c)(x+a+d\sqrt{-1})(x+a-d\sqrt{-1})$
$(x+b)(x-c)(x-a+d\sqrt{-1})(x-a-d\sqrt{-1})$
$(x-b)(x+c)(x-a+d\sqrt{-1})(x-a-d\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-c)(x+a+d\sqrt{-1})(x+a-d\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-c)(x-a+d\sqrt{-1})(x-a-d\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+b)(x+d+c\sqrt{-1})(x+d-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+b)(x-d+c\sqrt{-1})(x-d-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x+d+c\sqrt{-1})(x+d-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x+d+c\sqrt{-1})(x+d-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x-d+c\sqrt{-1})(x-d-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x+d+c\sqrt{-1})(x-d-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x+d+c\sqrt{-1})(x+d-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x-d+c\sqrt{-1})(x-d-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+d)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+d)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-d)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+d)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-d)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+d)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-d)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-d)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})$
$(x+b)(x+d)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$
$(x+b)(x+d)(x-a+c\sqrt{-1})(x-a-c\sqrt{-1})$
$(x+b)(x-d)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$
$(x-b)(x+d)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$
$(x+b)(x-d)(x-a+c\sqrt{-1})(x-a-c\sqrt{-1})$
$(x-b)(x+d)(x-a+c\sqrt{-1})(x-a-c\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-d)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-d)(x-a+c\sqrt{-1})(x-a-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+c)(x+d+b\sqrt{-1})(x+d-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+c)(x-d+b\sqrt{-1})(x-d-b\sqrt{-1})$

$(x+a)(x-c)(x+d+b\sqrt{-1})(x+d-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+c)(x+d+b\sqrt{-1})(x+d-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-c)(x-d+b\sqrt{-1})(x-d-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+c)(x-d+b\sqrt{-1})(x-d-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-c)(x+d+b\sqrt{-1})(x+d-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-c)(x-d+b\sqrt{-1})(x-d-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+d)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+d)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-d)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+d)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-d)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+d)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-d)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-d)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$
$(x+c)(x+d)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$
$(x+c)(x+d)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$
$(x+c)(x-d)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$
$(x-c)(x+d)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$
$(x+c)(x-d)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$
$(x-c)(x+d)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$
$(x-c)(x-d)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$
$(x-c)(x-d)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$
$(x+b)(x+c)(x+d+a\sqrt{-1})(x+d-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x+c)(x-d+a\sqrt{-1})(x-d-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x-c)(x+d+a\sqrt{-1})(x+d-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x+c)(x+d+a\sqrt{-1})(x+d-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x-c)(x-d+a\sqrt{-1})(x-d-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x+c)(x-d+a\sqrt{-1})(x-d-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-c)(x+d+a\sqrt{-1})(x+d-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-c)(x-d+a\sqrt{-1})(x-d-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x+d)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x+d)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x-d)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x+d)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x-d)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1})$

$(x-b)\,(x+d)\,(x-c+a\sqrt{-1})\,(x-c-a\sqrt{-1})$
$(x-b)\,(x-d)\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1})$
$(x-b)\,(x-d)\,(x-c+a\sqrt{-1})\,(x-c-a\sqrt{-1})$
$(x+c)\,(x+d)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})$
$(x+c)\,(x+d)\,(x-b+a\sqrt{-1})\,(x-b-a\sqrt{-1})$
$(x+c)\,(x-d)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})$
$(x-c)\,(x+d)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})$
$(x+c)\,(x-d)\,(x-b+a\sqrt{-1})\,(x-b-a\sqrt{-1})$
$(x-c)\,(x+d)\,(x-b+a\sqrt{-1})\,(x-b-a\sqrt{-1})$
$(x-c)\,(x-d)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})$
$(x-c)\,(x-d)\,(x-b+a\sqrt{-1})\,(x-b-a\sqrt{-1})$
$(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})$
$(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\,(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})$
$(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\,(x+a+a\sqrt{-1})\,(x+a-a\sqrt{-1})$
$(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\,(x-a+a\sqrt{-1})\,(x-a-a\sqrt{-1})$
$(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\,(x+b+b\sqrt{-1})\,(x+b-b\sqrt{-1})$
$(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\,(x-b+b\sqrt{-1})\,(x-b-b\sqrt{-1})$
$(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})$
$(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})\,(x-a+b\sqrt{-1})\,(x-a-b\sqrt{-1})$
$(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})$
$(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})\,(x-b+a\sqrt{-1})\,(x-b-a\sqrt{-1})$
$(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})$
$(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\,(x-a+b\sqrt{-1})\,(x-a-b\sqrt{-1})$
$(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})$
$(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\,(x-b+a\sqrt{-1})\,(x-b-a\sqrt{-1})$
$(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})\,(x+a+a\sqrt{-1})\,(x+a-a\sqrt{-1})$
$(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})\,(x-a+a\sqrt{-1})\,(x-a-a\sqrt{-1})$
$(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\,(x+b+c\sqrt{-1})\,(x+b-c\sqrt{-1})$
$(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\,(x-b+c\sqrt{-1})\,(x-b-c\sqrt{-1})$
$(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1})$
$(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\,(x-c+b\sqrt{-1})\,(x-c-b\sqrt{-1})$
$(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})\,(x+a+c\sqrt{-1})\,(x+a-c\sqrt{-1})$
$(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})\,(x-a+c\sqrt{-1})\,(x-a-c\sqrt{-1})$
$(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1})$
$(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})\,(x-c+a\sqrt{-1})\,(x-c-a\sqrt{-1})$

$(x+c\sqrt{-1})\ (x-c\sqrt{-1})\ (x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})$
$(x+c\sqrt{-1})\ (x-c\sqrt{-1})\ (x-a+b\sqrt{-1})\ (x-a-b\sqrt{-1})$
$(x+c\sqrt{-1})\ (x-c\sqrt{-1})\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})$
$(x+c\sqrt{-1})\ (x-c\sqrt{-1})\ (x-b+a\sqrt{-1})\ (x-b-a\sqrt{-1})$
$(x+a+a\sqrt{-1})\ (x+a-a\sqrt{-1})\ (x+a+a\sqrt{-1})\ (x+a-a\sqrt{-1})$
$(x+a+a\sqrt{-1})\ (x+a-a\sqrt{-1})\ (x-a+a\sqrt{-1})\ (x-a-a\sqrt{-1})$
$(x-a+a\sqrt{-1})\ (x-a-a\sqrt{-1})\ (x-a+a\sqrt{-1})\ (x-a-a\sqrt{-1})$
$(x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})\ (x+b+b\sqrt{-1})\ (x+b-b\sqrt{-1})$
$(x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})\ (x-b+b\sqrt{-1})\ (x-b-b\sqrt{-1})$
$(x-a+b\sqrt{-1})\ (x-a-b\sqrt{-1})\ (x+b+b\sqrt{-1})\ (x+b-b\sqrt{-1})$
$(x-a+b\sqrt{-1})\ (x-a-b\sqrt{-1})\ (x-b+b\sqrt{-1})\ (x-b-b\sqrt{-1})$
$(x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})\ (x+b+b\sqrt{-1})\ (x+b-b\sqrt{-1})$
$(x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})\ (x-b+b\sqrt{-1})\ (x-b-b\sqrt{-1})$
$(x-b+a\sqrt{-1})\ (x-b-a\sqrt{-1})\ (x+b+b\sqrt{-1})\ (x+b-b\sqrt{-1})$
$(x-b+a\sqrt{-1})\ (x-b-a\sqrt{-1})\ (x-b+b\sqrt{-1})\ (x-b-b\sqrt{-1})$
$(x+a+a\sqrt{-1})\ (x+a-a\sqrt{-1})\ (x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})$
$(x+a+a\sqrt{-1})\ (x+a-a\sqrt{-1})\ (x-a+b\sqrt{-1})\ (x-a-b\sqrt{-1})$
$(x-a+a\sqrt{-1})\ (x-a-a\sqrt{-1})\ (x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})$
$(x-a+a\sqrt{-1})\ (x-a-a\sqrt{-1})\ (x-a+b\sqrt{-1})\ (x-a-b\sqrt{-1})$
$(x+a+a\sqrt{-1})\ (x+a-a\sqrt{-1})\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})$
$(x+a+a\sqrt{-1})\ (x+a-a\sqrt{-1})\ (x-b+a\sqrt{-1})\ (x-b-a\sqrt{-1})$
$(x-a+a\sqrt{-1})\ (x-a-a\sqrt{-1})\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})$
$(x-a+a\sqrt{-1})\ (x-a-a\sqrt{-1})\ (x-b+a\sqrt{-1})\ (x-b-a\sqrt{-1})$
$(x+a+a\sqrt{-1})\ (x+a-a\sqrt{-1})\ (x+b+b\sqrt{-1})\ (x+b-b\sqrt{-1})$
$(x+a+a\sqrt{-1})\ (x+a-a\sqrt{-1})\ (x-b+b\sqrt{-1})\ (x-b-b\sqrt{-1})$
$(x-a+a\sqrt{-1})\ (x-a-a\sqrt{-1})\ (x+b+b\sqrt{-1})\ (x+b-b\sqrt{-1})$
$(x-a+a\sqrt{-1})\ (x-a-a\sqrt{-1})\ (x-b+b\sqrt{-1})\ (x-b-b\sqrt{-1})$
$(x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})\ (x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})$
$(x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})\ (x-a+b\sqrt{-1})\ (x-a-b\sqrt{-1})$
$(x-a+b\sqrt{-1})\ (x-a-b\sqrt{-1})\ (x-a+b\sqrt{-1})\ (x-a-b\sqrt{-1})$
$(x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})$
$(x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})\ (x-b+a\sqrt{-1})\ (x-b-a\sqrt{-1})$
$(x-a+b\sqrt{-1})\ (x-a-b\sqrt{-1})\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})$
$(x-a+b\sqrt{-1})\ (x-a-b\sqrt{-1})\ (x-b+a\sqrt{-1})\ (x-b-a\sqrt{-1})$
$(x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})$

$(x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})\ (x-b+a\sqrt{-1})\ (x-b-a\sqrt{-1})$
$(x-b+a\sqrt{-1})\ (x-b-a\sqrt{-1})\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})$
$(x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})\ (x+c+c\sqrt{-1})\ (x+c-c\sqrt{-1})$
$(x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})\ (x-c+c\sqrt{-1})\ (x-c-c\sqrt{-1})$
$(x-a+b\sqrt{-1})\ (x-a-b\sqrt{-1})\ (x+c+c\sqrt{-1})\ (x+c-c\sqrt{-1})$
$(x-a+b\sqrt{-1})\ (x-a-b\sqrt{-1})\ (x-c+c\sqrt{-1})\ (x-c-c\sqrt{-1})$
$(x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})\ (x+c+c\sqrt{-1})\ (x+c-c\sqrt{-1})$
$(x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})\ (x-c+c\sqrt{-1})\ (x-c-c\sqrt{-1})$
$(x-b+a\sqrt{-1})\ (x-b-a\sqrt{-1})\ (x+c+c\sqrt{-1})\ (x+c-c\sqrt{-1})$
$(x-b+a\sqrt{-1})\ (x-b-a\sqrt{-1})\ (x-c+c\sqrt{-1})\ (x-c-c\sqrt{-1})$
$(x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$
$(x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})\ (x-b+c\sqrt{-1})\ (x-b-c\sqrt{-1})$
$(x-a+c\sqrt{-1})\ (x-a-c\sqrt{-1})\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$
$(x-a+c\sqrt{-1})\ (x-a-c\sqrt{-1})\ (x-b+c\sqrt{-1})\ (x-b-c\sqrt{-1})$
$(x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$
$(x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})\ (x-c+b\sqrt{-1})\ (x-c-b\sqrt{-1})$
$(x-a+c\sqrt{-1})\ (x-a-c\sqrt{-1})\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$
$(x-a+c\sqrt{-1})\ (x-a-c\sqrt{-1})\ (x-c+b\sqrt{-1})\ (x-c-b\sqrt{-1})$
$(x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$
$(x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})\ (x-b+c\sqrt{-1})\ (x-b-c\sqrt{-1})$
$(x-c+a\sqrt{-1})\ (x-c-a\sqrt{-1})\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$
$(x-c+a\sqrt{-1})\ (x-c-a\sqrt{-1})\ (x-b+c\sqrt{-1})\ (x-b-c\sqrt{-1})$
$(x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$
$(x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})\ (x-c+b\sqrt{-1})\ (x-c-b\sqrt{-1})$
$(x-c+a\sqrt{-1})\ (x-c-a\sqrt{-1})\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$
$(x-c+a\sqrt{-1})\ (x-c-a\sqrt{-1})\ (x-c+b\sqrt{-1})\ (x-c-b\sqrt{-1})$
$(x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$
$(x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})\ (x-b+c\sqrt{-1})\ (x-b-c\sqrt{-1})$
$(x-a+b\sqrt{-1})\ (x-a-b\sqrt{-1})\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$
$(x-a+b\sqrt{-1})\ (x-a-b\sqrt{-1})\ (x-b+c\sqrt{-1})\ (x-b-c\sqrt{-1})$
$(x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$
$(x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})\ (x-c+b\sqrt{-1})\ (x-c-b\sqrt{-1})$
$(x-a+b\sqrt{-1})\ (x-a-b\sqrt{-1})\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$
$(x-a+b\sqrt{-1})\ (x-a-b\sqrt{-1})\ (x-c+b\sqrt{-1})\ (x-c-b\sqrt{-1})$
$(x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$

$(x+b+a\sqrt{-1})$ $(x+b-a\sqrt{-1})$ $(x-b+c\sqrt{-1})$ $(x-b-c\sqrt{-1})$
$(x-b+a\sqrt{-1})$ $(x-b-a\sqrt{-1})$ $(x+b+c\sqrt{-1})$ $(x+b-c\sqrt{-1})$
$(x-b+a\sqrt{-1})$ $(x-b-a\sqrt{-1})$ $(x-b+c\sqrt{-1})$ $(x-b-c\sqrt{-1})$
$(x+b+a\sqrt{-1})$ $(x+b-a\sqrt{-1})$ $(x+c+b\sqrt{-1})$ $(x+c-b\sqrt{-1})$
$(x+b+a\sqrt{-1})$ $(x+b-a\sqrt{-1})$ $(x-c+b\sqrt{-1})$ $(x-c-b\sqrt{-1})$
$(x-b+a\sqrt{-1})$ $(x-b-a\sqrt{-1})$ $(x+c+b\sqrt{-1})$ $(x+c-b\sqrt{-1})$
$(x-b+a\sqrt{-1})$ $(x-b-a\sqrt{-1})$ $(x-c+b\sqrt{-1})$ $(x-c-b\sqrt{-1})$
$(x+a+c\sqrt{-1})$ $(x+a-c\sqrt{-1})$ $(x+b+b\sqrt{-1})$ $(x+b-b\sqrt{-1})$
$(x+a+c\sqrt{-1})$ $(x+a-c\sqrt{-1})$ $(x-b+b\sqrt{-1})$ $(x-b-b\sqrt{-1})$
$(x-a+c\sqrt{-1})$ $(x-a-c\sqrt{-1})$ $(x+b+b\sqrt{-1})$ $(x+b-b\sqrt{-1})$
$(x-a+c\sqrt{-1})$ $(x-a-c\sqrt{-1})$ $(x-b+b\sqrt{-1})$ $(x-b-b\sqrt{-1})$
$(x+c+a\sqrt{-1})$ $(x+c-a\sqrt{-1})$ $(x+b+b\sqrt{-1})$ $(x+b-b\sqrt{-1})$
$(x+c+a\sqrt{-1})$ $(x+c-a\sqrt{-1})$ $(x-b+b\sqrt{-1})$ $(x-b-b\sqrt{-1})$
$(x-c+a\sqrt{-1})$ $(x-c-a\sqrt{-1})$ $(x+b+b\sqrt{-1})$ $(x+b-b\sqrt{-1})$
$(x-c+a\sqrt{-1})$ $(x-c-a\sqrt{-1})$ $(x-b+b\sqrt{-1})$ $(x-b-b\sqrt{-1})$
$(x+a+a\sqrt{-1})$ $(x+a-a\sqrt{-1})$ $(x+b+c\sqrt{-1})$ $(x+b-c\sqrt{-1})$
$(x+a+a\sqrt{-1})$ $(x+a-a\sqrt{-1})$ $(x-b+c\sqrt{-1})$ $(x-b-c\sqrt{-1})$
$(x-a+a\sqrt{-1})$ $(x-a-a\sqrt{-1})$ $(x+b+c\sqrt{-1})$ $(x+b-c\sqrt{-1})$
$(x-a+a\sqrt{-1})$ $(x-a-a\sqrt{-1})$ $(x-b+c\sqrt{-1})$ $(x-b-c\sqrt{-1})$
$(x+a+a\sqrt{-1})$ $(x+a-a\sqrt{-1})$ $(x+c+b\sqrt{-1})$ $(x+c-b\sqrt{-1})$
$(x+a+a\sqrt{-1})$ $(x+a-a\sqrt{-1})$ $(x-c+b\sqrt{-1})$ $(x-c-b\sqrt{-1})$
$(x-a+a\sqrt{-1})$ $(x-a-a\sqrt{-1})$ $(x+c+b\sqrt{-1})$ $(x+c-b\sqrt{-1})$
$(x-a+a\sqrt{-1})$ $(x-a-a\sqrt{-1})$ $(x-c+b\sqrt{-1})$ $(x-c-b\sqrt{-1})$
$(x+a+b\sqrt{-1})$ $(x+a-b\sqrt{-1})$ $(x+a+c\sqrt{-1})$ $(x+a-c\sqrt{-1})$
$(x+a+b\sqrt{-1})$ $(x+a-b\sqrt{-1})$ $(x-a+c\sqrt{-1})$ $(x-a-c\sqrt{-1})$
$(x-a+b\sqrt{-1})$ $(x-a-b\sqrt{-1})$ $(x+a+c\sqrt{-1})$ $(x+a-c\sqrt{-1})$
$(x-a+b\sqrt{-1})$ $(x-a-b\sqrt{-1})$ $(x-a+c\sqrt{-1})$ $(x-a-c\sqrt{-1})$
$(x+a+b\sqrt{-1})$ $(x+a-b\sqrt{-1})$ $(x+c+a\sqrt{-1})$ $(x+c-a\sqrt{-1})$
$(x+a+b\sqrt{-1})$ $(x+a-b\sqrt{-1})$ $(x-c+a\sqrt{-1})$ $(x-c-a\sqrt{-1})$
$(x-a+b\sqrt{-1})$ $(x-a-b\sqrt{-1})$ $(x+c+a\sqrt{-1})$ $(x+c-a\sqrt{-1})$
$(x-a+b\sqrt{-1})$ $(x-a-b\sqrt{-1})$ $(x-c+a\sqrt{-1})$ $(x-c-a\sqrt{-1})$
$(x+b+a\sqrt{-1})$ $(x+b-a\sqrt{-1})$ $(x+a+c\sqrt{-1})$ $(x+a-c\sqrt{-1})$
$(x+b+a\sqrt{-1})$ $(x+b-a\sqrt{-1})$ $(x-a+c\sqrt{-1})$ $(x-a-c\sqrt{-1})$
$(x-b+a\sqrt{-1})$ $(x-b-a\sqrt{-1})$ $(x+a+c\sqrt{-1})$ $(x+a-c\sqrt{-1})$
$(x-b+a\sqrt{-1})$ $(x-b-a\sqrt{-1})$ $(x-a+c\sqrt{-1})$ $(x-a-c\sqrt{-1})$

$(x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})\ (x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})$
$(x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})\ (x-c+a\sqrt{-1})\ (x-c-a\sqrt{-1})$
$(x-b+a\sqrt{-1})\ (x-b-a\sqrt{-1})\ (x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})$
$(x-b+a\sqrt{-1})\ (x-b-a\sqrt{-1})\ (x-c+a\sqrt{-1})\ (x-c-a\sqrt{-1})$
$(x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})\ (x+c+d\sqrt{-1})\ (x+c-d\sqrt{-1})$
$(x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})\ (x-c+d\sqrt{-1})\ (x-c-d\sqrt{-1})$
$(x-a+b\sqrt{-1})\ (x-a-b\sqrt{-1})\ (x+c+d\sqrt{-1})\ (x+c-d\sqrt{-1})$
$(x-a+b\sqrt{-1})\ (x-a-b\sqrt{-1})\ (x-c+d\sqrt{-1})\ (x-c-d\sqrt{-1})$
$(x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})\ (x+d+c\sqrt{-1})\ (x+d-c\sqrt{-1})$
$(x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})\ (x-d+c\sqrt{-1})\ (x-d-c\sqrt{-1})$
$(x-a+b\sqrt{-1})\ (x-a-b\sqrt{-1})\ (x+d+c\sqrt{-1})\ (x+d-c\sqrt{-1})$
$(x-a+b\sqrt{-1})\ (x-a-b\sqrt{-1})\ (x-d+c\sqrt{-1})\ (x-d-c\sqrt{-1})$
$(x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})\ (x+c+d\sqrt{-1})\ (x+c-d\sqrt{-1})$
$(x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})\ (x-c+d\sqrt{-1})\ (x-c-d\sqrt{-1})$
$(x-b+a\sqrt{-1})\ (x-b-a\sqrt{-1})\ (x+c+d\sqrt{-1})\ (x+c-d\sqrt{-1})$
$(x-b+a\sqrt{-1})\ (x-b-a\sqrt{-1})\ (x-c+d\sqrt{-1})\ (x-c-d\sqrt{-1})$
$(x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})\ (x+d+c\sqrt{-1})\ (x+d-c\sqrt{-1})$
$(x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})\ (x-d+c\sqrt{-1})\ (x-d-c\sqrt{-1})$
$(x-b+a\sqrt{-1})\ (x-b-a\sqrt{-1})\ (x+d+c\sqrt{-1})\ (x+d-c\sqrt{-1})$
$(x-b+a\sqrt{-1})\ (x-b-a\sqrt{-1})\ (x-d+c\sqrt{-1})\ (x-d-c\sqrt{-1})$
$(x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})\ (x+b+d\sqrt{-1})\ (x+b-d\sqrt{-1})$
$(x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})\ (x-b+d\sqrt{-1})\ (x-b-d\sqrt{-1})$
$(x-a+c\sqrt{-1})\ (x-a-c\sqrt{-1})\ (x+b+d\sqrt{-1})\ (x+b-d\sqrt{-1})$
$(x-a+c\sqrt{-1})\ (x-a-c\sqrt{-1})\ (x-b+d\sqrt{-1})\ (x-b-d\sqrt{-1})$
$(x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})\ (x+d+b\sqrt{-1})\ (x+d-b\sqrt{-1})$
$(x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})\ (x-d+b\sqrt{-1})\ (x-d-b\sqrt{-1})$
$(x-a+c\sqrt{-1})\ (x-a-c\sqrt{-1})\ (x+d+b\sqrt{-1})\ (x+d-b\sqrt{-1})$
$(x-a+c\sqrt{-1})\ (x-a-c\sqrt{-1})\ (x-d+b\sqrt{-1})\ (x-d-b\sqrt{-1})$
$(x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})\ (x+b+d\sqrt{-1})\ (x+b-d\sqrt{-1})$
$(x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})\ (x-b+d\sqrt{-1})\ (x-b-d\sqrt{-1})$
$(x-c+a\sqrt{-1})\ (x-c-a\sqrt{-1})\ (x+b+d\sqrt{-1})\ (x+b-d\sqrt{-1})$
$(x-c+a\sqrt{-1})\ (x-c-a\sqrt{-1})\ (x-b+d\sqrt{-1})\ (x-b-d\sqrt{-1})$
$(x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})\ (x+d+b\sqrt{-1})\ (x+d-b\sqrt{-1})$
$(x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})\ (x-d+b\sqrt{-1})\ (x-d-b\sqrt{-1})$
$(x-c+a\sqrt{-1})\ (x-c-a\sqrt{-1})\ (x+d+b\sqrt{-1})\ (x+d-b\sqrt{-1})$
$(x-c+a\sqrt{-1})$

$(x-c+a\sqrt{-1})\ (x-c-a\sqrt{-1})\ (x-d+b\sqrt{-1})\ (x-d-b\sqrt{-1})$
$(x+a+d\sqrt{-1})\ (x+a-d\sqrt{-1})\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$
$(x+a+d\sqrt{-1})\ (x+a-d\sqrt{-1})\ (x-b+c\sqrt{-1})\ (x-b-c\sqrt{-1})$
$(x-a+d\sqrt{-1})\ (x-a-d\sqrt{-1})\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$
$(x-a+d\sqrt{-1})\ (x-a-d\sqrt{-1})\ (x-b+c\sqrt{-1})\ (x-b-c\sqrt{-1})$
$(x+a+d\sqrt{-1})\ (x+a-d\sqrt{-1})\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$
$(x+a+d\sqrt{-1})\ (x+a-d\sqrt{-1})\ (x-c+b\sqrt{-1})\ (x-c-b\sqrt{-1})$
$(x-a+d\sqrt{-1})\ (x-a-d\sqrt{-1})\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$
$(x-a+d\sqrt{-1})\ (x-a-d\sqrt{-1})\ (x-c+b\sqrt{-1})\ (x-c-b\sqrt{-1})$
$(x+d+a\sqrt{-1})\ (x+d-a\sqrt{-1})\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$
$(x+d+a\sqrt{-1})\ (x+d-a\sqrt{-1})\ (x-b+c\sqrt{-1})\ (x-b-c\sqrt{-1})$
$(x-d+a\sqrt{-1})\ (x-d-a\sqrt{-1})\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$
$(x-d+a\sqrt{-1})\ (x-d-a\sqrt{-1})\ (x-b+c\sqrt{-1})\ (x-b-c\sqrt{-1})$
$(x+d+a\sqrt{-1})\ (x+d-a\sqrt{-1})\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$
$(x+d+a\sqrt{-1})\ (x+d-a\sqrt{-1})\ (x-c+b\sqrt{-1})\ (x-c-b\sqrt{-1})$
$(x-d+a\sqrt{-1})\ (x-d-a\sqrt{-1})\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$
$(x-d+a\sqrt{-1})\ (x-d-a\sqrt{-1})\ (x-c+b\sqrt{-1})\ (x-c-b\sqrt{-1})$

Ceux des formules du cinquième degré sont,

* $(x+a)\ (x+a)\ (x+a)\ (x+a)\ (x+a)$
$(x+a)\ (x+a)\ (x+a)\ (x+a)\ (x-a)$
$(x+a)\ (x+a)\ (x+a)\ (x-a)\ (x-a)$
$(x+a)\ (x+a)\ (x-a)\ (x-a)\ (x-a)$
$(x+a)\ (x-a)\ (x-a)\ (x-a)\ (x-a)$
$(x-a)\ (x-a)\ (x-a)\ (x-a)\ (x-a)$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+b)\ (x+b)\ (x+b)$
$(x+a)\ (x+b)\ (x+b)\ (x+b)\ (x-b)$
$(x-a)\ (x+b)\ (x+b)\ (x+b)\ (x+b)$
$(x+a)\ (x+b)\ (x+b)\ (x-b)\ (x-b)$
$(x-a)\ (x+b)\ (x+b)\ (x+b)\ (x-b)$
$(x+a)\ (x+b)\ (x-b)\ (x-b)\ (x-b)$
$(x-a)\ (x+b)\ (x+b)\ (x-b)\ (x-b)$
$(x+a)\ (x-b)\ (x-b)\ (x-b)\ (x-b)$
$(x-a)\ (x+b)\ (x-b)\ (x-b)\ (x-b)$

$(x-a)(x-b)(x-b)(x-b)(x-b)$
$(x+a)(x+a)(x+a)(x+a)(x+b)$
$(x+a)(x+a)(x+a)(x+a)(x-b)$
$(x+a)(x+a)(x+a)(x-a)(x+b)$
$(x+a)(x+a)(x+a)(x-a)(x-b)$
$(x+a)(x+a)(x-a)(x-a)(x+b)$
$(x+a)(x+a)(x-a)(x-a)(x-b)$
$(x+a)(x-a)(x-a)(x-a)(x+b)$
$(x+a)(x-a)(x-a)(x-a)(x-b)$
$(x-a)(x-a)(x-a)(x-a)(x+b)$
$(x-a)(x-a)(x-a)(x-a)(x-b)$
$(x+a)(x+a)(x+b)(x+b)(x+b)$
$(x+a)(x+a)(x+b)(x+b)(x-b)$
$(x+a)(x-a)(x+b)(x+b)(x+b)$
$(x+a)(x+a)(x+b)(x-b)(x-b)$
$(x-a)(x-a)(x+b)(x+b)(x+b)$
$(x+a)(x-a)(x+b)(x+b)(x-b)$
$(x-a)(x-a)(x+b)(x+b)(x-b)$
$(x+a)(x-a)(x+b)(x-b)(x-b)$
$(x+a)(x+a)(x-b)(x-b)(x-b)$
$(x-a)(x-a)(x+b)(x-b)(x-b)$
$(x+a)(x-a)(x-b)(x-b)(x-b)$
$(x-a)(x-a)(x-b)(x-b)(x-b)$
$(x+a)(x+a)(x+a)(x+b)(x+b)$
$(x+a)(x+a)(x+a)(x+b)(x-b)$
$(x+a)(x+a)(x-a)(x+b)(x+b)$
$(x+a)(x+a)(x+a)(x-b)(x-b)$
$(x+a)(x-a)(x-a)(x+b)(x-b)$
$(x+a)(x+a)(x-a)(x+b)(x-b)$
$(x+a)(x+a)(x-a)(x-b)(x-b)$
$(x+a)(x-a)(x-a)(x+b)(x-b)$
$(x-a)(x-a)(x-a)(x+b)(x+b)$
$(x+a)(x-a)(x-a)(x-b)(x-b)$
$(x-a)(x-a)(x-a)(x+b)(x-b)$
$(x-a)(x-a)(x-a)(x-b)(x-b)$

$(x+a)(x+b)(x+c)(x+c)(x+c)$
$(x+a)(x+b)(x+c)(x+c)(x-c)$
$(x+a)(x-b)(x+c)(x+c)(x+c)$
$(x-a)(x+b)(x+c)(x+c)(x+c)$
$(x+a)(x+b)(x+c)(x-c)(x-c)$
$(x+a)(x-b)(x+c)(x+c)(x-c)$
$(x-a)(x+b)(x+c)(x+c)(x-c)$
$(x-a)(x-b)(x+c)(x+c)(x+c)$
$(x+a)(x+b)(x-c)(x-c)(x-c)$
$(x+a)(x-b)(x+c)(x-c)(x-c)$
$(x-a)(x+b)(x+c)(x-c)(x-c)$
$(x-a)(x-b)(x+c)(x+c)(x-c)$
$(x+a)(x-b)(x-c)(x-c)(x-c)$
$(x-a)(x+b)(x-c)(x-c)(x-c)$
$(x-a)(x-b)(x+c)(x-c)(x-c)$
$(x-a)(x-b)(x-c)(x-c)(x-c)$
$(x+a)(x+b)(x+b)(x+b)(x+c)$
$(x+a)(x+b)(x+b)(x+b)(x-c)$
$(x+a)(x+b)(x+b)(x-b)(x+c)$
$(x-a)(x+b)(x+b)(x+b)(x+c)$
$(x+a)(x+b)(x+b)(x-b)(x-c)$
$(x-a)(x+b)(x+b)(x+b)(x-c)$
$(x+a)(x+b)(x-b)(x-b)(x+c)$
$(x-a)(x+b)(x+b)(x-b)(x+c)$
$(x+a)(x+b)(x-b)(x-b)(x-c)$
$(x-a)(x+b)(x+b)(x-b)(x-c)$
$(x+a)(x-b)(x-b)(x-b)(x+c)$
$(x-a)(x+b)(x-b)(x-b)(x+c)$
$(x+a)(x-b)(x-b)(x-b)(x-c)$
$(x-a)(x+b)(x-b)(x-b)(x-c)$
$(x-a)(x-a)(x-b)(x-b)(x+c)$
$(x-a)(x-b)(x-b)(x-b)(x-c)$
$(x+a)(x+a)(x+a)(x+b)(x+c)$
$(x+a)(x+a)(x+a)(x+b)(x-c)$
$(x+a)(x+a)(x+a)(x-b)(x+c)$

$(x+a)(x+a)(x-a)(x+b)(x+c)$
$(x+a)(x+a)(x+a)(x-b)(x-c)$
$(x+a)(x+a)(x-a)(x+b)(x-c)$
$(x+a)(x+a)(x-a)(x-b)(x+c)$
$(x+a)(x-a)(x-a)(x+b)(x+c)$
$(x+a)(x+a)(x-a)(x-b)(x-c)$
$(x+a)(x-a)(x-a)(x+b)(x-c)$
$(x+a)(x-a)(x-a)(x-b)(x+c)$
$(x-a)(x-a)(x-a)(x+b)(x+c)$
$(x+a)(x-a)(x-a)(x-b)(x-c)$
$(x-a)(x-a)(x-a)(x+b)(x-c)$
$(x-a)(x-a)(x-a)(x-b)(x+c)$
$(x-a)(x-a)(x-a)(x-b)(x-c)$
* $(x+a)(x+b)(x+b)(x+c)(x+c)$
$(x+a)(x+b)(x+b)(x+c)(x-c)$
$(x+a)(x+b)(x-b)(x+c)(x+c)$
$(x-a)(x+b)(x+b)(x+c)(x+c)$
$(x+a)(x+b)(x+b)(x-c)(x-c)$
$(x+a)(x+b)(x-b)(x+c)(x-c)$
$(x-a)(x+b)(x+b)(x+c)(x-c)$
$(x+a)(x-b)(x-b)(x+c)(x+c)$
$(x-a)(x+b)(x-b)(x+c)(x+c)$
$(x+a)(x+b)(x-b)(x-c)(x-c)$
$(x-a)(x+b)(x+b)(x-c)(x-c)$
$(x+a)(x-b)(x-b)(x+c)(x-c)$
$(x-a)(x+b)(x-b)(x+c)(x-c)$
$(x-a)(x-b)(x-b)(x+c)(x+c)$
$(x+a)(x-b)(x-b)(x-c)(x-c)$
$(x-a)(x+b)(x-b)(x-c)(x-c)$
$(x-a)(x-b)(x-b)(x+c)(x-c)$
$(x-a)(x-b)(x-b)(x-c)(x-c)$
* $(x+a)(x+a)(x+b)(x+c)(x+c)$
$(x+a)(x+a)(x+b)(x+c)(x-c)$
$(x+a)(x+a)(x-b)(x+c)(x+c)$
$(x+a)(x-a)(x+b)(x+c)(x+c)$

$(x+a)(x+a)(x+b)(x-c)(x-c)$
$(x+a)(x+a)(x-b)(x+c)(x-c)$
$(x+a)(x-a)(x+b)(x+c)(x-c)$
$(x+a)(x-a)(x-b)(x+c)(x+c)$
$(x-a)(x-a)(x+b)(x+c)(x+c)$
$(x+a)(x+a)(x-b)(x-c)(x-c)$
$(x+a)(x-a)(x+b)(x-c)(x-c)$
$(x+a)(x-a)(x-b)(x+c)(x-c)$
$(x-a)(x-a)(x-b)(x+c)(x+c)$
$(x-a)(x-a)(x+b)(x+c)(x-c)$
$(x+a)(x-a)(x-b)(x-c)(x-c)$
$(x-a)(x-a)(x+b)(x-c)(x-c)$
$(x-a)(x-a)(x-b)(x+c)(x-c)$
$(x-a)(x-a)(x-b)(x-c)(x-c)$
* $(x+a)(x+a)(x+b)(x+b)(x+c)$
$(x+a)(x+a)(x+b)(x+b)(x-c)$
$(x+a)(x+a)(x+b)(x-b)(x+c)$
$(x+a)(x-a)(x+b)(x+b)(x+c)$
$(x+a)(x+a)(x+b)(x-b)(x-c)$
$(x+a)(x-a)(x+b)(x+b)(x-c)$
$(x+a)(x+a)(x-b)(x-b)(x+c)$
$(x+a)(x-a)(x+b)(x-b)(x+c)$
$(x-a)(x-a)(x+b)(x+b)(x+c)$
$(x+a)(x+a)(x-b)(x-b)(x-c)$
$(x+a)(x-a)(x+b)(x-b)(x-c)$
$(x-a)(x-a)(x+b)(x+b)(x-c)$
$(x+a)(x-a)(x-b)(x-b)(x+c)$
$(x-a)(x-a)(x+b)(x-b)(x+c)$
$(x+a)(x-a)(x-b)(x-b)(x-c)$
$(x-a)(x-a)(x+b)(x-b)(x-c)$
$(x-a)(x-a)(x-b)(x+b)(x+c)$
$(x-a)(x-a)(x-b)(x-b)(x-c)$
* $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x+d)$
$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x-d)$
$(x+a)(x+b)(x-c)(x+d)(x+d)$

$(x+a)(x-b)(x+c)(x+d)(x+d)$
$(x-a)(x+b)(x+c)(x+d)(x+d)$
$(x+a)(x+b)(x+c)(x-d)(x-d)$
$(x+a)(x+b)(x-c)(x+d)(x-d)$
$(x+a)(x-b)(x+c)(x+d)(x-d)$
$(x-a)(x+b)(x+c)(x+d)(x-d)$
$(x+a)(x-b)(x-c)(x+d)(x+d)$
$(x-a)(x+b)(x-c)(x+d)(x+d)$
$(x-a)(x-b)(x+c)(x+d)(x+d)$
$(x+a)(x+b)(x-c)(x-d)(x-d)$
$(x+a)(x-b)(x+c)(x-d)(x-d)$
$(x-a)(x+b)(x+c)(x-d)(x-d)$
$(x+a)(x-b)(x-c)(x+d)(x-d)$
$(x-a)(x+b)(x-c)(x+d)(x-d)$
$(x-a)(x-b)(x+c)(x+d)(x-d)$
$(x-a)(x-b)(x-c)(x+d)(x+d)$
$(x+a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-d)$
$(x-a)(x+b)(x-c)(x-d)(x-d)$
$(x-a)(x-b)(x+c)(x-d)(x-d)$
$(x-a)(x-b)(x-c)(x+d)(x-d)$
$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-d)$
* $(x+a)(x+b)(x+c)(x+c)(x+d)$
$(x+a)(x+b)(x+c)(x+c)(x-d)$
$(x+a)(x+b)(x+c)(x-c)(x+d)$
$(x+a)(x-b)(x+c)(x+c)(x+d)$
$(x-a)(x+b)(x+c)(x+c)(x+d)$
$(x+a)(x+b)(x+c)(x-c)(x-d)$
$(x+a)(x-b)(x+c)(x+c)(x-d)$
$(x-a)(x+b)(x+c)(x+c)(x-d)$
$(x+a)(x+b)(x-c)(x-c)(x+d)$
$(x+a)(x-b)(x+c)(x-c)(x+d)$
$(x-a)(x+b)(x+c)(x-c)(x+d)$
$(x-a)(x-b)(x+c)(x+c)(x+d)$
$(x+a)(x+b)(x-c)(x-c)(x-d)$
$(x+a)(x-b)(x+c)(x-c)(x-d)$

$(x-a)(x+b)(x+c)(x-c)(x-d)$
$(x-a)(x-b)(x+c)(x+c)(x-d)$
$(x+a)(x-b)(x-c)(x-c)(x+d)$
$(x-a)(x+b)(x-c)(x-c)(x+d)$
$(x-a)(x-b)(x+c)(x-c)(x+d)$
$(x+a)(x-b)(x-c)(x-c)(x-d)$
$(x-a)(x+b)(x-c)(x-c)(x-d)$
$(x-a)(x-b)(x+c)(x-c)(x-d)$
$(x-a)(x-b)(x-c)(x-c)(x+d)$
$(x-a)(x-b)(x-c)(x-c)(x-d)$
$(x+a)(x+b)(x+b)(x+c)(x+d)$
$(x+a)(x+b)(x+b)(x+c)(x-d)$
$(x+a)(x+b)(x+b)(x-c)(x+d)$
$(x+a)(x+b)(x-b)(x+c)(x+d)$
$(x-a)(x+b)(x+b)(x+c)(x+d)$
$(x+a)(x+b)(x+b)(x-c)(x-d)$
$(x+a)(x+b)(x-b)(x+c)(x-d)$
$(x-a)(x+b)(x+b)(x+c)(x-d)$
$(x+a)(x+b)(x-b)(x-c)(x+d)$
$(x-a)(x+b)(x+b)(x-c)(x+d)$
$(x+a)(x-b)(x-b)(x+c)(x+d)$
$(x-a)(x+b)(x-b)(x+c)(x+d)$
$(x+a)(x+b)(x-b)(x-c)(x-d)$
$(x-a)(x+b)(x+b)(x-c)(x-d)$
$(x+a)(x-b)(x-b)(x+c)(x-d)$
$(x-a)(x+b)(x-b)(x+c)(x-d)$
$(x+a)(x-b)(x-b)(x-c)(x+d)$
$(x-a)(x+b)(x-b)(x-c)(x+d)$
$(x-a)(x-b)(x-b)(x+c)(x+d)$
$(x+a)(x-b)(x-b)(x-c)(x-d)$
$(x-a)(x+b)(x-b)(x-c)(x-d)$
$(x-a)(x-b)(x-b)(x+c)(x-d)$
$(x-a)(x-b)(x-b)(x-c)(x+d)$
$(x-a)(x-b)(x-b)(x-c)(x-d)$
$(x+a)(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$

$(x+a)(x+a)(x+b)(x+c)(x-d)$
$(x+a)(x+a)(x+b)(x-c)(x+d)$
$(x+a)(x+a)(x-b)(x+c)(x+d)$
$(x+a)(x-a)(x+b)(x+c)(x+d)$
$(x+a)(x+a)(x+b)(x-c)(x-d)$
$(x+a)(x+a)(x-b)(x+c)(x-d)$
$(x+a)(x+a)(x-b)(x-c)(x+d)$
$(x+a)(x-a)(x+b)(x-c)(x+d)$
$(x+a)(x-a)(x-b)(x+c)(x+d)$
$(x-a)(x-a)(x+b)(x+c)(x+d)$
$(x+a)(x+a)(x-b)(x-c)(x-d)$
$(x+a)(x-a)(x+b)(x-c)(x-d)$
$(x+a)(x-a)(x-b)(x+c)(x-d)$
$(x-a)(x-a)(x+b)(x+c)(x-d)$
$(x+a)(x-a)(x-b)(x-c)(x+d)$
$(x-a)(x-a)(x+b)(x-c)(x+d)$
$(x-a)(x-a)(x-b)(x+c)(x+d)$
$(x+a)(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$
$(x-a)(x-a)(x+b)(x-c)(x-d)$
$(x-a)(x-a)(x-b)(x+c)(x-d)$
$(x-a)(x-a)(x-b)(x-c)(x+d)$
$(x-a)(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$
$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x+e)$
$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x-e)$
$(x+a)(x+b)(x+c)(x-d)(x+e)$
$(x+a)(x+b)(x-c)(x+d)(x+e)$
$(x+a)(x-b)(x+c)(x+d)(x+e)$
$(x-a)(x+b)(x+c)(x+d)(x+e)$
$(x+a)(x+b)(x+c)(x-d)(x-e)$
$(x+a)(x+b)(x-c)(x+d)(x-e)$
$(x+a)(x-b)(x+c)(x+d)(x-e)$
$(x-a)(x+b)(x+c)(x+d)(x-e)$
$(x+a)(x+b)(x-c)(x-d)(x+e)$
$(x+a)(x-b)(x+c)(x-d)(x+e)$

$(x-a)$

$(x-a)(x+b)(x+c)(x-d)(x+e)$
$(x+a)(x-b)(x-c)(x+d)(x+e)$
$(x-a)(x+b)(x-c)(x+d)(x+e)$
$(x-a)(x-b)(x+c)(x+d)(x+e)$
$(x+a)(x+b)(x-c)(x-d)(x-e)$
$(x+a)(x-b)(x+c)(x-d)(x-e)$
$(x+a)(x-b)(x-c)(x+d)(x-e)$
$(x+a)(x-b)(x-c)(x-d)(x+e)$
$(x-a)(x+b)(x+c)(x-d)(x-e)$
$(x-a)(x+b)(x-c)(x+d)(x-e)$
$(x-a)(x+b)(x-c)(x-d)(x+e)$
$(x-a)(x-b)(x+c)(x+d)(x-e)$
$(x-a)(x-b)(x+c)(x-d)(x+e)$
$(x-a)(x-b)(x-c)(x+d)(x+e)$
$(x+a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)$
$(x-a)(x+b)(x-c)(x-d)(x-e)$
$(x-a)(x+b)(x+c)(x-d)(x-e)$
$(x-a)(x-b)(x+c)(x+d)(x-e)$
$(x-a)(x-b)(x-c)(x+d)(x+e)$
$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-c)$
$(x+a)(x+a)(x+a)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+a)(x-a)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-a)(x-a)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-a)(x-a)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+b)(x+b)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+b)(x-b)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x+b)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x-b)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x-b)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x-b)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x+b)(x+b)(x+b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x+b)(x-b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x-b)(x-b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-b)(x-b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+a)(x+a)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$

$(x+a)(x+a)(x-a)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-a)(x-a)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-a)(x-a)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+a)(x+b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+a)(x-b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+a)(x+b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-a)(x-b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-a)(x+b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-a)(x-b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+a)(x+b)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+a)(x-b)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-a)(x+b)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-a)(x-b)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-a)(x+b)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-a)(x-b)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+b)(x+b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+b)(x-b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x+b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x-b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x-b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x-b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+b)(x+c)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+b)(x-c)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x+c)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x+c)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x-c)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x-c)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x+c)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x-c)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+c)(x+c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+c)(x-c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+c)(x+c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-c)(x-c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+c)(x-c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-c)(x-c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)(x+c)(x+c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x+c)(x-c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x+c)(x+c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x-c)(x-c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x+c)(x-c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+b)(x+b)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+b)(x-b)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x+b)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x-b)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x-b)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x-b)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+b)(x+c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+b)(x-c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x+c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x+c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x-c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x-c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x+c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x-c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
* $(x+b)(x+b)(x+c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x+b)(x-c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x-b)(x+c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x-b)(x-c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-b)(x+c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-b)(x-c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+a)(x+b)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+a)(x-b)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-a)(x+b)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-a)(x-b)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-a)(x+b)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-a)(x-b)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+a)(x+c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+a)(x-c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-a)(x+c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$

$(x+a)(x-a)(x-c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-a)(x+c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-a)(x-c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+b)(x+c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+b)(x-c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x+c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x+c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x-c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x-c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x+c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x-c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+b)(x+e)(x+d\sqrt{-1})(x-d\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+b)(x-c)(x+d\sqrt{-1})(x-d\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x+c)(x+d\sqrt{-1})(x-d\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x+c)(x+d\sqrt{-1})(x-d\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x-c)(x+d\sqrt{-1})(x-d\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x-c)(x+d\sqrt{-1})(x-d\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x+c)(x+d\sqrt{-1})(x-d\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x-c)(x+d\sqrt{-1})(x-d\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+b)(x+d)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+b)(x-d)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x+d)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x+d)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x-d)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x-d)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x+d)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x-d)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+c)(x+d)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+c)(x-d)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-c)(x+d)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+c)(x+d)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-c)(x-d)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+c)(x-d)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-c)(x+d)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-c)(x-d)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)(x+c)(x+d)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x+c)(x-d)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x-c)(x+d)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x+c)(x+d)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x-c)(x-d)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x+c)(x-d)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-c)(x+d)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-c)(x-d)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+a)(x+a)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+a)(x+a)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+a)(x-a)(x+a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+a)(x-a)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-a)(x-a)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-a)(x-a)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-a)(x-a)(x+a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-a)(x-a)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+b)(x+b)(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$
* $(x+b)(x+b)(x+b)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$
* $(x+b)(x+b)(x+b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+a)(x+a)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+a)(x+a)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+a)(x+b)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+a)(x+b)(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+b)(x+b)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+b)(x+b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$
* $(x+b)(x+b)(x+b)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+a)(x+a)(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+a)(x+b)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+a)(x+b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+b)(x+b)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+b)(x+c)(x+c+c\sqrt{-1})(x+c-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+c)(x+c)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+c)(x+c)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$
* $(x+b)(x+c)(x+c)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$
* $(x+b)(x+c)(x+c)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$

* $(x+c)\ (x+c)\ (x+c)\ (x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})$
* $(x+c)\ (x+c)\ (x+c)\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+b)\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+b)\ (x+b+b\sqrt{-1})\ (x+b-b\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+b+b\sqrt{-1})\ (x+b-b\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+b)\ (x+b)\ (x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+b)\ (x+b)\ (x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+a)\ (x+a)\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+a)\ (x+b)\ (x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+a)\ (x+a)\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+a)\ (x+b)\ (x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+a)\ (x+c)\ (x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+a)\ (x+c)\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+a+a\sqrt{-1})\ (x+a-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+b)\ (x+c+c\sqrt{-1})\ (x+c-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+c)\ (x+c)\ (x+b+b\sqrt{-1})\ (x+b-b\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+c)\ (x+c)\ (x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+c)\ (x+c)\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+a)\ (x+b)\ (x+c+c\sqrt{-1})\ (x+c-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+a)\ (x+c)\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+a)\ (x+c)\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+c)\ (x+c)\ (x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+c)\ (x+c)\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+c)\ (x+c)\ (x+a+a\sqrt{-1})\ (x+a-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+a)\ (x+b)\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+b)\ (x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+a)\ (x+b)\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+b)\ (x+b)\ (x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+a)\ (x+c)\ (x+b+b\sqrt{-1})\ (x+b-b\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+a+a\sqrt{-1})\ (x+a-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+d+d\sqrt{-1})\ (x+d-d\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+d)\ (x+c+d\sqrt{-1})\ (x+c-d\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+c)\ (x+d)\ (x+b+d\sqrt{-1})\ (x+b-d\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+c)\ (x+d)\ (x+a+d\sqrt{-1})\ (x+a-d\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+d)\ (x+d+c\sqrt{-1})\ (x+d-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+c)\ (x+d)\ (x+d+b\sqrt{-1})\ (x+d-b\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+c)\ (x+d)\ (x+d+a\sqrt{-1})\ (x+d-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+d)\ (x+d)\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+d)\ (x+d)\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+d)\ (x+d)\ (x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+d)\ (x+d)\ (x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})$
* $(x+c)\ (x+d)\ (x+d)\ (x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})$
* $(x+c)\ (x+d)\ (x+d)\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+c+d\sqrt{-1})\ (x+c-d\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+c)\ (x+e)\ (x+b+d\sqrt{-1})\ (x+b-d\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+c)\ (x+c)\ (x+a+d\sqrt{-1})\ (x+a-d\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+d+c\sqrt{-1})\ (x+d-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+c)\ (x+c)\ (x+d+b\sqrt{-1})\ (x+d-b\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+c)\ (x+c)\ (x+d+a\sqrt{-1})\ (x+d-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+d)\ (x+c+c\sqrt{-1})\ (x+c-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+c)\ (x+d)\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+c)\ (x+d)\ (x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+c)\ (x+d)\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+c)\ (x+d)\ (x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})$
* $(x+c)\ (x+c)\ (x+d)\ (x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})$
* $(x+c)\ (x+c)\ (x+d)\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+b)\ (x+c+d\sqrt{-1})\ (x+c-d\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+b+d\sqrt{-1})\ (x+b-d\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+a+d\sqrt{-1})\ (x+a-d\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+b)\ (x+d+c\sqrt{-1})\ (x+d-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+b)\,(x+d)\,(x+b+c\sqrt{-1})\,(x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+b)\,(x+d)\,(x+a+c\sqrt{-1})\,(x+a-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+b)\,(x+c)\,(x+d+b\sqrt{-1})\,(x+d-b\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+b)\,(x+d)\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+c)\,(x+d)\,(x+b+b\sqrt{-1})\,(x+b-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+c)\,(x+d)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+b)\,(x+c)\,(x+d+a\sqrt{-1})\,(x+d-a\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+b)\,(x+d)\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+c)\,(x+d)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+a)\,(x+b)\,(x+c+d\sqrt{-1})\,(x+c-d\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+a)\,(x+c)\,(x+b+d\sqrt{-1})\,(x+b-d\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+b)\,(x+c)\,(x+a+d\sqrt{-1})\,(x+a-d\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+a)\,(x+b)\,(x+d+c\sqrt{-1})\,(x+d-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+a)\,(x+d)\,(x+b+c\sqrt{-1})\,(x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+b)\,(x+d)\,(x+a+c\sqrt{-1})\,(x+a-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+a)\,(x+c)\,(x+d+b\sqrt{-1})\,(x+d-b\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+a)\,(x+d)\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+c)\,(x+d)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+b)\,(x+c)\,(x+d+a\sqrt{-1})\,(x+d-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+b)\,(x+d)\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+c)\,(x+d)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+c)\,(x+d)\,(x+a+a\sqrt{-1})\,(x+a-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+b)\,(x+c)\,(x+d+e\sqrt{-1})\,(x+d-e\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+b)\,(x+d)\,(x+c+e\sqrt{-1})\,(x+c-e\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+c)\,(x+d)\,(x+b+e\sqrt{-1})\,(x+b-e\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+c)\,(x+d)\,(x+a+e\sqrt{-1})\,(x+a-e\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+b)\,(x+c)\,(x+e+d\sqrt{-1})\,(x+e-d\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+b)\,(x+e)\,(x+c+d\sqrt{-1})\,(x+c-d\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+c)\,(x+e)\,(x+b+d\sqrt{-1})\,(x+b-d\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+c)\,(x+e)\,(x+a+d\sqrt{-1})\,(x+a-d\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+b)\,(x+d)\,(x+e+c\sqrt{-1})\,(x+e-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+b)\,(x+e)\,(x+d+c\sqrt{-1})\,(x+d-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+d)\,(x+e)\,(x+b+c\sqrt{-1})\,(x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+d)\,(x+e)\,(x+a+c\sqrt{-1})\,(x+a-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+c)\,(x+d)\,(x+e+b\sqrt{-1})\,(x+e-b\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+c)\ (x+e)\ (x+d+b\sqrt{-1})\ (x+d-b\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+d)\ (x+e)\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+c)\ (x+d)\ (x+e)\ (x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)\ (x+c)\ (x+d)\ (x+e+a\sqrt{-1})\ (x+e-a\sqrt{-1})$

* $(x+b)\ (x+e)\ (x+e)\ (x+d+a\sqrt{-1})\ (x+d-a\sqrt{-1})$

* $(x+b)\ (x+d)\ (x+e)\ (x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})$

* $(x+c)\ (x+d)\ (x+e)\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+a\sqrt{-1})\ (x-a\sqrt{-1})\ (x+a\sqrt{-1})\ (x-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+b\sqrt{-1})\ (x-b\sqrt{-1})\ (x+b\sqrt{-1})\ (x-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)\ (x+a\sqrt{-1})\ (x-a\sqrt{-1})\ (x+b\sqrt{-1})\ (x-b\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+a\sqrt{-1})\ (x-a\sqrt{-1})\ (x+b\sqrt{-1})\ (x-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)\ (x+a\sqrt{-1})\ (x-a\sqrt{-1})\ (x+a\sqrt{-1})\ (x-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+b\sqrt{-1})\ (x-b\sqrt{-1})\ (x+c\sqrt{-1})\ (x-c\sqrt{-1})$

* $(x+b)\ (x+a\sqrt{-1})\ (x-a\sqrt{-1})\ (x+c\sqrt{-1})\ (x-c\sqrt{-1})$

* $(x+c)\ (x+a\sqrt{-1})\ (x-a\sqrt{-1})\ (x+b\sqrt{-1})\ (x-b\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+a\sqrt{-1})\ (x-a\sqrt{-1})\ (x+a+a\sqrt{-1})\ (x+a-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+b\sqrt{-1})\ (x-b\sqrt{-1})\ (x+b+b\sqrt{-1})\ (x+b-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)\ (x+a\sqrt{-1})\ (x-a\sqrt{-1})\ (x+b+b\sqrt{-1})\ (x+b-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)\ (x+b\sqrt{-1})\ (x-b\sqrt{-1})\ (x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)\ (x+b\sqrt{-1})\ (x-b\sqrt{-1})\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+a\sqrt{-1})\ (x-a\sqrt{-1})\ (x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+a\sqrt{-1})\ (x-a\sqrt{-1})\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+b\sqrt{-1})\ (x-b\sqrt{-1})\ (x+a+a\sqrt{-1})\ (x+a-a\sqrt{-1})$

* $(x+b)\ (x+a\sqrt{-1})\ (x-a\sqrt{-1})\ (x+a+a\sqrt{-1})\ (x+a-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+a\sqrt{-1})\ (x-a\sqrt{-1})\ (x+b+b\sqrt{-1})\ (x+b-b\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+b\sqrt{-1})\ (x-b\sqrt{-1})\ (x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+b\sqrt{-1})\ (x-b\sqrt{-1})\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})$

* $(x+b)\ (x+b\sqrt{-1})\ (x-b\sqrt{-1})\ (x+a+a\sqrt{-1})\ (x+a-a\sqrt{-1})$

* $(x+b)\ (x+a\sqrt{-1})\ (x-a\sqrt{-1})\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})$

* $(x+b)\ (x+a\sqrt{-1})\ (x-a\sqrt{-1})\ (x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+b\sqrt{-1})\ (x-b\sqrt{-1})\ (x+c+c\sqrt{-1})\ (x+c-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+c\sqrt{-1})\ (x-c\sqrt{-1})\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+c\sqrt{-1})\ (x-c\sqrt{-1})\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)\ (x+a\sqrt{-1})\ (x-a\sqrt{-1})\ (x+c+c\sqrt{-1})\ (x+c-c\sqrt{-1})$

* $(x+b)\ (x+c\sqrt{-1})\ (x-c\sqrt{-1})\ (x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})$

$* (x+b)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$
$* (x+c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$
$* (x+c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$
$* (x+c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$
$* (x+c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$
$* (x+c)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$
$* (x+c)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$
$* (x+a)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$
$* (x+c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$
$* (x+a)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$
$* (x+c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$
$* (x+c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$
$* (x+c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$
$* (x+b)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$
$* (x+b)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$
$* (x+b)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$
$* (x+b)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$
$* (x+b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$
$* (x+b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$
$* (x+a)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$
$* (x+a)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$
$* (x+a)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$
$* (x+a)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$
$* (x+a)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$
$* (x+a)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$
$* (x+b)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$
$* (x+b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$
$* (x+b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$
$* (x+c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$
$* (x+c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$
$* (x+c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$
$* (x+a)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})(x+c+d\sqrt{-1})(x+c-d\sqrt{-1})$
$* (x+a)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})(x+d+c\sqrt{-1})(x+d-c\sqrt{-1})$
$* (x+a)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})(x+b+d\sqrt{-1})(x+b-d\sqrt{-1})$
$* (x+a)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})(x+d+b\sqrt{-1})(x+d-b\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+d\sqrt{-1})\,(x-d\sqrt{-1})\,(x+b+c\sqrt{-1})\,(x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+d\sqrt{-1})\,(x-d\sqrt{-1})\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\,(x+c+d\sqrt{-1})\,(x+c-d\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\,(x+d+c\sqrt{-1})\,(x+d-c\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+c\sqrt{-1})\,(x-c\sqrt{-1})\,(x+a+d\sqrt{-1})\,(x+a-d\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+c\sqrt{-1})\,(x-c\sqrt{-1})\,(x+d+a\sqrt{-1})\,(x+d-a\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+d\sqrt{-1})\,(x-d\sqrt{-1})\,(x+a+c\sqrt{-1})\,(x+a-c\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+d\sqrt{-1})\,(x-d\sqrt{-1})\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1})$

* $(x+c)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\,(x+b+d\sqrt{-1})\,(x+b-d\sqrt{-1})$

* $(x+c)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\,(x+d+b\sqrt{-1})\,(x+d-b\sqrt{-1})$

* $(x+c)\,(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})\,(x+a+d\sqrt{-1})\,(x+a-d\sqrt{-1})$

* $(x+c)\,(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})\,(x+d+a\sqrt{-1})\,(x+d-a\sqrt{-1})$

* $(x+c)\,(x+d\sqrt{-1})\,(x-d\sqrt{-1})\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})$

* $(x+c)\,(x+d\sqrt{-1})\,(x-d\sqrt{-1})\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})$

* $(x+d)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\,(x+b+c\sqrt{-1})\,(x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+d)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+d)\,(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})\,(x+a+c\sqrt{-1})\,(x+a-c\sqrt{-1})$

* $(x+d)\,(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1})$

* $(x+d)\,(x+c\sqrt{-1})\,(x-c\sqrt{-1})\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})$

* $(x+d)\,(x+c\sqrt{-1})\,(x-c\sqrt{-1})\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+a+a\sqrt{-1})\,(x+a-a\sqrt{-1})\,(x+a+a\sqrt{-1})\,(x+a-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+b+b\sqrt{-1})\,(x+b-b\sqrt{-1})\,(x+b+b\sqrt{-1})\,(x+b-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})\,(x+b+b\sqrt{-1})\,(x+b-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})\,(x+b+b\sqrt{-1})\,(x+b-b\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+a+a\sqrt{-1})\,(x+a-a\sqrt{-1})\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+a+a\sqrt{-1})\,(x+a-a\sqrt{-1})\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+a+a\sqrt{-1})\,(x+a-a\sqrt{-1})\,(x+a+a\sqrt{-1})\,(x+a-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})\,(x+b+b\sqrt{-1})\,(x+b-b\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})\,(x+b+b\sqrt{-1})\,(x+b-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})\,(x+b+b\sqrt{-1})\,(x+b-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})\,(x+b+b\sqrt{-1})\,(x+b-b\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$

* $(x+b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$

* $(x+b)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})(x+c+c\sqrt{-1})(x+c-c\sqrt{-1})$

* $(x+c)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})(x+c+c\sqrt{-1})(x+c-c\sqrt{-1})$

* $(x+b)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})(x+c+c\sqrt{-1})(x+c-c\sqrt{-1})$

* $(x+b)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})(x+c+c\sqrt{-1})(x+c-c\sqrt{-1})$

* $(x+c)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+c+c\sqrt{-1})(x+c-c\sqrt{-1})$

* $(x+c)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+c+c\sqrt{-1})(x+c-c\sqrt{-1})$

* $(x+c)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+c)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+c)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+c)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+a)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$

* $(x+a)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$

* $(x+c)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$

* $(x+c)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+b)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$

* $(x+b)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$

* $(x+c)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$

* $(x+c)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+c+c\sqrt{-1})(x+c-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})(x+c+c\sqrt{-1})(x+c-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+b+c\sqrt{-1})\,(x+b-c\sqrt{-1})\,(x+b+c\sqrt{-1})\,(x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+b+c\sqrt{-1})\,(x+b-c\sqrt{-1})\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1})\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})\,(x+c+c\sqrt{-1})\,(x+c-c\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})\,(x+c+c\sqrt{-1})\,(x+c-c\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+a+c\sqrt{-1})\,(x+a-c\sqrt{-1})\,(x+b+c\sqrt{-1})\,(x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+a+c\sqrt{-1})\,(x+a-c\sqrt{-1})\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1})\,(x+b+c\sqrt{-1})\,(x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1})\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+c)\,(x+a+c\sqrt{-1})\,(x+a-c\sqrt{-1})\,(x+b+b\sqrt{-1})\,(x+b-b\sqrt{-1})$

* $(x+c)\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1})\,(x+b+b\sqrt{-1})\,(x+b-b\sqrt{-1})$

* $(x+c)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+c)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})\,(x+b+c\sqrt{-1})\,(x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+c)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+c)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})\,(x+b+c\sqrt{-1})\,(x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+a+a\sqrt{-1})\,(x+a-a\sqrt{-1})\,(x+c+c\sqrt{-1})\,(x+c-c\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+a+c\sqrt{-1})\,(x+a-c\sqrt{-1})\,(x+a+c\sqrt{-1})\,(x+a-c\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+a+c\sqrt{-1})\,(x+a-c\sqrt{-1})\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1})\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})\,(x+c+c\sqrt{-1})\,(x+c-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})\,(x+c+c\sqrt{-1})\,(x+c-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+a+c\sqrt{-1})\,(x+a-c\sqrt{-1})\,(x+b+c\sqrt{-1})\,(x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+a+c\sqrt{-1})\,(x+a-c\sqrt{-1})\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1})\,(x+b+c\sqrt{-1})\,(x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1})\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+c)\,(x+b+c\sqrt{-1})\,(x+b-c\sqrt{-1})\,(x+a+a\sqrt{-1})\,(x+a-a\sqrt{-1})$

* $(x+c)\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1})\,(x+a+a\sqrt{-1})\,(x+a-a\sqrt{-1})$

* $(x+c)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})\,(x+a+c\sqrt{-1})\,(x+a-c\sqrt{-1})$

* $(x+c)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1})$

* $(x+c)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})\,(x+a+c\sqrt{-1})\,(x+a-c\sqrt{-1})$

* $(x+c)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1})$

* $(x+c)\,(x+a+a\sqrt{-1})\,(x+a-a\sqrt{-1})\,(x+b+b\sqrt{-1})\,(x+b-b\sqrt{-1})$

* $(x+c)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})$

* $(x+c)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})$

* $(x+c)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})$

$(x+a)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$

$(x+a)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$

$(x+a)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$

$(x+a)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$

$(x+a)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$

$(x+a)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$

$(x+b)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$

$(x+b)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$

$(x+b)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$

$(x+b)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$

$(x+b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$

$(x+b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$

$(x+a)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})(x+d+d\sqrt{-1})(x+d-d\sqrt{-1})$

$(x+a)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})(x+d+d\sqrt{-1})(x+d-d\sqrt{-1})$

$(x+a)(x+b+d\sqrt{-1})(x+b-d\sqrt{-1})(x+c+d\sqrt{-1})(x+c-d\sqrt{-1})$

$(x+a)(x+b+d\sqrt{-1})(x+b-d\sqrt{-1})(x+d+c\sqrt{-1})(x+d-c\sqrt{-1})$

$(x+a)(x+d+b\sqrt{-1})(x+d-b\sqrt{-1})(x+c+d\sqrt{-1})(x+c-d\sqrt{-1})$

$(x+a)(x+d+b\sqrt{-1})(x+d-b\sqrt{-1})(x+d+c\sqrt{-1})(x+d-c\sqrt{-1})$

$(x+b)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})(x+d+d\sqrt{-1})(x+d-d\sqrt{-1})$

$(x+b)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})(x+d+d\sqrt{-1})(x+d-d\sqrt{-1})$

$(x+b)(x+a+d\sqrt{-1})(x+a-d\sqrt{-1})(x+c+d\sqrt{-1})(x+c-d\sqrt{-1})$

$(x+b)(x+a+d\sqrt{-1})(x+a-d\sqrt{-1})(x+d+c\sqrt{-1})(x+d-c\sqrt{-1})$

$(x+b)(x+d+a\sqrt{-1})(x+d-a\sqrt{-1})(x+c+d\sqrt{-1})(x+c-d\sqrt{-1})$

$(x+b)(x+d+a\sqrt{-1})(x+d-a\sqrt{-1})(x+d+c\sqrt{-1})(x+d-c\sqrt{-1})$

$(x+c)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+d+d\sqrt{-1})(x+d-d\sqrt{-1})$

$(x+c)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+d+d\sqrt{-1})(x+d-d\sqrt{-1})$

$(x+c)(x+a+d\sqrt{-1})(x+a-d\sqrt{-1})(x+b+d\sqrt{-1})(x+b-d\sqrt{-1})$

$(x+c)(x+a+d\sqrt{-1})(x+a-d\sqrt{-1})(x+d+b\sqrt{-1})(x+d-b\sqrt{-1})$

$(x+c)(x+d+a\sqrt{-1})(x+d-a\sqrt{-1})(x+b+d\sqrt{-1})(x+b-d\sqrt{-1})$

$(x+c)(x+d+a\sqrt{-1})(x+d-a\sqrt{-1})(x+d+b\sqrt{-1})(x+d-b\sqrt{-1})$

$(x+d)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+c+d\sqrt{-1})(x+c-d\sqrt{-1})$

$(x+d)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+d+c\sqrt{-1})(x+d-c\sqrt{-1})$

$(x+d)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+c+d\sqrt{-1})(x+c-d\sqrt{-1})$

$(x+d)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+d+c\sqrt{-1})(x+d-c\sqrt{-1})$

$(x+d)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})(x+b+d\sqrt{-1})(x+b-d\sqrt{-1})$

* $(x+d)\,(x+a+c\sqrt{-1})\,(x+a-c\sqrt{-1})\,(x+d+b\sqrt{-1})\,(x+d-b\sqrt{-1})$
* $(x+d)\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1})\,(x+b+d\sqrt{-1})\,(x+b-d\sqrt{-1})$
* $(x+d)\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1})\,(x+d+b\sqrt{-1})\,(x+d-b\sqrt{-1})$
* $(x+d)\,(x+a+d\sqrt{-1})\,(x+a-d\sqrt{-1})\,(x+b+c\sqrt{-1})\,(x+b-c\sqrt{-1})$
* $(x+d)\,(x+a+d\sqrt{-1})\,(x+a-d\sqrt{-1})\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1})$
* $(x+d)\,(x+d+a\sqrt{-1})\,(x+d-a\sqrt{-1})\,(x+b+c\sqrt{-1})\,(x+b-c\sqrt{-1})$
* $(x+d)\,(x+d+a\sqrt{-1})\,(x+d-a\sqrt{-1})\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1})$
* $(x+a)\,(x+b+c\sqrt{-1})\,(x+b-c\sqrt{-1})\,(x+c+d\sqrt{-1})\,(x+c-d\sqrt{-1})$
* $(x+a)\,(x+b+c\sqrt{-1})\,(x+b-c\sqrt{-1})\,(x+d+c\sqrt{-1})\,(x+d-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1})\,(x+c+d\sqrt{-1})\,(x+c-d\sqrt{-1})$
* $(x+a)\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1})\,(x+d+c\sqrt{-1})\,(x+d-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)\,(x+b+d\sqrt{-1})\,(x+b-d\sqrt{-1})\,(x+c+c\sqrt{-1})\,(x+c-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)\,(x+d+b\sqrt{-1})\,(x+d-b\sqrt{-1})\,(x+c+c\sqrt{-1})\,(x+c-c\sqrt{-1})$
* $(x+b)\,(x+a+c\sqrt{-1})\,(x+a-c\sqrt{-1})\,(x+c+d\sqrt{-1})\,(x+c-d\sqrt{-1})$
* $(x+b)\,(x+a+c\sqrt{-1})\,(x+a-c\sqrt{-1})\,(x+d+c\sqrt{-1})\,(x+d-c\sqrt{-1})$
* $(x+b)\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1})\,(x+c+d\sqrt{-1})\,(x+c-d\sqrt{-1})$
* $(x+b)\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1})\,(x+d+c\sqrt{-1})\,(x+d-c\sqrt{-1})$
* $(x+b)\,(x+a+d\sqrt{-1})\,(x+a-d\sqrt{-1})\,(x+c+c\sqrt{-1})\,(x+c-c\sqrt{-1})$
* $(x+b)\,(x+d+a\sqrt{-1})\,(x+d-a\sqrt{-1})\,(x+c+c\sqrt{-1})\,(x+c-c\sqrt{-1})$
* $(x+c)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})\,(x+c+d\sqrt{-1})\,(x+c-d\sqrt{-1})$
* $(x+c)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})\,(x+d+c\sqrt{-1})\,(x+d-c\sqrt{-1})$
* $(x+c)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})\,(x+c+d\sqrt{-1})\,(x+c-d\sqrt{-1})$
* $(x+c)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})\,(x+d+c\sqrt{-1})\,(x+d-c\sqrt{-1})$
* $(x+c)\,(x+a+c\sqrt{-1})\,(x+a-c\sqrt{-1})\,(x+b+d\sqrt{-1})\,(x+b-d\sqrt{-1})$
* $(x+c)\,(x+a+c\sqrt{-1})\,(x+a-c\sqrt{-1})\,(x+d+b\sqrt{-1})\,(x+d-b\sqrt{-1})$
* $(x+c)\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1})\,(x+b+d\sqrt{-1})\,(x+b-d\sqrt{-1})$
* $(x+c)\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1})\,(x+d+b\sqrt{-1})\,(x+d-b\sqrt{-1})$
* $(x+c)\,(x+a+d\sqrt{-1})\,(x+a-d\sqrt{-1})\,(x+b+c\sqrt{-1})\,(x+b-c\sqrt{-1})$
* $(x+c)\,(x+a+d\sqrt{-1})\,(x+a-d\sqrt{-1})\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1})$
* $(x+c)\,(x+d+a\sqrt{-1})\,(x+d-a\sqrt{-1})\,(x+b+c\sqrt{-1})\,(x+b-c\sqrt{-1})$
* $(x+c)\,(x+d+a\sqrt{-1})\,(x+d-a\sqrt{-1})\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1})$
* $(x+d)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})\,(x+c+c\sqrt{-1})\,(x+c-c\sqrt{-1})$
* $(x+d)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})\,(x+c+c\sqrt{-1})\,(x+c-c\sqrt{-1})$
* $(x+d)\,(x+a+c\sqrt{-1})\,(x+a-c\sqrt{-1})\,(x+b+c\sqrt{-1})\,(x+b-c\sqrt{-1})$
* $(x+d)\,(x+a+c\sqrt{-1})\,(x+a-c\sqrt{-1})\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1})$

$* (x+d)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$
$* (x+d)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$
$* (x+a)(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})(x+c+d\sqrt{-1})(x+c-d\sqrt{-1})$
$* (x+a)(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})(x+d+c\sqrt{-1})(x+d-c\sqrt{-1})$
$* (x+a)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})(x+b+d\sqrt{-1})(x+b-d\sqrt{-1})$
$* (x+a)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})(x+d+b\sqrt{-1})(x+d-b\sqrt{-1})$
$* (x+a)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})(x+b+d\sqrt{-1})(x+b-d\sqrt{-1})$
$* (x+a)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})(x+d+b\sqrt{-1})(x+d-b\sqrt{-1})$
$* (x+b)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+c+d\sqrt{-1})(x+c-d\sqrt{-1})$
$* (x+b)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+d+c\sqrt{-1})(x+d-c\sqrt{-1})$
$* (x+b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+c+d\sqrt{-1})(x+c-d\sqrt{-1})$
$* (x+b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+d+c\sqrt{-1})(x+d-c\sqrt{-1})$
$* (x+b)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})(x+b+d\sqrt{-1})(x+b-d\sqrt{-1})$
$* (x+b)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})(x+d+b\sqrt{-1})(x+d-b\sqrt{-1})$
$* (x+b)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})(x+b+d\sqrt{-1})(x+b-d\sqrt{-1})$
$* (x+b)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})(x+d+b\sqrt{-1})(x+d-b\sqrt{-1})$
$* (x+b)(x+a+d\sqrt{-1})(x+a-d\sqrt{-1})(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$
$* (x+b)(x+a+d\sqrt{-1})(x+a-d\sqrt{-1})(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$
$* (x+b)(x+d+a\sqrt{-1})(x+d-a\sqrt{-1})(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$
$* (x+b)(x+d+a\sqrt{-1})(x+d-a\sqrt{-1})(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$
$* (x+c)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+b+d\sqrt{-1})(x+b-d\sqrt{-1})$
$* (x+c)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+d+b\sqrt{-1})(x+d-b\sqrt{-1})$
$* (x+c)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+b+d\sqrt{-1})(x+b-d\sqrt{-1})$
$* (x+c)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+d+b\sqrt{-1})(x+d-b\sqrt{-1})$
$* (x+c)(x+a+d\sqrt{-1})(x+a-d\sqrt{-1})(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$
$* (x+c)(x+d+a\sqrt{-1})(x+d-a\sqrt{-1})(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$
$* (x+d)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$
$* (x+d)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$
$* (x+d)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$
$* (x+d)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$
$* (x+d)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$
$* (x+d)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$
$* (x+a)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+c+d\sqrt{-1})(x+c-d\sqrt{-1})$
$* (x+a)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+d+c\sqrt{-1})(x+d-c\sqrt{-1})$
$* (x+a)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+c+d\sqrt{-1})(x+c-d\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})\,(x+d+c\sqrt{-1})\,(x+d-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+a+c\sqrt{-1})\,(x+a-c\sqrt{-1})\,(x+b+d\sqrt{-1})\,(x+b-d\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+a+c\sqrt{-1})\,(x+a-c\sqrt{-1})\,(x+d+b\sqrt{-1})\,(x+d-b\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1})\,(x+b+d\sqrt{-1})\,(x+b-d\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1})\,(x+d+b\sqrt{-1})\,(x+d-b\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+a+d\sqrt{-1})\,(x+a-d\sqrt{-1})\,(x+b+c\sqrt{-1})\,(x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+a+d\sqrt{-1})\,(x+a-d\sqrt{-1})\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+d+a\sqrt{-1})\,(x+d-a\sqrt{-1})\,(x+b+c\sqrt{-1})\,(x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+d+a\sqrt{-1})\,(x+d-a\sqrt{-1})\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+a+a\sqrt{-1})\,(x+a-a\sqrt{-1})\,(x+c+d\sqrt{-1})\,(x+c-d\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+a+a\sqrt{-1})\,(x+a-a\sqrt{-1})\,(x+d+c\sqrt{-1})\,(x+d-c\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+a+c\sqrt{-1})\,(x+a-c\sqrt{-1})\,(x+a+d\sqrt{-1})\,(x+a-d\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+a+c\sqrt{-1})\,(x+a-c\sqrt{-1})\,(x+d+a\sqrt{-1})\,(x+d-a\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1})\,(x+a+d\sqrt{-1})\,(x+a-d\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1})\,(x+d+a\sqrt{-1})\,(x+d-a\sqrt{-1})$

* $(x+c)\,(x+a+a\sqrt{-1})\,(x+a-a\sqrt{-1})\,(x+b+d\sqrt{-1})\,(x+b-d\sqrt{-1})$

* $(x+c)\,(x+a+a\sqrt{-1})\,(x+a-a\sqrt{-1})\,(x+d+b\sqrt{-1})\,(x+d-b\sqrt{-1})$

* $(x+c)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})\,(x+a+d\sqrt{-1})\,(x+a-d\sqrt{-1})$

* $(x+c)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})\,(x+d+a\sqrt{-1})\,(x+d-a\sqrt{-1})$

* $(x+c)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})\,(x+a+d\sqrt{-1})\,(x+a-d\sqrt{-1})$

* $(x+c)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})\,(x+d+a\sqrt{-1})\,(x+d-a\sqrt{-1})$

* $(x+d)\,(x+a+a\sqrt{-1})\,(x+a-a\sqrt{-1})\,(x+b+c\sqrt{-1})\,(x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+d)\,(x+a+a\sqrt{-1})\,(x+a-a\sqrt{-1})\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+d)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})\,(x+a+c\sqrt{-1})\,(x+a-c\sqrt{-1})$

* $(x+d)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1})$

* $(x+d)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})\,(x+a+c\sqrt{-1})\,(x+a-c\sqrt{-1})$

* $(x+d)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+b+c\sqrt{-1})\,(x+b-c\sqrt{-1})\,(x+d+e\sqrt{-1})\,(x+d-e\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+b+c\sqrt{-1})\,(x+b-c\sqrt{-1})\,(x+e+d\sqrt{-1})\,(x+e-d\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1})\,(x+d+e\sqrt{-1})\,(x+d-e\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1})\,(x+e+d\sqrt{-1})\,(x+e-d\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+b+d\sqrt{-1})\,(x+b-d\sqrt{-1})\,(x+c+e\sqrt{-1})\,(x+c-e\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+b+d\sqrt{-1})\,(x+b-d\sqrt{-1})\,(x+e+c\sqrt{-1})\,(x+e-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)\,(x+d+b\sqrt{-1})\,(x+d-b\sqrt{-1})\,(x+c+e\sqrt{-1})\,(x+c-e\sqrt{-1})$
* $(x+a)\,(x+d+b\sqrt{-1})\,(x+d-b\sqrt{-1})\,(x+e+c\sqrt{-1})\,(x+e-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)\,(x+b+e\sqrt{-1})\,(x+b-e\sqrt{-1})\,(x+c+d\sqrt{-1})\,(x+c-d\sqrt{-1})$
* $(x+a)\,(x+b+e\sqrt{-1})\,(x+b-e\sqrt{-1})\,(x+d+c\sqrt{-1})\,(x+d-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)\,(x+e+b\sqrt{-1})\,(x+e-b\sqrt{-1})\,(x+c+d\sqrt{-1})\,(x+c-d\sqrt{-1})$
* $(x+a)\,(x+e+b\sqrt{-1})\,(x+e-b\sqrt{-1})\,(x+d+c\sqrt{-1})\,(x+d-c\sqrt{-1})$
* $(x+b)\,(x+a+c\sqrt{-1})\,(x+a-c\sqrt{-1})\,(x+d+e\sqrt{-1})\,(x+d-e\sqrt{-1})$
* $(x+b)\,(x+a+c\sqrt{-1})\,(x+a-c\sqrt{-1})\,(x+e+d\sqrt{-1})\,(x+e-d\sqrt{-1})$
* $(x+b)\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1})\,(x+d+e\sqrt{-1})\,(x+d-e\sqrt{-1})$
* $(x+b)\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1})\,(x+e+d\sqrt{-1})\,(x+e-d\sqrt{-1})$
* $(x+b)\,(x+a+d\sqrt{-1})\,(x+a-d\sqrt{-1})\,(x+c+e\sqrt{-1})\,(x+c-e\sqrt{-1})$
* $(x+b)\,(x+a+d\sqrt{-1})\,(x+a-d\sqrt{-1})\,(x+e+c\sqrt{-1})\,(x+e-c\sqrt{-1})$
* $(x+b)\,(x+d+a\sqrt{-1})\,(x+d-a\sqrt{-1})\,(x+c+e\sqrt{-1})\,(x+c-e\sqrt{-1})$
* $(x+b)\,(x+d+a\sqrt{-1})\,(x+d-a\sqrt{-1})\,(x+e+c\sqrt{-1})\,(x+e-c\sqrt{-1})$
* $(x+b)\,(x+a+e\sqrt{-1})\,(x+a-e\sqrt{-1})\,(x+c+d\sqrt{-1})\,(x+c-d\sqrt{-1})$
* $(x+b)\,(x+a+e\sqrt{-1})\,(x+a-e\sqrt{-1})\,(x+d+c\sqrt{-1})\,(x+d-c\sqrt{-1})$
* $(x+b)\,(x+e+a\sqrt{-1})\,(x+e-a\sqrt{-1})\,(x+c+d\sqrt{-1})\,(x+c-d\sqrt{-1})$
* $(x+b)\,(x+e+a\sqrt{-1})\,(x+e-a\sqrt{-1})\,(x+d+c\sqrt{-1})\,(x+d-c\sqrt{-1})$
* $(x+c)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})\,(x+d+e\sqrt{-1})\,(x+d-e\sqrt{-1})$
* $(x+c)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})\,(x+e+d\sqrt{-1})\,(x+e-d\sqrt{-1})$
* $(x+c)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})\,(x+d+e\sqrt{-1})\,(x+d-e\sqrt{-1})$
* $(x+c)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})\,(x+e+d\sqrt{-1})\,(x+e-d\sqrt{-1})$
* $(x+c)\,(x+a+d\sqrt{-1})\,(x+a-d\sqrt{-1})\,(x+b+e\sqrt{-1})\,(x+b-e\sqrt{-1})$
* $(x+c)\,(x+a+d\sqrt{-1})\,(x+a-d\sqrt{-1})\,(x+e+b\sqrt{-1})\,(x+e-b\sqrt{-1})$
* $(x+c)\,(x+d+a\sqrt{-1})\,(x+d-a\sqrt{-1})\,(x+b+e\sqrt{-1})\,(x+b-e\sqrt{-1})$
* $(x+c)\,(x+d+a\sqrt{-1})\,(x+d-a\sqrt{-1})\,(x+e+b\sqrt{-1})\,(x+e-b\sqrt{-1})$
* $(x+c)\,(x+a+e\sqrt{-1})\,(x+a-e\sqrt{-1})\,(x+b+d\sqrt{-1})\,(x+b-d\sqrt{-1})$
* $(x+c)\,(x+a+e\sqrt{-1})\,(x+a-e\sqrt{-1})\,(x+d+b\sqrt{-1})\,(x+d-b\sqrt{-1})$
* $(x+c)\,(x+e+a\sqrt{-1})\,(x+e-a\sqrt{-1})\,(x+b+d\sqrt{-1})\,(x+b-d\sqrt{-1})$
* $(x+c)\,(x+e+a\sqrt{-1})\,(x+e-a\sqrt{-1})\,(x+d+b\sqrt{-1})\,(x+d-b\sqrt{-1})$
* $(x+d)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})\,(x+c+e\sqrt{-1})\,(x+c-e\sqrt{-1})$

* $(x+d)\ (x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})\ (x+e+c\sqrt{-1})\ (x+e-c\sqrt{-1})$

* $(x+d)\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})\ (x+c+e\sqrt{-1})\ (x+c-e\sqrt{-1})$

* $(x+d)\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})\ (x+e+c\sqrt{-1})\ (x+e-c\sqrt{-1})$

* $(x+d)\ (x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})\ (x+b+e\sqrt{-1})\ (x+b-e\sqrt{-1})$

* $(x+d)\ (x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})\ (x+e+b\sqrt{-1})\ (x+e-b\sqrt{-1})$

* $(x+d)\ (x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})\ (x+b+e\sqrt{-1})\ (x+b-e\sqrt{-1})$

* $(x+d)\ (x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})\ (x+e+b\sqrt{-1})\ (x+e-b\sqrt{-1})$

* $(x+d)\ (x+a+e\sqrt{-1})\ (x+a-e\sqrt{-1})\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+d)\ (x+a+e\sqrt{-1})\ (x+a-e\sqrt{-1})\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+d)\ (x+e+a\sqrt{-1})\ (x+e-a\sqrt{-1})\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+d)\ (x+e+a\sqrt{-1})\ (x+e-a\sqrt{-1})\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+e)\ (x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})\ (x+c+d\sqrt{-1})\ (x+c-d\sqrt{-1})$

* $(x+e)\ (x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})\ (x+d+c\sqrt{-1})\ (x+d-c\sqrt{-1})$

* $(x+e)\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})\ (x+c+d\sqrt{-1})\ (x+c-d\sqrt{-1})$

* $(x+e)\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})\ (x+d+c\sqrt{-1})\ (x+d-c\sqrt{-1})$

* $(x+e)\ (x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})\ (x+b+d\sqrt{-1})\ (x+b-d\sqrt{-1})$

* $(x+e)\ (x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})\ (x+d+b\sqrt{-1})\ (x+d-b\sqrt{-1})$

* $(x+e)\ (x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})\ (x+b+d\sqrt{-1})\ (x+b-d\sqrt{-1})$

* $(x+e)\ (x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})\ (x+d+b\sqrt{-1})\ (x+d-b\sqrt{-1})$

* $(x+e)\ (x+a+d\sqrt{-1})\ (x+a-d\sqrt{-1})\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+e)\ (x+a+d\sqrt{-1})\ (x+a-d\sqrt{-1})\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+e)\ (x+d+a\sqrt{-1})\ (x+d-a\sqrt{-1})\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+e)\ (x+d+a\sqrt{-1})\ (x+d-a\sqrt{-1})\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$

L'on trouveroit de la même manière les ſyſtèmes de facteurs des formules du ſixième degré, ceux des formules du ſeptième, &c.

SECOND DEGRÉ.

On aura

$(x+a)(x+a) = x^2 + 2ax + a^2 = 1.^{re}$ formule.

$(x+a)(x-a) = x^2 - a^2 = 6.^{e}$

$(x-a)(x-a) = x^2 - 2ax + a^2 = 3.^{e}$

$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab = 1.^{re}$

$(x+a)(x-b) = x^2 + (a-b)x - ab = 2.^{e}$

$(x-a)(x+b) = x^2 - (a-b)x - ab = 4.^{e}$

$(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab = 3.^{e}$

$(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1}) = x^2 + a^2 = 5.^{e}$

$(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1}) = x^2 + 2ax + 2a^2 = 1.^{re}$

$(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1}) = x^2 - 2ax + 2a^2 = 3.^{e}$

$(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1}) = x^2 + 2ax + (a^2+b^2) = 1.^{re}$

$(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1}) = x^2 - 2ax + (a^2+b^2) = 3.^{e}$

$(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1}) = x^2 + 2bx + (a^2+b^2) = 1.^{re}$

$(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1}) = x^2 - 2bx + (a^2+b^2) = 3.^{e}$

D'où l'on tirera la Table suivante.

$$x^2 + mx + n = \begin{cases} (x+a)(x+a) \\ (x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1}) \\ \text{ou} \\ (x+a)(x+b) \\ (x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1}) \\ (x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1}) \end{cases}$$

$$x^2 + mx - n = (x+a)(x-b)$$

$$x^2 - mx + n = \begin{cases} (x-a)(x-a) \\ (x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1}) \\ \text{ou} \\ (x-a)(x-b) \\ (x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1}) \\ (x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1}) \end{cases}$$

$$x^2 - mx - n = (x-a)(x+b)$$

$$x^2 + n = (x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$$

$$x^2 - n = (x+a)(x-a)$$

Pour achever cette Table, lorſqu'une formule a à côté d'elle pluſieurs ſyſtèmes de facteurs, il faut aſſigner à chacun le ſyſtème de conditions qui lui appartient.

Soit $x^2 + mx + n = (x+a)(x+a) = x^2 + 2ax + a^2$, on aura $m = 2a$, $n = a^2$; donc $m^2 - 4n = 0$.

Soit $x^2 + mx + n = (x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1}) = x^2 + 2ax + 2a^2$, on aura $m = 2a$, $n = 2a^2$; donc $m^2 - 2n = 0$.

Soit $x^2 + mx + n = (x + a)(x + b)$, si l'on suppose $b = a$, on aura $m^2 - 4n = 0$; donc, tant que b sera moindre que a, la fonction $m^2 - 4n$ sera plus grande ou moindre que 0. Pour savoir lequel des deux, je suppose $a = 2$, $b = 1$, j'aurai $m = 3$, $n = 2$, & en substituant dans la fonction $m^2 - 4n$, j'aurai $3^2 - 2^2 \cdot 2 > 0$; par conséquent, la condition pour ce système-ci sera $m^2 - 4n > 0$.

Soit $x^2 + mx + n = (x + a + b\sqrt{-1})(x + a - b\sqrt{-1})$, 1.° b devenant $= 0$, la fonction $m^2 - 4n$ devient $= 0$; donc, tant que b sera plus grand que 0, cette fonction sera plus grande ou moindre que 0, & il est évident que c'est moindre que 0 qu'elle est; car nous venons de trouver que lorsqu'elle est plus grande que 0, la formule appartient au système précédent; on aura donc pour ce système-ci $m^2 - 4n < 0$.

2.° b devenant $= a$, la fonction $m^2 - 2n$ devient $= 0$; donc, tant que b sera moindre que a, cette fonction sera plus grande ou moindre que 0, & il est évident que c'est plus grande que 0 qu'elle sera; sans quoi, la condition précédente seroit vaine: le système de conditions pour ce système de facteurs-ci est donc $m^2 - 4n < 0$, $m^2 - 2n > 0$.

Soit $x^2 + mx + n = (x + b + a\sqrt{-1})(x + b - a\sqrt{-1})$, b devenant $= a$, la fonction $m^2 - 2n$ devient $= 0$; donc, tant que b est moindre que a, cette fonction est plus grande ou moindre que 0, & il est aisé de voir, que pour distinguer ce système-ci du précédent, il faut que $m^2 - 2n$ soit < 0.

Les conditions pour chaque système de facteurs de la troisième formule, sont les mêmes que celles pour le système

correſpondant de la première ; on aura donc enfin la Table qui ſuit.

$$x^2+mx+n=\begin{cases}(x+a)(x+a)\ldots\ldots\ldots\ldots & m^2-4n=0\\ (x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})\ldots & m^2-2n=0\\ (x+a)(x+b)\ldots\ldots\ldots\ldots & m^2-4n>0\\ (x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})\ldots & m^2-4n<0,\ m^2-2n>0\\ (x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})\ldots & m^2-2n<0\end{cases}$$

$$x^2+mx-n=(x+a)(x-b)$$

$$x^2-mx+n=\begin{cases}(x-a)(x-a)\ldots\ldots\ldots\ldots & m^2-4n=0\\ (x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})\ldots & m^2-2n=0\\ (x-a)(x-b)\ldots\ldots\ldots\ldots & m^2-4n>0\\ (x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})\ldots & m^2-4n<0,\ m^2-2n>0\\ (x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})\ldots & m^2-2n<0\end{cases}$$

$$x^2-mx-n=(x-a)(x+b)$$

$$x^2+n=(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$$

$$x^2-n=(x+a)(x-a)$$

TROISIÈME DEGRÉ.

On aura

$(x+a)(x+a)(x+a)=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3=$ 1.ere formule.

$(x+a)(x+a)(x-a)=x^3+ax^2-a^2x-a^3=$ 5.e

$(x+a)(x-a)(x-a)=x^3-ax^2-a^2x+a^3=$ 7.e

$(x - a)(x - a)(x - a) = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 = 6.^e$

$(x + a)(x + b)(x + b) = x^3 + (a + 2b)x^2 + (2ab + b^2)x + ab^2 = 1.^{re}$

$(x + a)(x + b)(x - b) = x^3 + ax^2 - b^2x - ab^2 = 5.^e$

$(x - a)(x + b)(x + b) = x^3 + (-a + 2b)x^2 - (2ab - b^2)x - ab^2 = 5.^e$ ou $8.^e$ ou $16.^e$

$(x + a)(x - b)(x - b) = x^3 + (a - 2b)x^2 - (2ab - b^2)x + ab^2 = 3.^e$ ou $7.^e$ ou $15.^e$

$(x - a)(x + b)(x - b) = x^3 - ax^2 - b^2x + ab^2 = 7.^e$

$(x - a)(x - b)(x - b) = x^3 - (a + 2b)x^2 + (2ab + b^2)x - ab^2 = 6.^e$

$(x + a)(x + a)(x + b) = x^3 + (2a + b)x^2 + (a^2 + 2ab)x + ab^2 = 1.^{ere}$

$(x + a)(x + a)(x - b) = x^3 + (2a - b)x^2 + (a^2 - 2ab)x - a^2b = 2.^e$ ou $5.^e$ ou $10.^e$

$(x + a)(x - a)(x + b) = x^3 + bx^2 - a^2x - a^2b = 5.^e$

$(x + a)(x - a)(x - b) = x^3 - bx^2 - a^2x + a^2b = 7.^e$

$(x - a)(x - a)(x + b) = x^3 - (2a - b)x^2 + (a^2 - 2ab)x + a^2b = 4.^e$ ou $7.^e$ ou $11.^e$

$(x - a)(x - a)(x - b) = x^3 - (2a + b)x^2 + (a^2 + 2ab)x - a^2b = 6.^e$

$(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x + abc = 1.^{ere}$

$(x + a)$

$(x+a)(x+b)(x-c) = x^3 + (a+b-c)x^2 + (ab-ac-bc)x - abc =$ 2.e ou 5.e ou 10.e

$(x+a)(x-b)(x+c) = x^3 + (a-b+c)x^2 - (ab-ac+bc)x - abc =$ 5.e

$(x-a)(x+b)(x+c) = x^3 + (-a+b+c)x^2 - (ab+ac-bc)x - abc =$ 5.e ou 8.e ou 10.e

$(x+a)(x-b)(x-c) = x^3 + (a-b-c)x^2 - (ab+ac-bc)x + abc =$ 3.e ou 7.e ou 15.e

$(x-a)(x+b)(x-c) = x^3 - (a-b+c)x^2 - (ab-ac+bc)x + abc =$ 7.e

$(x-a)(x-b)(x+c) = x^3 - (a+b-c)x^2 + (ab-ac-bc)x + abc =$ 4.e ou 7.e ou 11.e

$(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc =$ 6.e

$(x+a)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1}) = x^3 + ax^2 + a^2x + a^3 =$ 1.re

$(x-a)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1}) = x^3 - ax^2 + a^2x - a^3 =$ 6.e

$(x+a)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1}) = x^3 + ax^2 + b^2x + ab^2 =$ 1.re

$(x-a)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1}) = x^3 - ax^2 + b^2x - ab^2 =$ 6.e

$(x+b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1}) = x^3 + bx^2 + a^2x + a^2b =$ 1.re

$(x-b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1}) = x^3 - bx^2 + a^2x - a^2b =$ 6.e

$(x+a)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1}) = x^3 + 3ax^2 + 4a^2x + 2a^3 =$ 1.re

$(x+a)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1}) = x^3 - ax^2 + 2a^3 = 11.^{e}$

$(x-a)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1}) = x^3 + ax^2 - 2a^3 = 10.^{e}$

$(x-a)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1}) = x^3 - 3ax^2 + 4a^2x - 2a^3 = 6.^{e}$

$(x+a)(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1}) = x^3 + (a+2b)x^2 + (2ab+2b^2)x + 2ab^2 = 1.^{re}$

$(x+a)(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1}) = x^3 + (a-2b)x^2 - (2ab-2b^2)x + 2ab^2 = 3.^{e}$ ou $7.^{e}$ ou $15.^{e}$

$(x-a)(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1} = x^3 + (-a+2b)x^2 - (2ab-2b^2)x - 2ab^2 = 5.^{e}$ ou $8.^{e}$ ou $16.^{e}$

$(x-a)(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1}) = x^3 - (a+2b)x^2 + (2ab+2b^2)x - 2ab^2 = 6.^{e}$

$(x+b)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1}) = x^3 + (2a+b)x^2 + (a^2+2ab+b^2)x + b(a^2+b^2) = 1.^{re}$

$(x+b)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1}) = x^3 - (2a-b)x^2 + (a^2-2ab+b^2)x + b(a^2+b^2) = 4.^{e}$

$(x-b)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1}) = x^3 + (2a-b)x^2 + (a^2-2ab+b^2)x - b(a^2+b^2) = 2.^{e}$

$(x-b)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1}) = x^3 - (2a+b)x^2 + (a^2+2ab+b^2)x - b(a^2+b^2) = 6.^{e}$

$(x+b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1}) =$
$x^3+3bx^2+(a^2+3b^2)x+b(a^2+b^2) = 1.^{ere}$

$(x+b)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1}) =$
$x^3-bx^2+(a^2-b^2)x+b(a^2+b^2) = 4.^{e}$

$(x-b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1}) =$
$x^3+bx^2+(a^2-b^2)x-b(a^2+b^2) = 2.^{e}$

$(x-b)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1}) =$
$x^3-3bx^2+(a^2+3b^2)x-b(a^2+b^2) = 6.^{e}$

$(x+a)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1}) =$
$x^3+3ax^2+(3a^2+b^2)x+a(a^2+b^2) = 1.^{ere}$

$(x+a)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1}) =$
$x^3-ax^2-(a^2-b^2)x+a(a^2+b^2) = 7.^{e}$

$(x-a)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1}) =$
$x^3+ax^2-(a^2-b^2)x-a(a^2+b^2) = 5.^{e}$

$(x-a)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1}) =$
$x^3-3ax^2+(3a^2+b^2)x-a(a^2+b^2) = 6.^{e}$

$(x+a)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1}) =$
$x^3+(2b+a)x^2+(a+b)^2x+a(a^2+b^2) =$
$1.^{ere}$

$(x+a)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1}) =$
$x^3+(a-2b)x^2+(a-b)^2x+a(a^2+b^2) =$
$1.^{ere}$ ou $4.^{e}$ ou $13.^{e}$

$(x-a)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1}) =$
$x^3+(2b-a)x^2+(a-b)^2x-a(a^2+b^2) =$
$2.^{e}$ ou $6.^{e}$ ou $14.^{e}$

$(x-a)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1}) =$
$x^3-(a+2b)x^2+(a+b)^2x-a(a^2+b^2) =$
$6.^{e}$

$(x+b)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1}) =$
$x^3+(2a+b)x^2+(2a^2+2ab)x+2a^2b =$
1.ere

$(x+b)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1}) =$
$x^3-(2a-b)x^2+(2a^2-2ab)x+2a^2b =$
4.e

$(x-b)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1}) =$
$x^3+(2a-b)x^2+(2a^2-2ab)x-2a^2b =$
2.e

$(x-b)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1}) =$
$x^3-(2a+b)x^2+(2a^2+2ab)x-2a^2b =$
6.e

$(x+a)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1}) =$
$x^3+(a+2b)x^2+(2ab+b^2+c^2)x+$
$a(b^2+c^2) =$ 1.ere

$(x+a)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1}) =$
$x^3+(a-2b)x^2-(2ab-b^2-c^2)x+$
$a(b^2+c^2) =$ 3.e ou 7.e ou 15.e

$(x-a)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1}) =$
$x^3+(-a+2b)x^2-(2ab-b^2-c^2)x-$
$a(b^2+c^2) =$ 5.e ou 8.e ou 16.e

$(x-a)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1}) =$
$x^3-(a+2b)x^2+(2ab+b^2+c^2)x-$
$a(b^2+c^2) =$ 6.e

$(x+a)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1}) =$
$x^3+(a+2c)x^2+(2ac+b^2+c^2)x+$
$a(b^2+c^2) =$ 1.ere

$(x+a)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1}) =$

$x^3 + (a - 2c)x^2 + (-2ac + b^2 + c^2)x + a(b^2 + c^2) = 1.^{ere}$ ou $3.^e$ ou $9.^e$ ou $4.^e$ ou $7.^e$ ou $11.^e$ ou $13.^e$ ou $15.^e$ ou $17.^e$

$(x - a)(x + c + b\sqrt{-1})(x + c - b\sqrt{-1}) = x^3 + (-a + 2c)x^2 + (-2ac + b^2 + c^2)x - a(b^2 + c^2) = 2.^e$ ou $5.^e$ ou $10.^e$ ou $6.^e$ ou $8.^e$ ou $12.^e$ ou $14.^e$ ou $16.^e$ ou $18.^e$

$(x - a)(x - c + b\sqrt{-1})(x - c - b\sqrt{-1}) = x^3 - (a + 2c)x^2 + (2ac + b^2 + c^2)x - a(b^2 + c^2) = 6.^e$

$(x + b)(x + a + c\sqrt{-1})(x + a - c\sqrt{-1}) = x^3 + (2a + b)x^2 + (2ab + b^2 + c^2)x + b(a^2 + c^2) = 1.^{ere}$

$(x + b)(x - a + c\sqrt{-1})(x - a - c\sqrt{-1}) = x^3 - (2a - b)x^2 + (a^2 - 2ab + c^2)x + b(a^2 + c^2) = 4.^e$ ou $7.^e$ ou $11.^e$

$(x - b)(x + a + c\sqrt{-1})(x + a - c\sqrt{-1}) = x^3 + (2a - b)x^2 + (a^2 - 2ab + c^2)x - b(a^2 + c^2) = 2.^e$ ou $5.^e$ ou $10.^e$

$(x - b)(x - a + c\sqrt{-1})(x - a - c\sqrt{-1}) = x^3 - (2a + b)x^2 + (a^2 + 2ab + c^2)x - b(a^2 + c^2) = 6.^e$

$(x + b)(x + c + a\sqrt{-1})(x + c - a\sqrt{-1}) = x^3 + (2c + b)x^2 + (a^2 + 2bc + c^2)x + b(a^2 + c^2) = 1.^{ere}$

$(x + b)(x - c + a\sqrt{-1})(x - c - a\sqrt{-1}) = x^3 + (b - 2c)x^2 + (a^2 - 2bc + c^2)x + b(a^2 + c^2) = 1.^{ere}$ ou $4.^e$ ou $13.^e$

$(x-b)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1}) = x^3+(-b+2c)x^2+(a^2-2bc+c^2)x-b(a^2+c^2) = 2.^{e}$ ou $6.^{e}$ ou $14.^{e}$

$(x-b)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1}) = x^3-(b+2c)x^2+(a^2+2bc+c^2)x-b(a^2+c^2) = 6.^{e}$

$(x+c)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1}) = x^3+(2a+c)x^2+(a^2+2ac+b^2)x+c(a^2+b^2) = 1.^{ere}$

$(x+c)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1}) = x^3-(2a-c)x^2+(a^2-2ac+b^2)x+c(a^2+b^2) = 4.^{e}$

$(x-c)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1}) = x^3+(2a-c)x^2+(a^2-2ac+b^2)x-c(a^2+b^2) = 2.^{e}$

$(x-c)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1}) = x^3-(2a+c)x^2+(a^2+2ac+b^2)x-c(a^2+b^2) = 6.^{e}$

$(x+c)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1}) = x^3+(2b+c)x^2+(a^2+2bc+b^2)x+c(a^2+b^2) = 1.^{ere}$

$(x+c)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1}) = x^3-(2b-c)x^2+(a^2-2bc+b^2)x+c(a^2+b^2) = 4.^{e}$

$(x-c)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1}) = x^3+(2b-c)x^2+(a^2-2bc+b^2)x-c(a^2+b^2) = 2.^{e}$

$(x - c)(x - b + a\sqrt{-1})(x - b - a\sqrt{-1}) =$
$x^3 - (2b + c)x^2 + (a^2 + 2bc + b^2)x -$
$c(a^2 + b^2) = 6.^e$

Par conſéquent, on aura la Table qui ſuit.

$x^3 + mx^2 + nx + p =$ {

$(x + a)(x + a)(x + a)$

$(x + a)(x + a\sqrt{-1})(x - a\sqrt{-1})$

$(x + a)(x + a + a\sqrt{-1})(x + a - a\sqrt{-1})$

$(x + a)(x + b)(x + b)$

$(x + a)(x + a)(x + b)$

$(x + a)(x + b\sqrt{-1})(x - b\sqrt{-1})$

$(x + b)(x + a\sqrt{-1})(x - a\sqrt{-1})$

$(x + a)(x + b + b\sqrt{-1})(x + b - b\sqrt{-1})$

$(x + b)(x + a + a\sqrt{-1})(x + a - a\sqrt{-1})$

$(x + b)(x + a + b\sqrt{-1})(x + a - b\sqrt{-1})$

$(x + a)(x + b + a\sqrt{-1})(x + b - a\sqrt{-1})$

$(x + a)(x - b + a\sqrt{-1})(x - b - a\sqrt{-1})$

$(x + b)(x + b + a\sqrt{-1})(x + b - a\sqrt{-1})$

$(x + a)(x + a + b\sqrt{-1})(x + a - b\sqrt{-1})$

&c.

$(x + a)(x + b)(x + c)$

$(x + a)(x + b + c\sqrt{-1})(x + b - c\sqrt{-1})$

$(x + a)(x + c + b\sqrt{-1})(x + c - b\sqrt{-1})$

$(x + a)(x - c + b\sqrt{-1})(x - c - b\sqrt{-1})$

$(x + b)(x + a + c\sqrt{-1})(x + a - c\sqrt{-1})$

$(x + b)(x + c + a\sqrt{-1})(x + c - a\sqrt{-1})$

$(x + b)(x - c + a\sqrt{-1})(x - c - a\sqrt{-1})$

$(x + c)(x + a + b\sqrt{-1})(x + a - b\sqrt{-1})$

$(x + c)(x + b + a\sqrt{-1})(x + b - a\sqrt{-1})$

$$x^3+mx^2+nx-p=\begin{cases}(x+a)\,(x+a)\,(x-b)\\(x-b)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})\\(x-a)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})\\(x-b)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})\\(x-b)\,(x+a+a\sqrt{-1})\,(x+a-a\sqrt{-1})\\ \&c.\\(x+a)\,(x+b)\,(x-c)\\(x-a)\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1})\\(x-b)\,(x+a+c\sqrt{-1})\,(x+a-c\sqrt{-1})\\(x-b)\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1})\\(x-c)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})\\(x-c)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})\end{cases}$$

$$x^3+mx^2-nx+p=\begin{cases}(x+a)\,(x-b)\,(x-b)\\(x+a)\,(x-b+b\sqrt{-1})\,(x-b-b\sqrt{-1})\\ \&c.\\(x+a)\,(x-b)\,(x-c)\\(x+a)\,(x-b+c\sqrt{-1})\,(x-b-c\sqrt{-1})\\(x+a)\,(x-c+b\sqrt{-1})\,(x-c-b\sqrt{-1})\end{cases}$$

$$x^3-mx^2+nx+p=\begin{cases}(x-a)\,(x-a)\,(x+b)\\(x+b)\,(x-a+b\sqrt{-1})\,(x-a-b\sqrt{-1})\\(x+a)\,(x-b+a\sqrt{-1})\,(x-b-a\sqrt{-1})\\(x+b)\,(x-b+a\sqrt{-1})\,(x-b-a\sqrt{-1})\\(x+b)\,(x-a+a\sqrt{-1})\,(x-a-a\sqrt{-1})\\ \&c.\\(x-a)\,(x-b)\,(x+c)\\(x+a)\,(x-c+b\sqrt{-1})\,(x-c-b\sqrt{-1})\\(x+b)\,(x-a+c\sqrt{-1})\,(x-a-c\sqrt{-1})\\(x+b)\,(x-c+a\sqrt{-1})\,(x-c-a\sqrt{-1})\\(x+c)\,(x-a+b\sqrt{-1})\,(x-a-b\sqrt{-1})\\(x+c)\,(x-b+a\sqrt{-1})\,(x-b-a\sqrt{-1})\end{cases}$$

x^3+

$x^3 + mx^2 - nx - p =$

$(x+a)(x+a)(x-a)$
$(x+a)(x+b)(x-b)$
$(x+a)(x-a)(x+b)$
$(x-a)(x+b)(x+b)$
$(x+a)(x+a)(x-b)$
$(x-a)(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$

$(x+a)(x+b)(x-c)$
$(x+a)(x-b)(x+c)$
$(x-a)(x+b)(x+c)$
$(x-a)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$
$(x-b)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$

$x^3 - mx^2 + nx - p =$

$(x-a)(x-a)(x-a)$
$(x-a)(x+a\sqrt{-1})(x+a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x-b)$
$(x-a)(x-a)(x-b)$
$(x-a)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x-b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$

$(x-a)(x-b)(x-c)$
$(x-a)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-a+c\sqrt{-1})(x-a-c\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$
$(x-c)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$
$(x-c)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$

$$x^3 - mx^2 - nx + p = \begin{cases} (x+a)(x-a)(x-a) \\ (x+a)(x-b)(x-b) \\ (x+b)(x-a)(x-a) \\ (x-a)(x-b)(x+b) \\ (x+a)(x-a)(x-b) \\ (x+a)(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1}) \\ (x+a)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1}) \\ \text{\&c.} \\ (x+a)(x-b)(x-c) \\ (x-a)(x+b)(x-c) \\ (x-a)(x-b)(x+c) \\ (x+a)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1}) \\ (x+a)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1}) \\ (x+b)(x-a+c\sqrt{-1})(x-a-c\sqrt{-1}) \end{cases}$$

$$x^3 - mx^2 - nx - p = \begin{cases} (x-a)(x+b)(x+b) \\ (x-a)(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1}) \\ \text{\&c.} \\ (x-a)(x+b)(x+c) \\ (x-a)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1}) \\ (x-a)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1}) \end{cases}$$

$$x^3 + mx^2 + p = (x+a)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$$

$$x^3 \pm mx^2 - p = \begin{cases} (x-a)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1}) \\ (x+a)(x+a)(x-b) \\ \text{\&c.} \\ (x+a)(x+b)(x-c) \\ (x-a)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1}) \\ (x-b)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1}) \end{cases}$$

$$x^3 - mx^2 + p = \begin{cases} (x+a)\,(x-a+a\sqrt{-1})\,(x-a-a\sqrt{-1}) \\ (x-a)\,(x-a)\,(x+b) \\ \text{ou} \\ (x-a)\,(x-b)\,(x+c) \\ (x+a)\,(x-c+b\sqrt{-1})\,(x-c-b\sqrt{-1}) \\ (x+b)\,(x-a+c\sqrt{-1})\,(x-a-c\sqrt{-1}) \end{cases}$$

$$x^3 - mx^2 - p = (x-a)\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1})$$

$$x^3 + nx + p = \begin{cases} (x+a)\,(x-b+a\sqrt{-1})\,(x-b-a\sqrt{-1}) \\ \text{ou} \\ (x+a)\,(x-c+b\sqrt{-1})\,(x-c-b\sqrt{-1}) \\ (x+b)\,(x-c+a\sqrt{-1})\,(x-c-a\sqrt{-1}) \end{cases}$$

$$x^3 - nx + p = \begin{cases} (x+a)\,(x-b)\,(x-b) \\ (x+a)\,(x-b+b\sqrt{-1})\,(x-b-b\sqrt{-1}) \\ \text{ou} \\ (x+a)\,(x-b)\,(x-c) \\ (x+a)\,(x-b+c\sqrt{-1})\,(x-b-c\sqrt{-1}) \\ (x+a)\,(x-c+b\sqrt{-1})\,(x-c-b\sqrt{-1}) \end{cases}$$

$$x^3 + nx - p = \begin{cases} (x-a)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1}) \\ \text{ou} \\ (x-a)\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1}) \\ (x-b)\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1}) \end{cases}$$

$$x^3 - nx - p = \begin{cases} (x-a)\,(x+b)\,(x+b) \\ (x-a)\,(x+b+b\sqrt{-1})\,(x+b-b\sqrt{-1}) \\ \text{ou} \\ (x-a)\,(x+b)\,(x+c) \\ (x-a)\,(x+b+c\sqrt{-1})\,(x+b-c\sqrt{-1}) \\ (x-a)\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1}) \end{cases}$$

$$x^3 + p = (x+a)\,(x-c+b\sqrt{-1})\,(x-c-b\sqrt{-1})$$

$$x^3 - p = (x-a)\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1})$$

Il faut assigner à chaque système de facteurs le système de conditions qui lui appartient.

Soit $x^3 + mx^2 + nx + p = (x + a)(x + a)(x + a)$, on aura $3a = m$, $3a^2 = n$ & $a^3 = p$; donc $m^2 - 3n = 0$, & $m^3 - 27p = 0$.

Soit $x^3 + mx^2 + nx + p = (x + a)(x + a\sqrt{-1})(x - a\sqrt{-1})$, on aura $a = m$, $a^2 = n$, & $a^3 = p$; donc $m^2 - n = 0$, $m^3 - p = 0$.

Soit $x^3 + mx^2 + nx + p = (x + a)(x + a + a\sqrt{-1})(x + a - a\sqrt{-1})$, on aura $3a = m$, $4a^2 = n$, & $2a^3 = p$; donc $4m^2 - 9n = 0$, $2m^3 - 27p = 0$.

Soit $x^3 + mx^2 + nx + p = (x + a)(x + b)(x + b)$, on aura $a + 2b = m$, $2ab + b^2 = n$ & $ab^2 = p$; donc $a = m - 2b$; donc $2mb - 3b^2 = n$, & $mb^2 - 2b^3 = p$; donc $b^2 = \frac{2mb - n}{3}$ & $b^2 = \frac{p}{m - 2b}$; donc $\frac{2mb - n}{3} = \frac{p}{m - 2b}$; donc $b^2 = \frac{2m^2b + 2nb - mn - 3p}{4m}$; donc $\frac{2mb - n}{3} = \frac{2m^2b + 2nb - mn - 3p}{4m}$; donc $b = \frac{mn - 9p}{2(m^2 - 3n)}$; mais $b = \frac{n}{2m - 3b}$; donc $\frac{mn - 9p}{2(m^2 - 3n)} = \frac{n}{2m - 3b}$; donc $b = \frac{2(-3mp + n^2)}{mn - 9p}$; donc $4(m^2 - 3n)(-3mp + n^2) - (mn - 9p)^2 = 0$.

Soit $x^3 + mx^2 + nx + p = (x + a)(x + a)(x + b)$, on aura $4(m^2 - 3n)(-3mp + n^2) - (mn - 9p)^2 = 0$, comme pour le système précédent.

Soit $x^3 + mx^2 + nx + p = (x + a)(x + b\sqrt{-1})(x - b\sqrt{-1})$; donc $a = m$, $b^2 = n$, & $ab^2 = p$; donc $mn - p = 0$.

Soit $x^3 + mx^3 + nx + p = (x + b)(x + a\sqrt{-1})(x - a\sqrt{-1})$, on aura $mn - p = 0$, comme pour le système précédent.

Soit $x^3 + mx^2 + nx + p = (x + a)(x + b + b\sqrt{-1})(x + b - b\sqrt{-1})$, on aura $a + 2b = m$, $2ab + b^2 = n$, & $2ab^2 = p$; donc $a = m - 2b$; donc $2mb - 2b^2 = n$, & $2mb^2 - 4b^3 = p$; donc $b^2 = \frac{2mb - n}{2}$, & $b^2 = \frac{p}{2m - 4b}$; donc $2mb - n = \frac{p}{m - 2b}$; donc $b^2 = \frac{2m^2b + 2nb - mn - p}{4m}$; donc $2mb - n = \frac{2m^2b + 2nb - mn - p}{2m}$; donc $b = \frac{mn - p}{2(m^2 - n)}$; mais $b = \frac{n}{2m - 2b}$; donc $\frac{mn - p}{m^2 - n} = \frac{n}{m - b}$; donc $b = \frac{-mp + n^2}{mn - p}$; donc enfin $2(m^2 - n)(-mp + n^2) - (mn - p)^2 = 0$.

Soit $x^3 + mx^2 + nx + p = (x + b)(x + a + a\sqrt{-1})(x + a - a\sqrt{-1})$, on aura $2(m^2 - n)(-mp + n^2) - (mn - p)^2 = 0$, comme pour le système précédent.

Soit $x^3 + mx^2 + nx + p = (x + b)(x + a + b\sqrt{-1})(x + a - b\sqrt{-1})$, on aura $2a + b = m$, $a + b = n^{\frac{1}{2}}$ & $b(a^2 + b^2) = p$; donc $a = m - n^{\frac{1}{2}}$ & $b = 2n^{\frac{1}{2}} - m$; donc $(2n^{\frac{1}{2}} - m)(2m^2 - 6mn^{\frac{1}{2}} + 5n) = p$, ou $100n(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn + p)^2 = 0$.

Soit $x^3 + mx^2 + nx + p = (x + a)(x + b + a\sqrt{-1})(x + b - a\sqrt{-1})$, on aura $100n(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn + p)^2 = 0$, comme pour le système précédent.

Soit $x^3 + mx^2 + nx + p = (x + a)(x - b + a\sqrt{-1})(x - b - a\sqrt{-1})$, on aura $a - 2b = m$, $a - b = n^{\frac{1}{2}}$

& $a(a^2+b^2)=p$; donc $b=n^{\frac{1}{2}}-m$ & $a=2n^{\frac{1}{2}}-m^{\frac{1}{2}}$; donc $100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn+p)^2=0$, comme pour les deux systèmes précédens.

Soit $x^3+mx^2+nx+p=(x+b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$, on aura $3b=m$, $a^2+3b^2=n$ & $b(a^2+b^2)=p$; donc $2m^3-9mn+27p=0$.

Soit $x^3+mx^2+nx+p=(x+a)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$, on aura $2m^3-9mn+27p=0$, comme pour le système précédent.

Les deux systèmes $\left\{\begin{matrix}(x+a)(x+b)(x+b)\\(x+a)(x+a)(x+b)\end{matrix}\right\}$ sont distingués de tous ceux de leur formule par la condition $4(m^2-3n)(-3mp+n^2)-(mn-9p)^2=0$; mais il faut les distinguer l'un de l'autre, c'est-à-dire, qu'il faut trouver une fonction de m, de n & de p, la plus simple possible, qui soit toûjours plus grande que o dans l'un, & toûjours moindre que o dans l'autre.

Cette fonction sera $=0$, dans le cas $(x+a)(x+a)(x+a)$ commun aux deux systèmes.

La suite des fonctions de m, de n & de p, parmi lesquelles doit nécessairement se trouver celle dont il s'agit, est

Am^2+Bn,

$Am^3+Bmn+Cp$,

$Am^4+Bm^2n+Cmp+Dn^2$,

$Am^5+Bm^3n+Cm^2p+Dmn^2+Enp$,

$Am^6+Bm^4n+Cm^3p+Dm^2n^2+Emnp+Fn^3+Gp^2$,

&c.

Soit am^2+Bn la fonction qu'il faut trouver, si on y substitue $3a$ au lieu de m, & $3a^2$ au lieu de n, elle doit être $=0$; on aura donc $3A+B=0$.

Si on y ſubſtitue $a + 2b$ au lieu de m, & $2ab + b^2$ au lieu de n, ou, en faiſant $a = b + \mathcal{C}$, ſi on y ſubſtitue $3b + \mathcal{C}$ au lieu de m, & $3b^2 + 2\mathcal{C}b$ au lieu de n, elle doit être plus grande que 0; on aura donc

$$\begin{array}{llll} +9Ab^2 & +6A\mathcal{C}b & +A\mathcal{C}^2 > 0; \\ +3B & +2B \end{array}$$

donc $A > 0$.

Si on y ſubſtitue $2a + b$ au lieu de m, & $a^2 + 2ab$ au lieu de n, ou, en faiſant $a = b + \mathcal{C}$, ſi on y ſubſtitue $3b + 2\mathcal{C}$ au lieu de m, & $3b^2 + 4\mathcal{C}b + \mathcal{C}^2$, au lieu de n, elle doit être moindre que 0; on aura donc

$$\begin{array}{llll} +9Ab^2 & +12A\mathcal{C}b & +4A\mathcal{C}^2 < 0; \\ +3B & +4B & +B \end{array}$$

donc $4A + B < 0$, ou (en mettant pour B ſa valeur $-3A$) $4A - 3A < 0$, ou $A < 0$; par conſéquent, la fonction $Am^2 + Bn$ ne contient pas celle que nous cherchons.

Eſſayons la ſuivante $Am^3 + Bmn + Cp$.

En y ſubſtituant $3a$ au lieu de m, $3a^2$ au lieu de n, & a^3 au lieu de p, elle doit être $= 0$; on aura donc $27A + 9B + C = 0$.

En y ſubſtituant $3b + \mathcal{C}$ au lieu de m, $3b^2 + 2\mathcal{C}b$ au lieu de n, & $b^3 + \mathcal{C}b^2$ au lieu de p, elle doit être plus grande que 0; on aura donc

$$\begin{array}{llll} +27Ab^3 & +27A\mathcal{C}b^2 & +9A\mathcal{C}^2b & +A\mathcal{C}^3 > 0; \\ +9B & +9b & +2B \\ +C & +C \end{array}$$

donc $A > 0$, & $9A + 2B > 0$.

En y ſubſtituant $3b + 2\mathcal{C}$ au lieu de m, $3b^2 + 4\mathcal{C}b + \mathcal{C}^2$ au lieu de n, & $b^3 + 2\mathcal{C}b^2 + \mathcal{C}^2b$ au

lieu de p, elle doit être moindre que 0 ; on aura donc

$$\begin{array}{llll} +27Ab^3 & +54A\mathcal{C}b^2 & +36A\mathcal{C}^2b & +8A\mathcal{C}^3 < 0 ; \\ +9B & +18B & +11B & +2B \\ +C & +2C & +C & \end{array}$$

donc $8A + 2B < 0$, & $36A + 11B + C < 0$, ou (en mettant pour C sa valeur $-27A - 9B$) $9A + 2B < 0$.

De ce que $9A + 2B$ est > 0 & < 0, je conclus que $9A + 2B = 0$, ou que $B = -\frac{9}{2}A$. Soit $A = 2$, on aura $B = -9$, $C = 27$, & toutes les conditions seront remplies. Par conséquent, la condition pour le système $(x + a)\,(x + b)\,(x + b)$ est $2m^3 - 9mn + 27p > 0$; celle pour le système $(x + a)\,(x + a)\,(x + b)$ est $2m^3 - 9mn + 27p < 0$.

Les deux systèmes $\left\{\begin{matrix}(x+a)\,(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1}) \\ (x+b)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\end{matrix}\right\}$ sont distingués de tous ceux de leur formule par la condition $mn - p = 0$; mais il faut les distinguer l'un de l'autre, c'est-à-dire, qu'il faut trouver une fonction de m, de n & de p, qui soit $= 0$ dans le cas $(x + a)\,(x + a\sqrt{-1})\,(x - a\sqrt{-1})$ commun aux deux systèmes, qui soit plus grande que 0 dans le premier, & moindre que 0 dans le second.

Soit $Am^2 + Bn$ cette fonction ; en y substituant a au lieu de m, & a^2 au lieu de n, elle sera $= 0$; on aura donc $A + B = 0$.

En y substituant a ou $b + \mathcal{C}$ au lieu de m, & b^2 au lieu de n, elle sera plus grande que 0 ; on aura donc $+Ab^2 + 2A\mathcal{C}b + A\mathcal{C}^2 > 0$; donc $A > 0$.
$+B$

En

En y substituant b au lieu de m, & a^2 ou $b^2 + 2\mathcal{C}b + \mathcal{C}^2$ au lieu de n, elle sera moindre que 0; on aura donc $+Ab^2 + 2B\mathcal{C}b + B\mathcal{C}^2 < 0$; donc $B < 0$.
$+B$

Soit $A = 1$, on aura $B = -1$, & toutes les conditions seront remplies; par conséquent, la condition pour le premier système est $m^2 - n > 0$; celle pour le second est $m^2 - n < 0$.

Les deux systèmes $\begin{cases} (x+a)(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1}) \\ (x+b)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1}) \end{cases}$ sont distingués de tous ceux de leur formule, par la condition $2(m^2 - n)(-mp + n^2) - (mn - p)^2 = 0$; mais il faut les distinguer l'un de l'autre, c'est-à-dire, qu'il faut trouver une fonction de m, de n & de p, la plus simple possible, qui soit plus grande que 0 dans le premier, & moindre que 0 dans le second; cette fonction sera $= 0$ dans le cas $(x+a)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$ commun aux deux systèmes.

Je suppose que $Am^2 + Bn$ est la fonction dont il s'agit. En y substituant $3a$ au lieu de m, & $4a^2$ au lieu de n, elle sera $= 0$; on aura donc $9A + 4B = 0$.

En y substituant $a + 2b$ ou $3b + \mathcal{C}$ au lieu de m, $2ab + 2b^2$ ou $4b^2 + 2\mathcal{C}b$ au lieu de n, elle sera plus grande que 0; on aura donc $+9Ab^2 + 6A\mathcal{C}b + A\mathcal{C}^2 > 0$;
$+4B \quad +2B$
donc $A > 0$, $3A + B > 0$.

En y substituant $2a + b$ ou $3b + 2\mathcal{C}$ au lieu de m, $2a^2 + 2ab$ ou $4b^2 + 6\mathcal{C}b + 2\mathcal{C}^2$ au lieu de n, elle sera moindre que 0; on aura donc
$+9Ab^2 + 12A\mathcal{C}b + 4A\mathcal{C}^2 < 0$; donc $2A + B < 0$.
$+4B \quad +6B \quad +2B$

Soit $A = 4$, on aura $B = -9$, & toutes les conditions seront remplies; par conséquent, la condition pour le premier système est $4m^2 - 9n > 0$; celle pour le second est $4m^2 - 9n < 0$.

Les trois systèmes $\begin{cases} (x+b)\ (x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1}) \\ (x+a)\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1}) \\ (x+a)\ (x-b+a\sqrt{-1})\ (x-b-a\sqrt{-1}) \end{cases}$ sont distingués de tous ceux de leur formule, par la condition $100n(m^2+n)^2 - (2m^3 + 17mn + p)^2 = 0$; mais il faut les distinguer entr'eux.

Les deux premiers ont un cas commun $(x + a)\ (x + a + a\sqrt{-1})\ (x + a - a\sqrt{-1})$, & dès-lors on peut les distinguer l'un de l'autre par la méthode précédente.

Soit $Am^2 + Bn$ la fonction qui est plus grande que o dans le premier, & moindre que o dans le second; en y substituant $3a$ au lieu de m, & $4a^2$ au lieu de n, j'aurai $9A + 4B = 0$.

En y substituant $3b + 2\mathfrak{C}$ au lieu de m, & $4b^2 + 4\mathfrak{C}b + \mathfrak{C}^2$ au lieu de n, j'aurai $+9Ab^2 + 12A\mathfrak{C}b + 4A\mathfrak{C}^2 > 0$;
$+4B \quad +4B \quad +B$
donc $4A + B > 0$, & $3A + B > 0$.

En y substituant $3b + \mathfrak{C}$ au lieu de m, & $4b^2 + 4\mathfrak{C}b + \mathfrak{C}^2$ au lieu de n, j'aurai $+9Ab^2 + 6A\mathfrak{C}b + A\mathfrak{C}^2 < 0$;
$+4B \quad +4B \quad +B$
donc $A + B < 0$, & $3A + 2B < 0$.

Soit $A = 4$, on aura $B = -9$, & toutes les conditions seront remplies.

Par conséquent, pour le premier système, on aura $4m^2 - 9n > 0$, & pour le second, on aura $4m^2 - 9n < 0$.

Les deux derniers ont un cas commun $(x + a)$ $(x + a\sqrt{-1})$ $(x - a\sqrt{-1})$, & peuvent par conſéquent être diſtingués l'un de l'autre.

Soit $Am^2 + Bn$ la fonction qui eſt plus grande que o dans le premier, & moindre que o dans le ſecond; en y ſubſtituant a au lieu de m, & a^2 au lieu de n, on aura $A + B = 0$.

En y ſubſtituant $3b + \mathfrak{C}$ au lieu de m, & $4b^2 + 4\mathfrak{C}b + \mathfrak{C}^2$ au lieu de n, on aura $+ 9Ab^2 + 6A\mathfrak{C}b + A\mathfrak{C}^2 > 0$;
$+ 4B \quad + 4B \quad + B$
donc $9A + 4B > 0$, & $3A + 2B > 0$.

En y ſubſtituant $-b + \mathfrak{C}$ au lieu de m, & $\mathfrak{C}^2$ au lieu de n, ou, en faiſant $\mathfrak{C} = b + \gamma$, en y ſubſtituant γ au lieu de m, & $b^2 + 2\gamma b + \gamma^2$ au lieu de n, on aura $+ A\gamma^2 + 2B\gamma b + Bb^2 < 0$; donc $B < 0$.
$+ B$

Soit $B = -1$, on aura $A = 1$, & toutes les conditions ſeront remplies.

Par conſéquent, pour ce ſyſtème-ci,
$(x + a)$ $(x + b + a\sqrt{-1})$ $(x + b - a\sqrt{-1})$,
on aura $m^2 - n > 0$; & pour celui-ci,
$(x + a)$ $(x - b + a\sqrt{-1})$ $(x - b - a\sqrt{-1})$,
on aura $m^2 - n < 0$.

Les deux ſyſtèmes $\begin{cases} (x+b)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1}) \\ (x+a)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1}) \end{cases}$ ſont diſtingués de tous les autres par la condition $2m^3 - 9mn + 27p = 0$. Il faut les diſtinguer l'un de l'autre; je trouve $4m^2 - 9n < 0$ pour le premier, & $4m^2 - 9n > 0$ pour le ſecond.

En raſſemblant tout ce que nous venons de trouver, on aura la Table qui ſuit.

$$x^3+mx^2+nx+p=\begin{cases}
(x+a)\,(x+a)\,(x+a)\ldots\ldots\ldots\ldots & m^2-3n=0,\ m^3-27p=0.\\
(x+a)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\ldots\ldots & m^2-n=0,\ m^3-p=0.\\
(x+a)\,(x+a+a\sqrt{-1})\,(x+a-a\sqrt{-1}) & 4m^2-9n=0,\ 2m^3-27p=0.\\
\left.\begin{matrix}(x+a)\,(x+b)\,(x+b)\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (x+a)\,(x+a)\,(x+b)\ldots\ldots\ldots\ldots\end{matrix}\right\} & 4(m^2-3n)\,(-3mp+n^2)-(mn-9p)^2=0\begin{cases}2m^3-9mn+27p>0.\\ 2m^3-9mn+27p<0.\end{cases}\\
\left.\begin{matrix}(x+a)\,(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})\ldots\ldots\\ (x+b)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\ldots\ldots\end{matrix}\right\} & mn-p=0\begin{cases}m^2-n>0.\\ m^2-n<0.\end{cases}\\
\left.\begin{matrix}(x+a)\,(x+b+b\sqrt{-1})\,(x+b-b\sqrt{-1})\\ (x+b)\,(x+a+a\sqrt{-1})\,(x+a-a\sqrt{-1})\end{matrix}\right\} & 2(m^2-n)\,(-mn+n^2)-(mn-p)^2=0\begin{cases}4m^2-9n>0.\\ 4m^2-9n<0.\end{cases}\\
\left.\begin{matrix}(x+b)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})\\ (x+a)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})\\ (x+a)\,(x-b+a\sqrt{-1})\,(x-b-a\sqrt{-1})\end{matrix}\right\} & 100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn+p)^2=0\begin{cases}4m^2-9n>0.\\ 4m^2-9n<0,\ m^2-n>0.\\ m^2-n<0.\end{cases}\\
\left.\begin{matrix}(x+b)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})\\ (x+a)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})\end{matrix}\right\} & 2m^3-9mn+27p=0\begin{cases}4m^2-9n<0.\\ 4m^2-9n>0.\end{cases}
\end{cases}$$

Le système $(x+a)(x+b)(x+c)$ peut devenir $(x+a)(x+b)(x+b)$ en faisant $c=b$; auquel cas, on auroit $4(m^2-3n)(-3mp+n^2)-(mn-9p)^2=0$, & $2m^3-9mn+27p>0$.

Il peut devenir $(x+a)(x+a)(x+b)$ en faisant $a=b$; auquel cas, on auroit $4(m^2-3n)(-3mp+n^2)-(mn-9p)^2=0$, & $2m^3-9mn+27p<0$.

Donc tant que c sera $<b$ & $a>b$, cette fonction-ci $4(m^2-3n)(-3mp+n^2)-(mn-9p)^2$ sera plus grande ou moindre que 0. Je ne sais pas lequel des deux; mais je le saurai bien-tôt, & celle-ci $2m^3-9mn+27p$ sera tantôt plus grande & tantôt moindre que 0.

Soit $c=1$, $b=2$, $a=3$, on aura $m=2.3$, $n=11$, $p=2.3$; & en substituant dans la fonction $4(m^2-3n)(-3mp+n^2)-(mn-9p)^2$, on aura $2^2(2^2.3^2-3.11)(-3.2.3.2.3+(11)^2)-(2.3.11-3^2.2.3)^2$, ou $2^2.3(2^2.3-11)(-2^2.3^3+(11)^2)-2^2.3^2(11-3^2)^2$, ou $2^2.3(13-3.2^2)>0$.

La condition pour ce système-ci $(x+a)(x+b)(x+c)$ sera donc $4(m^2-3n)(-3mp+n^2)-(mn-9p)^2>0$.

Le système $(x+a)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$ peut devenir 1.° $(x+a)(x+b)(x+b)$ en faisant $c=0$; auquel cas, on auroit $4(m^2-3n)(-3mp+n^2)-(mn-9p)^2=0$, & $2m^3-9mn+27p>0$; donc, tant que c sera plus grand que 0, la fonction $4(m^2-3n)(-3mp+n^2)-(mn-9p)^2$ sera plus grande ou moindre que 0; & il est évident que c'est moindre que 0 qu'elle sera, puisque lorsqu'elle est plus grande que 0, la formule appartient au système précédent; ainsi

on aura $4(m^2 - 3n)(-3mp + n^2) - (mn - 9p)^2 < 0$.

2.° Il peut devenir $(x + a)(x + b + bV-1)(x + b - bV-1)$ en faisant $c = b$; auquel cas, on auroit $2(m^2 - n)(-mp + n^2) - (mn - p)^2 = 0$, & $4m^2 - 9n > 0$; donc, tant que c sera moindre que b, cette fonction-ci $2(m^2 - n)(-mp + n^2) - (mn - p)^2$ sera plus grande ou moindre que 0. Pour savoir lequel des deux, soit $c = 1$, $b = 2$, $a = 3$, on aura $m = 7$, $n = 17$, $p = 3.5$; & en substituant dans la fonction, on aura $2(7^2 - 17)(-7.3.5 + (17)^2) - (7.17 - 3.5)^2$ ou $2.2^5.2^3.23 - 2^6.(13)^2$, ou $2^6(2^3.23 - (13)^2) > 0$; ainsi on aura $2(m^2 - n)(-mp + n^2) - (mn - p)^2 > 0$.

3.° Il peut devenir $(x + a)(x + a + bV-1)(x + a - bV-1)$ en faisant $a = b$; auquel cas, on auroit $2m^3 - 9mn + 27p = 0$, & $4m^2 - 9n > 0$; donc, tant que a sera plus grand que b, la fonction $2m^3 - 9mn + 27p$ sera plus grande ou moindre que 0; nous avons déjà trouvé $2m^3 - 9mn + 27p > 0$.

Le système de conditions du système de facteurs $(x + a)(x + b + cV-1)(x + b - cV-1)$ est donc $4(m^2 - 3n)(-3mp + n^2) - (mn - 9p)^2 < 0$, $2(m^2 - n)(-mp + n^2) - (mn - 9p)^2 > 0$, $2m^3 - 9mn + 27p > 0$, $4m^2 - 9n > 0$.

Le système $(x+a)(x+c+bV-1)(x+c-bV-1)$ peut devenir 1.° $(x + a)(x + bV-1)(x - bV-1)$ en faisant $c = 0$; auquel cas, on auroit $mn - p = 0$, & $m^2 - n > 0$; donc, tant que c sera plus grand que 0, cette fonction-ci $mn - p$ sera plus grande ou moindre que 0.

Pour savoir lequel des deux, soit $c = 1$, $b = 2$,

$a = 3$; on aura $m = 5$, $n = 11$, $p = 3 \cdot 5$; & substituant dans la fonction, on aura $5 \cdot 11 - 3 \cdot 5 > 0$; par conséquent, une des conditions de ce système-ci est $mn - p > 0$.

2.° Il peut devenir $(x + a)(x + b + b\sqrt{-1})(x + b - b\sqrt{-1})$ en faisant $c = b$; auquel cas, on auroit $2(m^2 - n)(-mp + n^2) - (mn - p)^2 = 0$, & $4m^2 - 9n > 0$; donc tant que c sera moindre que b, cette fonction-ci $2(m^2 - n)(-mp + n^2) - (mn - p)^2$ sera plus grande ou moindre que 0.

Pour savoir lequel des deux, j'y substitue les valeurs précédentes de m, de n & de p; j'aurai $2(5^2 - 11)(-3 \cdot 5^2 + (11)^2) - (5 \cdot 11 - 3 \cdot 5)^2$, ou $2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 23 - 5^2 \cdot 2^6$, ou $2^3(7 \cdot 23 - 2^3 \cdot 5^2) < 0$; par conséquent, une des conditions de ce système-ci est $2(m^2 - n)(-mp + n^2) - (mn - p)^2 < 0$.

3.° Il peut devenir $(x + a)(x + b + a\sqrt{-1})(x + b - a\sqrt{-1})$ en faisant $a = b$; auquel cas, on auroit $100n(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn + p)^2 = 0$, $4m^2 - 9n < 0$, $m^2 - n > 0$; donc tant que a sera moindre que b, cette fonction-ci $100n(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn + p)^2$ sera plus grande ou moindre que 0.

J'y substitue les valeurs précédentes de m, de n & de p; j'aurai $2^2 \cdot 5^2 \cdot 11(5^2 + 11)^2 - (2 \cdot 5^3 + 17 \cdot 5 \cdot 11 + 3 \cdot 5)^2$,

ou $5^2(2^2 \cdot 11 \cdot 2^4 \cdot 3^4 - 2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^2)$,

ou $2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2(3^2 \cdot 11 - 2^2 \cdot 5^2) < 0$; par conséquent, une des conditions de ce système-ci est $100n(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn + p)^2 < 0$.

Le ſyſtème de conditions du ſyſtème de facteurs $(x+a)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$ eſt donc $mn-p>0$, $2(m^2-n)(-mp+n^2)-(mn-p)^2<0$, $100\,n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn+p)^2<0$, $m^2-n>0$.

Le ſyſtème $(x+a)(x+c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$ peut devenir 1.° $(x+a)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$ en faiſant $c=0$; auquel cas, on auroit $mn-p=0$ & $m^2-n>0$. Donc, tant que c ſera plus grand que 0, cette fonction-ci $mn-p$ ſera plus grande ou moindre que 0.

Pour ſavoir lequel des deux, ſoit $c=3$, $b=6$; $a=7$, on aura $m=1$, $n=3$, $p=3^2\cdot5\cdot7$; & en ſubſtituant ces valeurs dans la fonction, on aura $3-3^2\cdot5\cdot7<0$; par conſéquent, une des conditions de ce ſyſtème-ci eſt $mn-p<0$.

2.° Il peut devenir $(x+a)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$ en faiſant $a=b$; auquel cas, on auroit $100\,n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn+p)^2=0$, & $m^2-n<0$. Donc, tant que a ſera plus grand que b, cette fonction-ci $100\,n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn+p)^2$ ſera plus grande ou moindre que 0.

J'y ſubſtitue pour m, n & p les valeurs précédentes, & je trouve $2^2\cdot5^2\cdot3(1+3)^2-(2+17\cdot3+3^2\cdot5\cdot7)^2$, ou $2^2\cdot5^2\cdot3\cdot2^4-2^8\cdot(23)^2$, ou $2^6(3\cdot5^2-2^2\cdot(23)^2)<0$; par conſéquent, une des conditions de ce ſyſtème-ci eſt $100\,n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn+p)^2<0$.

Le ſyſtème de conditions du ſyſtème de facteurs $(x+a)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$ eſt donc $mn-p<0$, $100\,n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn+p)^2<0$.

Le

Le système $(x+b)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$ peut devenir 1.° $(x+b)(x+a)(x+a)$ en faisant $c=0$; auquel cas, on auroit $4(m^2-3n)(-3mp+n^2)-(mn-9p)^2=0$, & $2m^3-9mn+27p<0$; donc, tant que c sera plus grand que 0, la fonction $4(m^2-3n)(-3mp+n^2)-(mn-9p)^2$ sera plus grande ou moindre que 0; nous savons qu'elle sera moindre que 0; car lorsqu'elle est plus grande, la formule appartient au système $(x+a)(x+b)(x+c)$.

Une des conditions de ce système-ci est donc $4(m^2-3n)(-3mp+n^2)-(mn-9p)^2<0$.

2.° Il peut devenir $(x+b)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$ en faisant $c=b$; auquel cas, on auroit $100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn+p)^2=0$, & $4m^2-9n>0$. Donc, tant que c sera moindre que b, cette fonction-ci $100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn+p)^2$ sera plus grande ou moindre que 0.

Pour savoir lequel des deux, soit $c=1$, $b=2$; $a=3$, on aura $m=2^3$, $n=2.11$, $p=2^2.5$; & en substituant ces valeurs dans la fonction, on aura $2^2.5^2.2.11(2^6+2.11)^2-(2.2^9+17.2^3.2.11+2^2.5)^2$, ou $2^5.5^2.11(43)^2-2^4(2^8+2^2.11.17+5)^2$, ou $2^4(2.5^2.11.(43)^2-(1009)^2)<0$;

par conséquent, une des conditions de ce système-ci est $100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn+p)<0$.

3.° Il peut devenir $(x+a)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$ en faisant $a=b$; auquel cas, on auroit $2m^3-9mn+27p=0$, & $4m^2-9n>0$.

Donc, tant que a ſera plus grand que b, la fonction $2m^3 - 9mn + 27p$ ſera plus grande ou moindre que 0; nous l'avons trouvée dans le premier cas moindre que 0; par conſéquent, une des conditions de ce ſyſtème-ci eſt $2m^3 - 9mn + 27p < 0$.

Le ſyſtème de conditions du ſyſtème de facteurs $(x+b)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$ eſt donc $4(m^2 - 3n)(-3mp + n^2) - (mn - 9p)^2 < 0$, $100n(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn + p)^2 < 0$, $2m^3 - 9mn + 27p < 0$, $4m^2 - 9n > 0$.

Le ſyſtème $(x+b)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$ peut devenir 1.° $(x+b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$ en faiſant $c = 0$; auquel cas, on auroit $mn - p = 0$, & $m^2 - n < 0$; donc, tant que c ſera plus grand que 0, la fonction $mn - p$ ſera plus grande ou moindre que 0.

Soit $c = 1$, $b = 2$, $a = 3$, on aura $m = 2^2$, $n = 2.7$, $p = 2^2.5$; & en ſubſtituant dans la fonction, on aura $2^3.7 - 2^2.5$, ou $2^2(2.7 - 5) > 0$; par conſéquent, une des conditions de ce ſyſtème-ci eſt $mn - p > 0$.

2.° Il peut devenir $(x+b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$ en faiſant $c = b$; auquel cas, on auroit $2m^3 - 9mn + 27p = 0$, & $4m^2 - 9n < 0$; donc tant que c ſera moindre que b, la fonction $2m^3 - 9mn + 27p$ ſera plus grande ou moindre que 0.

Subſtituons-y les valeurs précédentes de m, de n & de p; nous aurons $2.2^6 - 3^2.2^3.7 + 3^3.2^2.5$, ou

$2^2(2^5 - 2.3^2.7 + 3^3.5) > 0$; par conséquent, une des conditions de ce système-ci est $2m^3 - 9mn + 27p > 0$.

3.° Il peut devenir $(x + a)(x + b + a\sqrt{-1})(x + b - a\sqrt{-1})$ en faisant $a = b$; auquel cas, on auroit $100n(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn + p)^2 = 0$, $4m^2 - 9n < 0$, $m^2 - n > 0$; donc tant que a sera plus grand que b, la fonction $100n(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn + p)^2$ sera plus grande ou moindre que 0.

Substituons-y les valeurs précédentes de m, de n & de p, & nous aurons

$$2^2.5^2.2.7(2^4 + 2.7)^2 - (2.2^6 + 17.2^2.2.7 + 2^2.5)^2,$$
$$\text{ou } 2^5.5^2.7.3^2.5^2 - 2^4.5^4.(11)^2,$$
$$\text{ou } 2^4.5^4(2.3^2.7 - (11)^2) > 0;$$

par conséquent, une des conditions de ce système est $100n(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn + p)^2 > 0$.

Le système de conditions du système de facteurs $(x + b)(x + c + a\sqrt{-1})(x + c - a\sqrt{-1})$ est donc $mn - p > 0$, $2m^3 - 9mn + 27p > 0$, $100n(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn + p)^2 > 0$, $4m^2 - 9n < 0$.

Le système $(x+b)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1})$ peut devenir 1.° $(x+b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$ en faisant $c = 0$; auquel cas, on auroit $mn - p = 0$ & $m^2 - n < 0$. Donc, tant que c sera plus grand que 0, cette fonction-ci $mn - p$ sera plus grande ou moindre que 0.

Soit $c = 1$, $b = 3$, $a = 4$, on aura $m = 1$, $n = 11$, $p = 3.17$; & en substituant dans la fonction, on aura $11 - 3.17 < 0$; par conséquent, une des conditions de ce système est $mn - p < 0$.

2.° Il peut devenir $(x + a)(x - b + a\sqrt{-1})(x - b - a\sqrt{-1})$ en faisant $a = b$; auquel cas, on auroit $100n(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn + p)^2 = 0$, & $m^2 - n < 0$. Donc, tant que a sera plus grand que b, cette fonction-ci $100n(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn + p)^2$ sera plus grande ou moindre que 0.

En y substituant les valeurs précédentes de m, de n & de p, on aura $2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 - 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^2$,

$$\text{ou } 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2 (11 - 2) > 0;$$

par conséquent, une des conditions de ce système-ci est $100n(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn + p)^2 > 0$.

Le système de conditions du système de facteurs $(x + b)(x - c + a\sqrt{-1})(x - c - a\sqrt{-1})$ est donc $mn - p < 0$, $100n(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn + p)^2 > 0$, $m^2 - n < 0$.

1.° Le système $(x + c)(x + a + b\sqrt{-1})(x + a - b\sqrt{-1})$ peut devenir $(x + b)(x + a + b\sqrt{-1})(x + a - b\sqrt{-1})$ en faisant $c = b$; auquel cas, on auroit $100n(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn + p)^2 = 0$, & $4m^2 - 9n > 0$.

Donc tant que c sera moindre que b, cette fonction-ci $100n(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn + p)^2$ sera plus grande ou moindre que 0.

Soit $c = 1$, $b = 2$, $a = 3$, on aura $m = 7$, $n = 19$, $p = 13$; & en ſubſtituant dans la fonction, on aura

$2^2 \cdot 5^2 \cdot 19\,(7^2 + 19)^2 - (2 \cdot 7^3 + 17 \cdot 7 \cdot 19 + 13)^2$,

ou $2^6 \cdot 5^2 \cdot (17)^2 \cdot 19 - 2^8 \cdot 5^2 \cdot (37)^2$,

ou $2^6 \cdot 5^2\,((17)^2 \cdot 19 - 2^2 \cdot (37)^2) > 0$;

par conſéquent, une des conditions de ce ſyſtème-ci eſt $100n\,(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn + p)^2 > 0$.

2.° Il peut devenir $(x + b)\,(x + a + a\sqrt{-1})\,(x + a - a\sqrt{-1})$ en faiſant $a = b$; auquel cas, on auroit $2\,(m^2 - n)\,(-mp + n^2) - (mn - p)^2 = 0$, & $4m^2 - 9n < 0$; donc, tant que a ſera plus grand que b, la fonction $2\,(m^2 - n)\,(-mp + n^2) - (mn - p)^2$ ſera plus grande ou moindre que 0.

Subſtituons-y pour m, n, p, les valeurs précédentes, nous aurons $2\,(7^2 - 19)\,(-7 \cdot 17 + (19)^2) - (7 \cdot 19 - 13)^2$,

ou $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot (11)^2 - 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2$,

ou $2^3 \cdot 5\,(3 \cdot (11)^2 - 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5) > 0$;

par conſéquent, une des conditions de ce ſyſtème-ci eſt $2\,(m^2 - n)\,(-mp + n^2) - (mn - p)^2 > 0$.

Le ſyſtème de conditions du ſyſtème de facteurs $(x + c)\,(x + a + b\sqrt{-1})\,(x + a - b\sqrt{-1})$ eſt donc $100n\,(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn + p)^2 > 0$, $2\,(m^2 - n)\,(-mp + n^2) - (mn - p)^2 > 0$.

1.° Le ſyſtème $(x + c)\,(x + b + a\sqrt{-1})\,(x + b - a\sqrt{-1})$ peut devenir $(x + b)\,(x + b + a\sqrt{-1})\,(x + b - a\sqrt{-1})$, en faiſant $c = b$; auquel cas, on auroit $2m^3 - 9mn + 27p = 0$, & $4m^2 - 9n < 0$;

donc, tant que c sera moindre que b, la fonction $2m^3 - 9mn + 27p$ sera plus grande ou moindre que 0.

Soit $c = 1$, $b = 2$, $a = 3$, on aura $m = 5$, $n = 17$, $p = 13$; & en substituant ces valeurs, on aura $2.5^3 - 3^2.5.17 + 3^3.13$, ou $601 - 765 < 0$; par conséquent, une des conditions de ce système-ci est $2m^3 - 9mn + 27p < 0$.

2.° Il peut devenir $(x + b)(x + a + a\sqrt{-1})(x + a - a\sqrt{-1})$ en faisant $a = b$; auquel cas, on auroit $2(m^2 - n)(-mp + n^2) - (mn - p)^2 = 0$, & $4m^2 - 9n < 0$; donc, tant que a sera plus grand que b, cette fonction-ci $2(m^2 - n)(-mp + n^2) - (mn - p)^2$ sera plus grande ou moindre que 0.

Substituons-y pour m, n & p les valeurs précédentes, & nous aurons $2(5^2 - 17)(-5.13 + (17)^2) - (5.17 - 13)^2$, ou $2.2^3.2^3.7 - 2^6.3^4$, ou $2^6(2^3.7 - 3^4) < 0$; par conséquent, une des conditions de ce système-ci est $2(m^2 - n)(-mp + n^2) - (mn - p)^2 < 0$.

Le système de conditions du système de facteurs $(x + c)(x + b + a\sqrt{-1})(x + b - a\sqrt{-1})$, est donc $2m^3 - 9mn + 27p < 0$,

$$2(m^2 - n)(-mp + n^2) - (mn - p)^2 < 0;$$

$$4m^2 - 9n < 0.$$

En rassemblant tout ce qui concerne la formule $x^3 + mx^2 + nx + p$, on aura la Table ci-jointe.

$$x^3 + mx^2 + nx + p =$$

$(x+a)\,(x+a)\,(x+a)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ m^2 - 3n = 0,\ m^3 - 27p = 0.$

$(x+a)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\ldots\ldots\ m^2 - n = 0,\ m^3 - p = 0.$

$(x+a)\,(x+a+a\sqrt{-1})\,(x+a-a\sqrt{-1})\ \ 4m^2 - 9n = 0,\ 2m^3 - 27p = 0.$

$(x+a)\,(x+b)\,(x+b)\ldots\ldots\ldots\ldots$
$(x+a)\,(x+a)\,(x+b)\ldots\ldots\ldots\ldots$
$\Big\}\ 4(m^2-3n)(n^2-3mp) - (mn-9p)^2 = 0 \begin{cases} 2m^3 - 9mn + 27p > 0. \\ 2m^3 - 9mn + 27p < 0. \end{cases}$

$(x+a)\,(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})\ldots\ldots$
$(x+b)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\ldots\ldots$
$\Big\}\ mn - p = 0 \begin{cases} m^2 - n > 0. \\ m^2 - n < 0. \end{cases}$

$(x+a)\,(x+b+b\sqrt{-1})\,(x+b-b\sqrt{-1})$
$(x+b)\,(x+a+a\sqrt{-1})\,(x+a-a\sqrt{-1})$
$\Big\}\ 2(m^2-n)(n^2-mp) - (mn-p)^2 = 0 \begin{cases} 4m^2 - 9n > 0. \\ 4m^2 - 9n < 0. \end{cases}$

$(x+b)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})$
$(x+a)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})$
$(x+a)\,(x-b+a\sqrt{-1})\,(x-b-a\sqrt{-1})$
$\Big\}\ 100n(m^2+n)^2 - (2m^3+17mn+p)^2 = 0 \begin{cases} 4m^2 - 9n > 0. \\ 4m^2 - 9n < 0,\ m^2 - n > 0. \\ m^2 - n < 0. \end{cases}$

$(x+b)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})$
$(x+a)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})$
$\Big\}\ 2m^3 - 9mn + 27p = 0 \begin{cases} 4m^2 - 9n < 0. \\ 4m^2 - 9n > 0. \end{cases}$

$(x+a)\,(x+b)\,(x+c)\ldots\ldots\ldots\ldots\ 4(m^2-3n)(n^2-3mp) - (mn-9p)^2 > 0.$

$(x+a)\,(x+b+c\sqrt{-1})\,(x+b-c\sqrt{-1})\ \ 4(m^2-3n)(n^2-3mp) - (mn-9p)^2 < 0,\ \ 2(m^2-n)(n^2-mp) - (mn-p)^2 > 0,\ \ 2m^3 - 9mn + 27p > 0,\ \ 4m^2 - 9n > 0.$

$(x+a)\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1})\ \ mn - p > 0,\ \ 2(m^2-n)(n^2-mp) - (mn-p)^2 < 0,\ \ 100n(m^2+n)^2 - (2m^3+17mn+p)^2 < 0,\ \ m^2 - n > 0.$

$(x+a)\,(x-c+b\sqrt{-1})\,(x-c-b\sqrt{-1})\ \ mn - p < 0,\ \ 100n(m^2+n)^2 - (2m^3+17mn+p)^2 < 0.$

$(x+b)\,(x+a+c\sqrt{-1})\,(x+a-c\sqrt{-1})\ \ 4(m^2-3n)(n^2-3mp) - (mn-9p)^2 < 0,\ \ 100n(m^2+n)^2 - (2m^3+17mn+p)^2 < 0,\ \ 2m^3 - 9mn + 27p < 0,\ \ 4m^2 - 9n >$

$(x+b)\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1})\ \ mn - p > 0,\ \ 2m^3 - 9mn + 27p > 0,\ \ 100n(m^2+n)^2 - (2m^3+17mn+p)^2 > 0,\ \ 4m^2 - 9n < 0.$

$(x+b)\,(x-c+a\sqrt{-1})\,(x-c-a\sqrt{-1})\ \ mn - p < 0,\ \ 100n(m^2+n)^2 - (2m^3+17mn+p)^2 > 0,\ \ m^2 - n < 0.$

$(x+c)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})\ \ 100n(m^2+n)^2 - 2m^3 + 17mn + p)^2 > 0,\ \ 2(m^2-n)(n^2-mp) - (mn-p)^2 > 0.$

$(x+c)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})\ \ 2m^3 - 9mn + 27p < 0,\ \ 2(m^2-n)(n^2-mp) - (mn-p)^2 < 0,\ \ 4m^2 - 9n < 0.$

Qu'il s'agisse, par exemple, de trouver les trois facteurs de $x^3 + x^2 + 3x + 5$, l'on aura $m = 1$, $n = 3$, $p = 5$, & l'on trouvera

$4(m^2 - 3n)(-3mp + n^2) - (mn - 9p)^2 < 0$,
$2(m^2 - n)(-mp + n^2) - (mn - p)^2 < 0$,
$100n(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn + p)^2 > 0$ *,
$2m^3 - 9mn + 27p > 0$,
$mn - p < 0$ *,
$m^2 - n < 0$ *,
$4m^2 - 9n < 0$.

D'où l'on conclura que $x^3 + x^2 + 3x + 5 = (x + b)(x - c + a\sqrt{-1})(x - c - a\sqrt{-1})$.

Soit $x^3 + mx^2 + nx - p = (x + a)(x + a)(x - b)$, on aura $m = 2a - b$, $n = a^2 - 2ab$, $p = a^2 b$; & en chassant a & b, on aura $4(m^2 - 3n)(3mp + n^2) - (mn + 9p)^2 = 0$.

Soit $x^3 + mx^2 + nx - p = (x - b)(x + a + b\sqrt{-1})(x + a - b\sqrt{-1})$, on aura $2a - b = m$, $a - b = n^{\frac{1}{2}}$, $b(a^2 + b^2) = p$; & en chassant a & b, on aura $100n(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn - p)^2 = 0$.

Soit $x^3 + mx^2 + nx - p = (x - a)(x + b + a\sqrt{-1})(x + b - a\sqrt{-1})$, on aura $2b - a = m$, $a - b = n^{\frac{1}{2}}$, $a(a^2 + b^2) = p$; donc $100n(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn - p)^2 = 0$, comme pour le système précédent.

Soit $x^3 + mx^2 + nx - p = (x - b)(x + b + a\sqrt{-1})(x + b - a\sqrt{-1})$, on aura $b = m$, $a^2 - b^2 = n$, $b(a^2 + b^2) = p$; donc $2m^3 + mn - p = 0$.

Soit $x^3 + mx^2 + nx - p = (x - b)(x + a + a\sqrt{-1})(x + a - a\sqrt{-1})$, on aura $2a - b = m$, $2a^2 - 2ab = n$, $2a^2 b = p$; donc $2(m^2 - n)(mp + n^2) - (mn + p)^2 = 0$.

Les deux systèmes $\begin{cases} (x-b)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1}) \\ (x-a)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1}) \end{cases}$ sont distingués de tous ceux de leur formule, par la condition $100\,n\,(m^2+n)^2 - (2m^3+17mn-p)^2 = 0$; mais il faut les distinguer l'un de l'autre. Ils peuvent devenir $(x-a)\,(x+a+a\sqrt{-1})\,(x+a-a\sqrt{-1})$, auquel cas on auroit $2m^3 - p = 0$; par conséquent, la fonction $2m^3 - p$ doit être > 0 dans l'un des deux systèmes, & < 0 dans l'autre.

Soit dans le premier système $b = 1$, $a = 2$, on aura $m = 3$, $p = 5$; & en substituant dans la fonction, on aura $2 \cdot 3^3 - 5 > 0$; on aura donc pour ce système-ci, $(x-b)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})$, $2m^3 - p > 0$;

& pour celui-ci,

$(x-a)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})$, on aura $2m^3 - p < 0$.

Dans le premier système

$(x-b)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})$, $m = 2a-b$, $p = b(a^2+b^2)$, ou en faisant $a = b+6$, $m = b+2\,6$, $p = 2b^3 + 2b^2 6 + b6^2$; en substituant ces valeurs de m & de p dans la fonction $2m^3 - p$, on aura $+2b^3 + 12b^2 6 + 24b6^2 + 16\,6^3 > 0$.

$-2 \quad -2 \quad -1$

Dans le second système

$(x-a)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})$, $m = 2b-a$, $p = a(a^2+b^2)$. Soit $a = b+6$, on aura $m = b-6$, $p = (b+6)(2b^2 + 2b6 + 6^2)$. Soit $b = 6+\gamma$, on aura $m = \gamma$, $p = (2\,6+\gamma)(5\,6^2 + 6\,6\gamma + 2\gamma^2)$; & en substituant dans la fonction $2m^3 - p$, on aura $+2\gamma^3 - 10\,6^3 + 17\,6^2\gamma - 10\,6\gamma^2 < 0$.

-2

En

En raſſemblant tout ce que nous venons de trouver, nous aurons

$$x^3+nx^2+nx-p=\begin{cases}(x+a)(x+a)(x-b)\ldots\ldots\ldots\ldots & 4(m^2-3n)(3mp+n^2)-(mn+9p)^2=0.\\ (x-b)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1}) & 100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn-p)^2=0\begin{cases}2m^3-p<0\\ 2m^3-p>0.\end{cases}\\ (x-a)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1}) & \\ (x-b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1}) & 2m^3+mn-p=0.\\ (x-b)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1}) & 2(m^2-n)(mp+n^2)-(mn+p)^2=0.\end{cases}$$

Le ſyſtème $(x + a)\,(x + b)\,(x - c)$ peut devenir celui-ci $(x + a)\,(x + a)\,(x - b)$ en faiſant $a = b$, & dans ce cas, on auroit la fonction $4(m^2 - 3n)(3mp + n^2) - (mn + 9p)^2 = 0$; donc, tant que a ſera plus grand que b, cette fonction ſera plus grande ou moindre que 0. Pour ſavoir lequel des deux, il ſuffit d'en faire un ſeul eſſai.

L'on a $m = a + b - c$, $n = ab - ac - bc$, $p = abc$. Soit $c = 3$, $b = 4$, $a = 17$, on aura $m = 2 \cdot 3^2$, $n = 5$, $p = 2^2 \cdot 3 \cdot 17$, & en ſubſtituant dans la fonction, on aura

$$2^2(2^2 \cdot 3^4 - 3 \cdot 5)(3 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 17 + 5^2) - (2 \cdot 3^2 \cdot 5 + 3^2 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 17)^2,$$

ou $2^2 \cdot 3(2^2 \cdot 3^3 - 5)(2^3 \cdot 3^4 \cdot 17 + 5^2) - 2^2 \cdot 3^4(5 + 2 \cdot 3 \cdot 17)^2$,

ou $2^2 \cdot 3[(103)(11041) - 27(107)^2] > 0$;

par conſéquent, la condition pour ce ſyſtème-ci eſt $4(m^2 - 3n)(3mp + n^2) - (mn + 9p)^2 > 0$.

Le calcul ſeroit beaucoup plus long, ſi l'on vouloit trouver la même choſe, ſans donner des valeurs particulières aux lettres a, b, c.

L'on feroit $a = b + \zeta$, $b = c + \gamma$; on auroit $a = c + \zeta + \gamma$, & en ſubſtituant ces valeurs, on auroit $m = c + \zeta + 2\gamma$, $n = -c^2 + \zeta\gamma + \gamma^2$, $p = c(c + \gamma)(c + \zeta + \gamma)$.

L'on feroit $\gamma^2 + \zeta\gamma = c^2 + \delta$, & on auroit $\zeta = \frac{c^2 - \gamma^2 + \delta}{\gamma}$; donc $m = \frac{c^2 + c\gamma + \gamma^2 + \delta}{\gamma}$, $n = \delta$, $p = \frac{c \cdot (c + \gamma)(c^2 + c\gamma + \delta)}{\gamma}$, & en ſubſtituant ces valeurs dans la fonction $4(m^2 - 3n)(3mp + n^2) - (mn + 9p)^2$, l'on trouveroit qu'elle eſt > 0.

Le système $(x-a)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$ peut devenir celui-ci,

$(x-a)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$, en faisant $a=b$; auquel cas, on auroit $100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn-p)^2=0$, & $2m^3-p<0$; donc, tant que a sera plus grand que b, cette fonction-ci, $100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn-p)^2$ sera plus ou moins grande que 0; il s'agit de savoir lequel des deux.

L'on a $m=2c-a$, $n=b^2+c^2-2ac$, $p=a(b^2+c^2)$. Soit $a=b+\alpha$, $b=c+\beta$, $2c=a+\gamma$, on aura $c=\alpha+\beta+\gamma$, $b=\alpha+2\beta+\gamma$, $a=2\alpha+2\beta+\gamma$; & en substituant pour a, b, c ces valeurs, on aura $m=\gamma$, $n=-2\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2-2\alpha\gamma$, $p=(2\alpha+2\beta+\gamma)(2\alpha^2+6\alpha\beta+5\beta^2+4\alpha\gamma+6\beta\gamma+2\gamma^2)$. Soit $\alpha=1$, $\gamma=1$, $\beta=4$; donc $c=6$, $b=10$, $a=11$; donc $m=1$, $n=4$, $p=1496$. Je substitue pour m, n, p ces valeurs dans la fonction $100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn-p)^2$, & je trouve $2^2.5^2.2^2.5^2-(2+2^2.17-2^3.187)^2<0$; par conséquent, le système de conditions pour ce système de facteurs-ci est $100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn-p)^2<0$, $2m^3-p<0$.

1.° Le système $(x-b)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$ peut devenir $(x+a)(x+a)(x-b)$ en faisant $c=0$, & on auroit la fonction $4(m^2-3n)(3mp+n^2)-(mn+9p)^2=0$; donc, tant que c sera >0, cette fonction sera plus ou moins grande que 0; & il est évident que c'est moindre que 0 qu'elle sera, car nous avons trouvé que lorsqu'elle est plus grande que 0, la formule appartient

à ce système-ci, $(x+a)(x+b)(x-c)$; on aura donc $4(m^2-3n)(3mp+n^2)-(mn+9p)^2<0$.

2.° Il peut devenir $(x-b)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$ en faisant $b=c$, & on auroit $100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn-p)^2=0$, $2m^3-p>0$; donc, tant que b sera plus grand que c, la fonction $100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn-p)^2$ sera plus ou moins grande que 0. L'on a $m=2a-b$, $n=a^2-2ab+c^2$, $p=b.(a^2+c^2)$. Soit $c=1$, $b=2$, $a=4$, on aura $m=6$, $n=1$, $p=2.17$; & en substituant dans la fonction, on aura

$$2^2.5^2(37)^2-(2.2^3.3^3+17.2.3-2.17)^2,$$

ou $2^2[(185)^2-(250)^2]<0$.

Le système de conditions pour le système de facteurs $(x-b)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$ est donc $4(m^2-3n)(3mp+n^2)-(mn+9p)^2<0$, $100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn-p)^2<0$, $2m^3-p>0$.

1.° Le système $(x-b)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$ peut devenir $(x-a)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$ en faisant $a=b$; auquel cas, on auroit $100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn-p)^2=0$, & $2m^3-p<0$; donc, tant que a sera plus grand que b, la fonction $100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn-p)^2$ sera plus grande ou moindre que 0. L'on a $m=2c-b$, $n=a^2-2bc+c^2$, $p=b.(a^2+c^2)$. Soit $c=2$, $b=3$, $a=4$; donc $m=1$, $n=2^3$, $p=2^2.3.5$. En substituant dans la fonction, on aura

$$2^2.5^2.2^3.3^4-(2+2^3.17-2^2.3.5)^2,$$

ou $2^2(2^3.3^4.5^2-3^4)>0$;

par conſéquent, une des conditions de ce ſyſtème-ci eſt $100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn-p)^2>0$.

2.° Il peut devenir $(x-b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$, en faiſant $c=b$; auquel cas, on auroit $2m^3+mn-p=0$; par conſéquent, tant que b ſera plus grand que c, la fonction $2m^3+mn-p$ ſera plus grande ou moindre que 0. Subſtituons-y pour m, n, p les valeurs précédentes, & nous trouverons que c'eſt <0 qu'elle eſt; par conſéquent, une des conditions de ce ſyſtème-ci eſt $2m^3+mn-p<0$, & cette condition rend inutile celle-ci, $2m^3-p<0$, que nous avions trouvée dans le premier cas.

Le ſyſtème de conditions eſt donc pour ce ſyſtème-ci $100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn-p)^2>0$, $2m^3+mn-p<0$.

1.° Le ſyſtème $(x-c)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$ peut devenir $(x-b)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$ en faiſant $c=b$; auquel cas, on auroit $100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn-p)^2=0$, & $2m^3-p>0$; donc, tant que c ſera moindre que b, la fonction $100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn-p)^2$ ſera plus grande ou moindre que 0. L'on a $m=2a-c$, $n=a^2-2ac+b^2$, $p=c.(a^2+b^2)$. Soit $c=1$, $b=2$, $a=3$; donc $m=5$, $n=7$, $p=13$. En ſubſtituant ces valeurs dans la fonction, on aura

$$2^2.5^2.7.(2^5)^2-(2.5^3+17.5.7-13)^2,$$

ou $2^{12}.5^2.7-2^{12}.(13)^2>0$;

par conſéquent, une des conditions de ce ſyſtème-ci eſt $100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn-p)^2>0$.

2.° Il peut devenir $(x - b)(x + a + a\sqrt{-1})(x + a - a\sqrt{-1})$, en faisant $a = b$; auquel cas, on auroit cette fonction-ci, $2(m^2 - n)(mp + n^2) - (mn + p)^2 = 0$; donc, tant que a sera plus grand que b, cette même fonction sera plus ou moins grande que 0. Substituons-y pour m, n, p les valeurs précédentes, & nous aurons $2(5^2 - 7)(5 \cdot 13 + 7^2) - (5 \cdot 7 + 13)^2$, ou $2^3 \cdot 3^2 \cdot 57 - 2^6 \cdot 3^2 > 0$.

Les conditions pour ce système-ci sont donc
$100n(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn - p)^2 > 0$,
$2(m^2 - n)(mp + n^2) - (mn + p)^2 > 0$,
$2m^3 - p > 0$.

1.° Le système $(x - c)(x + b + a\sqrt{-1})(x + b - a\sqrt{-1})$ peut devenir $(x - b)(x + b + a\sqrt{-1})(x + b - a\sqrt{-1})$ en faisant $c = b$; auquel cas, on auroit la fonction $2m^3 + mn - p = 0$; donc, tant que c sera moindre que b, cette fonction sera plus grande ou moindre que 0. L'on a $m = 2b - c$, $n = a^2 - 2bc + b^2$, $p = c(a^2 + b^2)$. Soit $c = 1$, $b = 2$, $a = 3$; donc $m = 3$, $n = 3^2$, $p = 13$; en substituant ces valeurs dans la fonction, l'on trouvera un reste > 0; d'où l'on conclura qu'une des conditions de ce système-ci est $2m^3 + mn - p > 0$.

2.° Il peut devenir $(x - b)(x + a + a\sqrt{-1})(x + a - a\sqrt{-1})$ en faisant $a = b$, & dans ce cas, on auroit la fonction $2(m^2 - n)(mp + n^2) - (mn + p)^2 = 0$; donc, tant que a sera plus grand que b, cette fonction sera plus ou moins grande que 0. Substituons-y les valeurs précédentes de m, de n & de p, nous aurons un reste < 0; d'où nous conclurons qu'une des conditions de ce système-ci est $2(m^2 - n)(mp + n^2) - (mn + p)^2 < 0$.

Au moyen de tout ce que nous venons de trouver, nous aurons

$$x^3 + mx^2 + nx - p = \left\{\begin{array}{ll}
(x+a)(x+a)(x-b) \ldots\ldots & 4(m^2 - 3n)(n^2 + 3mp) - (mn + 9p)^2 = 0; \\
\left.\begin{array}{l}(x-b)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1}) \\ (x-a)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})\end{array}\right\} & 100n(m^2+n)^2 - (2m^3 + 17mn - p)^2 = 0. \left\{\begin{array}{l} 2m^3 - p > 0; \\ 2m^3 - p < 0. \end{array}\right. \\
(x-b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1}) & 2m^3 + mn - p = 0. \\
(x-b)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1}) & 2(m^2 - n)(n^2 + mp) - (mn + p)^2 = 0. \\
(x+a)(x+b)(x-c) \ldots\ldots & 4(m^2 - 3n)(n^2 + 3mp) - (mn + 9p)^2 > 0; \\
(x-a)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1}) & \left\{\begin{array}{l} 100n(m^2+n)^2 - (2m^3 + 17mn - p)^2 < 0, \\ 2m^3 - p < 0. \end{array}\right. \\
(x-b)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1}) & \left\{\begin{array}{l} 4(m^2 - 3n)(n^2 + 3mp) - (mn + 9p)^2 < 0; \\ 100n(m^2+n)^2 - (2m^3 + 17mn - p)^2 < 0, \\ 2m^3 - p > 0. \end{array}\right. \\
(x-b)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1}) & \left\{\begin{array}{l} 100n(m^2+n)^2 - (2m^3 + 17mn - p)^2 > 0, \\ 2m^3 + mn - p < 0. \end{array}\right. \\
(x-c)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1}) & \left\{\begin{array}{l} 100n(m^2+n)^2 - (2m^3 + 17mn - p)^2 > 0, \\ 2(m^2 - n)(n^2 + mp) - (mn + p)^2 > 0, \\ 2m^3 - p > 0. \end{array}\right. \\
(x-c)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1}) & \left\{\begin{array}{l} 2m^3 + mn - p > 0, \\ 2(m^2 - n)(n^2 + mp) - (mn + p)^2 < 0. \end{array}\right.
\end{array}\right.$$

Soit $x^3 + mx^2 - nx + p = (x + a)(x - b)(x - b)$, on aura $4(m^2 + 3n)(-3mp + n^2) - (mn + 9p)^2 = 0$.

Soit $x^3 + mx^2 - nx + p = (x + a)(x - b + b\sqrt{-1})(x - b - b\sqrt{-1})$, on aura $2(m^2 + n)(-mp + n^2) - (mn + p)^2 = 0$.

Ce ſyſtème-ci $(x + a)(x - b)(x - c)$ peut devenir celui-ci $(x + a)(x - b)(x - b)$ en faiſant $c = b$; auquel cas, on auroit la fonction $4(m^2 + 3n)(-3mp + n^2) - (mn + 9p)^2 = 0$; donc, tant que c ſera moins grand que b, cette fonction ſera plus ou moins grande que 0. Je trouve que c'eſt plus grande que 0 qu'elle ſera ; on aura donc pour ce ſyſtème-ci $4(m^2 + 3n)(-3mp + n^2) - (mn + 9p)^2 > 0$.

1.° Le ſyſtème $(x + a)(x - b + c\sqrt{-1})(x - b - c\sqrt{-1})$ peut ſe changer en celui-ci $(x + a)(x - b)(x - b)$, en faiſant $c = 0$; auquel cas, on auroit la fonction $4(m^2 + 3n)(-3mp + n^2) - (mn + 9p)^2 = 0$; donc, tant que c ſera plus grand que 0, cette fonction ſera plus ou moins grande que 0 ; & il eſt évident que c'eſt moins grande que 0 qu'elle ſera, puiſque lorſqu'elle eſt plus grande que 0, la formule appartient au ſyſtème précédent ; ainſi on aura $4(m^2 + 3n)(-3mp + n^2) - (mn + 9p)^2 < 0$.

2.° Il peut devenir $(x + a)(x - b + b\sqrt{-1})(x - b - b\sqrt{-1})$ en faiſant $c = b$, & dans ce cas, on auroit la fonction $2(m^2 + 3n)(-mp + n^2) - (mn + p)^2 = 0$; donc, tant que c ſera moindre que b, cette fonction ſera plus ou moins grande que 0. Je trouve que c'eſt plus grande que 0 qu'elle ſera, & que par conſéquent la ſeconde condition de ce ſyſtème-ci eſt $2(m^2 - 3n)(-mp + n^2) - (mn + p)^2 > 0$.

Le

Le système $(x+a)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$ peut devenir $(x+a)(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1})$ en faisant $c = b$; & dans ce cas, on auroit la fonction $2(m^2-3n)(-mp+n^2)-(mn+p)^2 = 0$; donc, tant que c sera $< b$, cette même fonction sera plus ou moins grande que 0; & il est évident que pour distinguer ce système-ci du précédent, c'est moins grande que 0 qu'elle doit être, & que par conséquent la condition pour ce système-ci est $2(m^2-3n)(-mp+n^2)-(mn+p)^2 < 0$.

En rassemblant tout ce qui concerne la formule x^3+mx^2-nx+p, on aura

$$x^3+mx^2-nx+p = \begin{cases} (x+a)(x-b)(x-b)\ldots\ldots & 4(m^2+3n)(-3mp+n^2)-(mn+9p)^2 = 0. \\ (x+a)(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1}) & 2(m^2+n)(-mp+n^2)-(mn+p)^2 = 0; \\ \text{\textdagger\textdagger\textdagger} & \\ (x+a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots & 4(m^2+3n)(-3mp+n^2)-(mn+9p)^2 > 0. \\ (x+a)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1}) & \begin{cases} 4(m^2+3n)(-3mp+n^2)-(mn+9p)^2 < 0, \\ 2(m^2+n)(-mp+n^2)-(mn+p)^2 > 0. \end{cases} \\ (x+a)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1}) & 2(m^2+n)(-mp+n^2)-(mn+p)^2 < 0. \end{cases}$$

Les systèmes de conditions des systèmes de facteurs de la formule x^3-mx^2+nx+p, sont les mêmes que ceux des systèmes correspondans de la formule x^3+mx^2+nx-p; ainsi on aura la Table suivante.

$$x^3-mx^2+nx+p=$$

$$\begin{cases}
(x-a)\,(x-a)\,(x+b)\ldots\ldots\ldots\ldots\ 4(m^2-3n)\,(n^2+3mp)-(mn+9p)^2=0.\\
(x+b)\,(x-a+b\sqrt{-1})\,(x-a-b\sqrt{-1})\\
(x+a)\,(x-b+a\sqrt{-1})\,(x-b-a\sqrt{-1})\end{cases}\ 100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn-p)^2=0.\ \begin{cases}2m^3-p>0.\\2m^3-p<0.\end{cases}$$

$$(x+b)\,(x-b+a\sqrt{-1})\,(x-b-a\sqrt{-1})\ \ 2m^3+mn-p=0.$$

$$(x+b)\,(x-a+a\sqrt{-1})\,(x-a-a\sqrt{-1})\ \ 2(m^2-n)(n^2+mp)-(mn+p)^2=0.$$

$$\begin{cases}
(x-a)\,(x-b)\,(x+c)\ldots\ldots\ldots\ldots\ 4(m^2-3n)\,(n^2+3mp)-(mn+9p)^2>0.\\
(x+a)\,(x-c+b\sqrt{-1})\,(x-c-b\sqrt{-1})\end{cases}\ \begin{cases}100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn-p)^2<0,\\2m^3-p<0.\end{cases}$$

$$(x+b)\,(x-a+c\sqrt{-1})\,(x-a-c\sqrt{-1})\ \begin{cases}4(m^2-3n)\,(n^2+3mp)-(mn+9p)^2<0.\\100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn-p)^2<0,\\2m^3-p>0.\end{cases}$$

$$(x+b)\,(x-c+a\sqrt{-1})\,(x-c-a\sqrt{-1})\ \begin{cases}100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn-p)^2>0,\\2m^3+mn-p<0.\end{cases}$$

$$(x+c)\,(x-a+b\sqrt{-1})\,(x-a-b\sqrt{-1})\ \begin{cases}100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn-p)^2>0,\\2(m^2-n)\,(n^2+mp)-(mn+p)^2>0,\\2m^3-p>0.\end{cases}$$

$$(x+c)\,(x-b+a\sqrt{-1})\,(x-b-a\sqrt{-1})\ \begin{cases}2m^3+mn-p>0,\\2(m^2-n)\,(n^2+mp)-(mn+p)^2<0.\end{cases}$$

Soit $x^3 + mx^2 - nx - p = (x + a)(x + a)(x - a)$, on aura $m^2 - n = 0$, & $m^3 - p = 0$.

Soit $x^3 + mx^2 - nx - p = (x + a)(x + b)(x - b)$, on aura $mn - p = 0$.

Soit $x^3 + mx^2 - nx - p = (x + a)(x - a)(x + b)$, on aura, ainſi que dans le cas précédent, $mn - p = 0$.

Soit $x^3 + mx^2 - nx - p = (x - a)(x + b)(x + b)$, on aura $4(m^2 + 3n)(3mp + n^2) - (-mn + 9p) = 0$.

Soit $x^3 + mx^2 - nx - p = (x + a)(x + a)(x - b)$, on aura, comme dans le cas précédent, $4(m^2 + 3n)(3mp + n^2) - (-mn + 9p)^2 = 0$.

Soit $x^3 + mx^2 - nx - p = (x - a)(x + b + b\sqrt{-1})(x + b - b\sqrt{-1})$, on aura $2(m^2 + n)(mp + n^2) - (-mn + p)^2 = 0$.

Soit $x^3 + mx^2 - nx - p = (x - a)(x + a + b\sqrt{-1})(x + a - b\sqrt{-1})$, on aura $2m^3 - mn - p = 0$.

Les deux ſyſtèmes $(x + a)(x + b)(x - b)$ & $(x + a)(x - a)(x + b)$ ſont diſtingués de tous ceux de leur formule par la condition $mn - p = 0$; mais il faut les diſtinguer entr'eux, c'eſt-à-dire, qu'il faut trouver une fonction de m, de n & de p, qui ſoit plus grande que 0 dans le premier, moindre que 0 dans le ſecond, & qui ſoit $= 0$ dans le cas $(x + a)(x + a)(x - a)$ commun aux deux ſyſtèmes.

Soit $Am^2 + Bn$ la fonction dont il s'agit; en y ſubſtituant a au lieu de m, & a^2 au lieu de n, on aura $A + B = 0$.

En y ſubſtituant a au lieu de m, & b^2 au lieu de n, ou, en faiſant $a = b + \alpha$, en y ſubſtituant $b^2 + 2b\alpha + \alpha^2$ au lieu de m, & b^2 au lieu de n, on aura

$$+ Ab^2 + 2Ab\alpha + A\alpha^2 > 0; \text{ donc } A > 0.$$
$$+ B$$

En y substituant b au lieu de m, & a^2 au lieu de n, ou, en faisant $a = b + \alpha$, en y substituant b au lieu de m, & $b^2 + 2b\alpha + \alpha^2$ au lieu de n, on aura

$$+ Ab^2 + 2Bb\alpha + B\alpha^2 < 0 ; \text{ donc } B < 0.$$
$$+ Bb^2$$

Soit $A = 1$, on aura $B = -1$; les conditions seront remplies, & on aura pour le premier système $m^2 - n > 0$, & pour le second, $m^2 - n < 0$.

Les deux systèmes $(x - a)(x + b)(x + b)$ & $(x + a)(x + a)(x - b)$ sont distingués de tous ceux de leur formule par la condition $4(m^2 + 3n)(3mp + n^2) - (-mn + 9p)^2 = 0$; mais il faut les distinguer l'un de l'autre. Soit $Am^2 + Bn$ la fonction qui est > 0 dans le premier, < 0 dans le second, & $= 0$ dans le cas $(x + a)(x + a)(x - a)$ commun aux deux systèmes. En substituant dans cette fonction a au lieu de m, & a^2 au lieu de n, on aura $A + B = 0$.

En y substituant $2b - a$ au lieu de m, & $2ab - b^2$ au lieu de n, ou, en faisant $a = b + \alpha$, en y substituant $b - \alpha$ au lieu de m, & $b^2 + 2b\alpha$ au lieu de n, ou, en faisant encore $b = \alpha + \zeta$, en y substituant ζ au lieu de m, $3\alpha^2 + 4\alpha\zeta + \zeta^2$ au lieu de n, on aura

$$+ Ab^2 + 4B\alpha\zeta + 3B\alpha^2 > 0 ; \text{ donc } B > 0.$$
$$+ B$$

En y substituant $2a - b$ au lieu de m, & $2ab - a^2$ au lieu de n, ou, en faisant $a = b + \alpha$, en y substituant $b + 2\alpha$ au lieu de m, & $(b + \alpha).(b - \alpha)$ au lieu de n, ou, en faisant $b = \alpha + \zeta$, en y substituant $3\alpha + \zeta$ au lieu de m, & $(2\alpha + \zeta).\zeta$ au lieu

de n, on aura $+ A\mathfrak{C}^2 + 6Aa\mathfrak{C} + 9Aa^2 < 0$;
$+ B \quad + 2B$

donc $3A + B < 0$, $A < 0$.

Soit $B = 1$, on aura $A = -1$, & toutes les conditions seront remplies; on aura donc pour le premier système $m^2 - n < 0$, & pour le second, $m^2 - n > 0$.

1.° Le système $(x + a)(x + b)(x - c)$ peut devenir $(x + a)(x + a)(x - b)$ en faisant $a = b$, auquel cas, on auroit $4(m^2 + 3n)(3mp + n^2) - (-mn + 9p)^2 = 0$; & $m^2 - n > 0$; donc, tant que a sera plus grand que b, cette fonction-ci $4(m^2 + 3n)(3mp + n^2) - (-mn + 9p)^2$ sera plus grande ou moindre que 0.

Soit $c = 3$, $b = 4$, $a = 6$, on aura $m = 7$, $n = 2 \cdot 3$, $p = 2^3 \cdot 3^2$, & en substituant dans la fonction, on aura

$$2^2(7^2 + 2 \cdot 3^2)(3 \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 3^2 + 2^2 \cdot 3^2) - (2^3 \cdot 3^4 - 2 \cdot 3 \cdot 7)^2,$$

ou $2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2(7^2 + 2 \cdot 3^2)(2 \cdot 3 \cdot 7 + 1) - 2^2 \cdot 3^2(2^2 \cdot 3^3 - 7)^2$,

ou $2^2 \cdot 3^2[2^2(67)(43) - (101)^2] > 0$;

par conséquent, dans ce système-ci, on aura toûjours $4(m^2 + 3n)(3mp + n^2) - (-mn + 9p)^2 > 0$.

2.° Il peut devenir $(x + a)(x + b)(x - b)$ en faisant $c = b$; auquel cas, on auroit $mn - p = 0$, & $m^2 - n > 0$; donc, tant que c sera moindre que b, la fonction $mn - p$ sera plus grande ou moindre que 0. En y substituant les valeurs précédentes de m, de n & de p, on aura $2 \cdot 3 \cdot 7 - 2^3 \cdot 3^2$, ou $2 \cdot 3(7 - 2^2 \cdot 3) < 0$; par conséquent, dans ce système-ci on aura toûjours $mn - p < 0$, & son système de conditions sera $4(m^2 + 3n)(3mp + n^2) - (-mn + 9p)^2 > 0$, $mn - p < 0$, $m^2 - n > 0$.

Le ſyſtème $(x+a)(x-b)(x+c)$ peut devenir $(x+a)(x+b)(x-b)$ en faiſant $c=b$; il peut devenir $(x+a)(x-a)(x+b)$ en faiſant $a=b$; d'où il ſuit que la fonction m^2-n ſera tantôt plus grande & tantôt moindre que 0, & que la fonction $mn-p$ ſera plus grande ou moindre que 0; il eſt évident que c'eſt plus grande que 0 qu'elle ſera, ſans quoi, les nombres m, n, p pourroient ſatisfaire en même temps au ſyſtème qui précède & à celui-ci; or il faut que les ſyſtèmes de conditions d'une formule quelconque, ſoient tels que, quels que ſoient les nombres $m, n, p, q, r, s, t,$ &c. ils ſatisfaſſent toûjours à l'un d'eux, & qu'ils ne ſatisfaſſent jamais qu'à un ſeul; on aura donc toûjours dans ce ſyſtème-ci $mn-p>0$.

1.° Le ſyſtème $(x-a)(x+b)(x+c)$ peut devenir $(x-a)(x+b)(x+b)$ en faiſant $c=b$; auquel cas, on auroit $4(m^2+3n)(3mp+n^2)-(-mn+9p)^2=0$, & $m^2-n<0$.

Donc, tant que c ſera moindre que b, cette fonction-ci $4(m^2+3n)(3mp+n^2)-(-mn+9p)^2$ ſera plus grande ou moindre que 0. L'on a $m=-a+b+c$, $n=ab+ac-bc$, $p=abc$. Soit $c=2$, $b=3$, $a=4$; donc $m=1$, $n=2.7$, $p=2^3.3$; en ſubſtituant ces valeurs dans la fonction, on aura $2^2(1+2.3.7)(2^3.3^2+2^2.7^2)-(3^2.2^3.3-2.7)^2$, ou $2^2(43.268-(101)^2)>0$; on aura donc toûjours dans ce ſyſtème-ci $4(m^2+3n)(3mp+n^2)-(-mn+9p)^2>0$.

2.° Il peut devenir $(x+a)(x-a)(x+b)$ en faiſant $a=b$; auquel cas, on auroit $mn-p=0$, & $m^2-n<0$.

Le système de conditions pour ce système de facteurs-ci, est donc $4(m^2+3n)(3mp+n^2)-(-mn+9p)^2>0$, $mn-p<0$, $m^2-n<0$.

1.° Le système $(x-a)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$ peut devenir $(x-a)(x+b)(x+b)$ en faisant $c=0$; on auroit $4(m^2+3n)(3mp+n^2)-(-mn+9p)^2=0$, & $m^2-n<0$; donc, tant que c sera plus grand que 0, la fonction $4(m^2+3n)(3mp+n^2)-(-mn+9p)^2$ sera plus grande ou moindre que 0. L'on a $m=2b-a$, $n=2ab-b^2-c^2$, $p=a(b^2+c^2)$.

Soit $c=1$, $b=2$, $a=3$, donc $m=1$, $n=7$, $p=3\cdot5$; & en substituant dans la fonction, on aura

$$2^2(1+3\cdot7)(3^2\cdot5+7^2)-(3^3\cdot5-7)^2,$$

ou $2^2\cdot22\cdot94-(128)^2$,

ou $2^4(11\cdot47-2^{10})<0$;

par conséquent, dans ce système-ci on aura toûjours $4(m^2+3n)(3mp+n^2)-(-mn+9p)^2<0$.

2.° Il peut devenir $(x-a)(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$ en faisant $c=b$; auquel cas, on auroit la fonction $2(m^2+n)(mp+n^2)-(-mn+p)^2=0$; donc tant que c sera moindre que b, cette fonction sera plus grande ou moindre que 0.

Substituons-y les valeurs précédentes de m, de n & de p, nous aurons $2(1+7)(3\cdot5+7^2)-(3\cdot5-7)^2$, ou $2^2\cdot2^3\cdot2^6-2^6>0$; par conséquent, dans ce système-ci on aura toûjours $2(m^2+n)(mp+n^2)-(-mn+p)^2>0$.

3.° Il peut devenir $(x-a)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$ en faisant $a=b$; & dans ce cas, on auroit la fonction $2m^3-mn-p=0$; donc, tant

que a ſera plus grand que b, cette fonction ſera plus grande ou moindre que 0. En y ſubſtituant les valeurs précédentes de m, de n & de p, on aura $2 - 7 - 3 \cdot 5 < 0$; par conſéquent, dans ce ſyſtème-ci on aura toûjours $2m^3 - mn - p < 0$.

Son ſyſtème de conditions ſera donc enfin
$4(m^2 + 3n)(3mp + n^2) - (-mn + 9p)^2 < 0$,
$2(m^2 + n)(mp + n^2) - (-mn + p)^2 > 0$,
$2m^3 - mn - p < 0$, $m^2 - n < 0$.

Le ſyſtème $(x-a)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$ peut devenir $(x-a)(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$ en faiſant $c = b$; & dans ce cas, on auroit la fonction $2(m^2 + n)(mp + n^2) - (-mn + p)^2 = 0$; donc, tant que c ſera moindre que b, cette fonction ſera toûjours plus grande ou toûjours moindre que 0. L'on a $m = 2c - a$, $n = 2ac - b^2 - c^2$, $p = a(b^2 + c^2)$.

Soit $a = b + \alpha$, $b = c + \beta$, $2c = a + \gamma$, $2ac - b^2 - c^2 = \delta$; donc $c = \alpha + \beta + \gamma$, $b = \alpha + 2\beta + \gamma$, $a = 2\alpha + 2\beta + \gamma$; donc $2\alpha^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma = \beta^2 + \delta$. Soit $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$, on aura $\delta = 5$; donc $c = 3$, $b = 4$, $a = 5$; donc $m = 1$, $n = 5$, $p = 5^3$; en ſubſtituant ces valeurs de m, de n & de p, j'aurai $2(1 + 5)(5^3 + 5^2) - (5^3 - 5)^2$, ou $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 2 \cdot 3 - 5^2 \cdot 2^6 \cdot 3^2$, ou $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2(1 - 2^3) < 0$; par conſéquent, dans ce ſyſtème-ci, on aura toûjours $2(m^2 + n)(mp + n^2) - (-mn + p)^2 < 0$.

1.° Le ſyſtème $(x-b)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$ peut devenir $(x-b)(x+a)(x+a)$ en faiſant $c = 0$; auquel cas, on auroit $4(m^2 + 3n)(3mp + n^2) - (-mn + 9p)^2 = 0$, & $m^2 - n > 0$.

Donc

donc, tant que c sera plus grand que 0, cette fonction-ci $4(m^2 + 3n)(3mp + n^2) - (-mn + 9p)^2$ sera toûjours plus grande ou toûjours moindre que 0.

L'on a $m = 2a - b$, $n = 2ab - a^2 - c^2$, $p = b(a^2 + c^2)$. Soit $a = b + \alpha$, $b = c + \mathfrak{C}$, $2ab - a^2 - c^2 = \mathfrak{D}$. En substituant pour a & b leurs valeurs dans la dernière équation, j'aurai $2c\mathfrak{C} + \mathfrak{C}^2 = \alpha^2 + \mathfrak{D}$. Soit $c = 1$, $\mathfrak{C} = 1$, $\alpha = 1$, j'aurai $\mathfrak{D} = 2$, $b = 2$, $a = 3$; donc $m = 2^2$, $n = 2$, $p = 2^2.5$. En substituant dans la fonction, j'aurai

$2^2(2^4 + 3.2)(3.2^2.2^2.5 + 2^2) - 3^2.2^2.5 - 2^3)^2$,

ou $2^4(2.11.61 - (43)^2) < 0$;

par conséquent, dans ce système-ci, on aura toûjours $4(m^2 + 3n)(3mp + n^2) - (-mn + 9p)^2 < 0$.

2.° Il peut devenir $(x - a)(x + a + b\sqrt{-1})(x + a - b\sqrt{-1})$ en faisant $a = b$; auquel cas, on auroit la fonction $2m^3 - mn - p = 0$; donc, tant que a sera plus grand que b, cette fonction sera toûjours plus grande ou toûjours moindre que 0.

Mettons-y les valeurs de m, de n & de p, qui précèdent, nous aurons $2^7 - 2^3 - 2^2.5$, ou $2^2(2^5 - 2 - 5) > 0$; par conséquent, dans ce système-ci, on aura toûjours $2m^3 - mn - p > 0$.

Son système de conditions sera donc

$4(m^2 + 3n)(3mp + n^2) - (-mn + 9p)^2 < 0$,

$2m^3 - mn - p > 0$, $m^2 - n > 0$.

En mettant à côté de chaque système de facteurs de la formule $x^3 + mx^2 - nx - p$, le système de conditions qui lui appartient, on aura

$[x^3 + mx^2 - nx - p]$

$(x+a)\,(x+a)\,(x-a)$ ..... $m^2 - n = 0$, $m^3 - p = 0$.

$(x+a)\,(x+b)\,(x-b)$ .....
$(x+a)\,(x-a)\,(x+b)$ ..... $mn - p = 0$. $\begin{cases} m^2 - n > 0. \\ m^2 - n < 0. \end{cases}$

$(x-a)\,(x+b)\,(x+b)$ .....
$(x+a)\,(x+a)\,(x-b)$ ..... $4(m^3+3n)(n^2+3mp) - (-mn+9p)^2 = 0$. $\begin{cases} m^2 - n < 0. \\ m^2 - n > 0. \end{cases}$

$(x-a)\,(x+b+b\sqrt{-1})\,(x+b-b\sqrt{-1})$ $2(m^2+n)(n^2+mp) - (-mn+p)^2 = 0$.

$(x-a)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})$ $2m^3 - mn - p = 0$.

$(x+a)\,(x+b)\,(x-c)$ ..... $\begin{cases} 4(m^3+3n)(n^2+3mp) - (-mn+9p)^2 > 0, \\ mn - p < 0, \quad m^2 - n > 0. \end{cases}$

$(x+a)\,(x-b)\,(x+c)$ ..... $mn - p > 0$.

$(x-a)\,(x+b)\,(x+c)$ ..... $\begin{cases} 4(m^3+3n)(n^2+3mp) - (-mn+9p)^2 > 0, \\ mn - p < 0, \quad m^2 - n < 0. \end{cases}$

$(x-a)\,(x+b+c\sqrt{-1})\,(x+b-c\sqrt{-1})$ $\begin{cases} 4(m^3+3n)(n^2+3mp) - (-mn+9p)^2 < 0, \\ 2(m^2+n)(n^2+mp) - (-mn+p)^2 > 0, \\ 2m^3 - mn - p < 0, \quad m^2 - n < 0. \end{cases}$

$(x-a)\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1})$ $2(m^2+n)(n^2+mp) - (-mn+p)^2 < 0$.

$(x-b)\,(x+a+c\sqrt{-1})\,(x+a-c\sqrt{-1})$ $\begin{cases} 4(m^3+3n)(n^3+3mp) - (-mn+9p)^2 < 0, \\ 2m^3 - mn - p > 0, \quad m^2 - n > 0. \end{cases}$

Les systèmes de conditions des systèmes de facteurs de la formule $x^3 - mx^2 + nx - p$ sont les mêmes que ceux des systèmes correspondans de la formule $x^3 + mx^2 + nx + p$.

Ceux de la formule $x^3 - mx^2 - nx + p$ sont les mêmes que ceux de la formule $x^3 + mx^2 - nx - p$.

Ceux de la formule $x^3 - mx^2 - nx - p$ sont les mêmes que ceux de la formule $x^3 + mx^2 - nx + p$.

$$x^3 - mx^2 + nx - p =$$

$$\begin{cases}
(x-a)\,(x-a)\,(x-a)\ldots\ldots\ldots\ldots & m^2-3n=0,\ m^3-27p=0.\\
(x-a)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\ldots\ldots & m^2-n=0,\ m^3-p=0.\\
(x-a)\,(x-a+a\sqrt{-1})\,(x-a-a\sqrt{-1}) & 4m^2-9n=0,\ 2m^3-27p=0.\\
\left.\begin{matrix}(x-a)\,(x-b)\,(x-b)\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (x-a)\,(x-a)\,(x-b)\ldots\ldots\ldots\ldots\end{matrix}\right\} & 4(m^2-3n)\,(n^2-3mp)-(mn-9p)^2=0\begin{cases}2m^3-9mn+27p>0.\\ 2m^3-9mn+27p<0.\end{cases}\\
\left.\begin{matrix}(x-a)\,(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})\ldots\ldots\\ (x-b)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\ldots\ldots\end{matrix}\right\} & mn-p=0\begin{cases}m^2-n>0.\\ m^2-n<0.\end{cases}\\
\left.\begin{matrix}(x-a)\,(x-b+b\sqrt{-1})\,(x-b-b\sqrt{-1})\\ (x-b)\,(x-a+a\sqrt{-1})\,(x-a-a\sqrt{-1})\end{matrix}\right\} & 2(m^2-n)\,(n^2-mp)-(mn-p)^2=0\begin{cases}4m^2-9n>0.\\ 4m^2-9n<0.\end{cases}\\
\left.\begin{matrix}(x-b)\,(x-a+b\sqrt{-1})\,(x-a-b\sqrt{-1})\\ (x-a)\,(x-b+a\sqrt{-1})\,(x-b-a\sqrt{-1})\\ (x-a)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})\end{matrix}\right\} & 100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn+p)^2=0\begin{cases}4m^2-9n>0.\\ 4m^2-9n<0,\ m^2-n>0.\\ m^2-n<0.\end{cases}\\
\left.\begin{matrix}(x-b)\,(x-b+a\sqrt{-1})\,(x-b-a\sqrt{-1})\\ (x-a)\,(x-a+b\sqrt{-1})\,(x-a-b\sqrt{-1})\end{matrix}\right\} & 2m^3-9mn+27p=0\begin{cases}4m^2-9n<0.\\ 4m^2-9n>0.\end{cases}\\
\text{\textbf{***}} & \\
(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\ldots\ldots\ldots\ldots & 4(m^2-3n)\,(n^2-3mp)-(mn-9p)^2>0.\\
(x-a)\,(x-b+c\sqrt{-1})\,(x-b-c\sqrt{-1}) & 4(m^2-3n)\,(n^2-3mp)-(mn-9p)^2<0,\ \ 2(m^2-n)\,(n^2-mp)-(mn-p)^2>0,\ \ 2m^3-9mn+27p>0,\ \ 4m^2-9n>0.\\
(x-a)\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1}) & mn-p>0,\ \ 2(m^2-n)\,(n^2-mp)-(mn-p)^2<0,\ \ 100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn+p)^2<0.\\
(x-a)\,(x-c+b\sqrt{-1})\,(x-c-b\sqrt{-1}) & mn-p<0,\ \ 100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn+p)^2<0.\\
(x-b)\,(x-a+c\sqrt{-1})\,(x-a-c\sqrt{-1}) & 4(m^2-3n)\,(n^2-3mp)-(mn-9p)^2<0,\ \ 100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn+p)^2<0,\ \ 2m^3-9mn+27p<0,\ \ 4m^2-9n>0.\\
(x-b)\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1}) & mn-p<0,\ \ 100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn+p)^2>0,\ \ m^2-n<0.\\
(x-b)\,(x-c+a\sqrt{-1})\,(x-c-a\sqrt{-1}) & mn-p>0,\ \ 2m^3-9mn+27p>0,\ \ 100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn+p)^2>0,\ \ 4m^2-9n<0.\\
(x-c)\,(x-a+b\sqrt{-1})\,(x-a-b\sqrt{-1}) & 100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn+p)^2>0,\ \ 2(m^2-n)\,(n^2-mp)-(mn-p)^2>0.\\
(x-c)\,(x-b+a\sqrt{-1})\,(x-b-a\sqrt{-1}) & 2m^3-9mn+27p<0,\ \ 2(m^2-n)\,(n^2-mp)-(mn-p)^2<0,\ \ 4m^2-9n<0.
\end{cases}$$

$(x+a)(x-a)(x-a)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots m^2-n=0,\ n^3-p=0.$

$(x+a)(x-b)(x-b)\ldots\ldots\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l}4(m^2+3n)(n^2+3mp)-(-mn+9p)^2=0.\\ m^2-n<0.\end{array}\right.\left\{\begin{array}{l}m^2-n<0.\\ m^2-n>0.\end{array}\right.$

$(x+b)(x-a)(x-a)\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(x-a)(x-b)(x+b)\ldots\ldots\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l}m^2-n>0.\\ mn-p=0.\\ m^2-n<0.\end{array}\right.$

$(x+a)(x-a)(x-b)\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(x+a)(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1})\ 2(m^3+n)(n^2+mp)-(-mn+9p)^2=0.$

$(x+a)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})\ 2n^3-mn-p=0.$

$x^3-mx^2-nx+p=$

$(x+a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l}4(m^2+3n)(n^2+3mp)-(-mn+9p)^2>0,\\ mn-p<0,\ m^2-n<0.\end{array}\right.$

$(x-a)(x+b)(x-c)\ldots\ldots\ldots\ldots\ mn-p>0.$

$(x-a)(x-b)(x+c)\ldots\ldots\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l}4(m^2+3n)(n^2+3mp)-(-mn+9p)^2>0,\\ mn-p<0,\ m^2-n>0.\end{array}\right.$

$(x+a)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})\left\{\begin{array}{l}4(m^2-3n)(n^2+3mp)-(-mn+9p)^2<0,\\ 2n^3-mn-p<0,\ m^2-n<0.\end{array}\right.\left\{\begin{array}{l}4(m^2-3n)(n^2+3mp)-(-mn+9p)^2>0,\\ 2n^3-mn-p>0,\ m^2-n<0.\end{array}\right.$

$(x+a)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})\ 2(m^3+n)(n^2+mp)-(-mn+p)^2<0.$

$(x+b)(x-a+c\sqrt{-1})(x-a-c\sqrt{-1})\left\{\begin{array}{l}4(m^2+3n)(n^2+3mp)-(-mn+9p)^2<0,\\ 2n^3-mn-p>0,\ m^2-n>0.\end{array}\right.$

$x^3+mx^2-nx+p=$

$(x+a)(x-b)(x-b)\ldots\ldots 4(m^2+3n)(n^2-3mp)-(mn+9p)^2=0$

$(x+a)(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1})\ 2(m^2+n)(n^2-mp)-(mn+p)^2=0.$

$(x+a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots 4(m^2+3n)(n^2-3mp)-(mn+9p)^2>0.$

$(x+a)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})$ $\begin{cases} 4(m^2+3n)(n^2-3mp)-(mn+9p)^2<0, \\ 2(m^2+n)(n^2-mp)-(mn+p)^2>0. \end{cases}$

$(x+a)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})\ 2(m^2+n)(n^2-mp)-(mn+p)^2<0.$

$x^3-mx^2-nx-p=$

$(x-a)(x+b)(x+b)\ldots\ldots 4(m^2+3n)(n^2-3mp)-(mn+9p)^2=0,$

$(x-a)(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})\ 2(m^2+n)(n^2-mp)-(mn+p)^2=0.$

$(x-a)(x+b)(x+c)\ldots\ldots 4(m^2+3n)(n^2-3mp)-(mn+9p)^2>0.$

$(x-a)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$ $\begin{cases} 4(m^2+3n)(n^2-3mp)-(mn+9p)^2<0, \\ 2(m^2+n)(n^2-mp)-(mn+p)^2>0. \end{cases}$

$(x-a)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})\ 2(m^2+n)(n^2-mp)-(mn+p)^2<0.$

$x^3+mx^2+p=\ (x+a)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$

$x^3+mx^2-p=$

$(x-a)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})\ 2m^3-p=0.$

$(x+a)(x+a)(x-b)\ldots\ldots 4m^3-27p=0.$

$(x+a)(x+b)(x-c)\ldots\ldots 4m^3-27p>0.$

$(x-a)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})\ 2m^3-p<0.$

$(x-b)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})\ 4m^3-27p<0,\ 2m^3-p>0.$

$x^3-mx^2+p=$

$(x+a)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})\ 2m^3-p=0.$

$(x-a)(x-a)(x+b)\ldots\ldots 4m^3-27p=0.$

$(x-a)(x-b)(x+c)\ldots\ldots 4m^3-27p>0.$

$(x+a)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})\ 2m^3-p<0.$

$(x+b)(x-a+c\sqrt{-1})(x-a-c\sqrt{-1})\ 4m^3-27p<0,\ 2m^3-p>0.$

$x^3-mx^2-p=\ (x-a)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$

$$x^3 + nx + p = \begin{cases} (x+a)\ (x-b+a\sqrt{-1})\ (x-b-a\sqrt{-1})\ldots 100n^3 - p^2 = 0. \\ \&c. \\ (x+a)\ (x-c+b\sqrt{-1})\ (x-c-b\sqrt{-1})\ldots 100n^3 - p^2 < 0. \\ (x+b)\ (x-c+a\sqrt{-1})\ (x-c-a\sqrt{-1})\ldots 100n^3 - p^2 > 0. \end{cases}$$

$$x^3 - nx + p = \begin{cases} (x+a)\ (x-b)\ (x-b)\ldots\ldots 4n^3 - 27p^2 = 0. \\ (x+a)\ (x-b+b\sqrt{-1})\ (x-b-b\sqrt{-1})\ldots 2n^3 - p^2 = 0. \\ \&c. \\ (x+a)\ (x-b)\ (x-c)\ldots\ldots 4n^3 - 27p^2 < 0. \\ (x+a)\ (x-b+c\sqrt{-1})\ (x-b-c\sqrt{-1}) \begin{cases} 4n^3 - 27p^2 < 0. \\ 2n^3 - p^2 > 0. \end{cases} \\ (x+a)\ (x-c+b\sqrt{-1})\ (x-c-b\sqrt{-1})\ldots 2n^3 - p^2 < 0. \end{cases}$$

$$x^3 + nx - p = \begin{cases} (x-a)\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})\ldots 100n^3 - p^2 = 0. \\ \&c. \\ (x-a)\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})\ldots 100n^3 - p^2 < 0. \\ (x-b)\ (x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})\ldots 100n^3 - p^2 > 0. \end{cases}$$

$$x^3 - nx - p = \begin{cases} (x-a)\ (x+b)\ (x+b)\ldots\ldots 4n^3 - 27p^2 = 0. \\ (x-a)\ (x+b+b\sqrt{-1})\ (x+b-b\sqrt{-1})\ldots 2n^3 - p^2 = 0. \\ \&c. \\ (x-a)\ (x+b)\ (x+c)\ldots\ldots 4n^3 - 27p^2 > 0. \\ (x-a)\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1}) \begin{cases} 4n^3 - 27p^2 < 0. \\ 2n^3 - p^2 > 0. \end{cases} \\ (x-a)\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})\ldots 2n^3 - p^2 < 0. \end{cases}$$

$$x^3 + p = (x+a)\ (x-c+b\sqrt{-1})\ (x-c-b\sqrt{-1})$$

$$x^3 - p = (x-a)\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$$

Quatrième Degré.

$(x+a)(x+a)(x+a)(x+a) = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4 =$ 1.ere formule.

$(x+a)(x+a)(x+a)(x-a) = x^4 + 2ax^3 - 2a^3x - a^4 =$ 29.me

$(x+a)(x+a)(x-a)(x-a) = x^4 - 2a^2x^2 - a^4 =$ 48.me

Comme mon deſſein n'eſt pas d'épuiſer cette méthode-ci, mais ſeulement de la faire entendre, je vais me borner aux équations dans leſquelles $m = 0$; on aura

$$x^4+nx^2+px+q = \begin{cases} (x+b)(x+b)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1}) \\ (x+a)(x+c)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1}) \\ (x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1}) \\ \text{\&c\&c} \\ (x+a)(x+d)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1}) \\ (x+b)(x+d)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1}) \\ (x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})(x+b+c\sqrt{-1})(+b-c\sqrt{-1}) \\ (x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1})(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1}) \end{cases}$$

$$x^4+nx^2+px-q = \begin{cases} (x+a)(x-b)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1}) \\ (x+a)(x-b)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1}) \\ (x+a)(x-c)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1}) \\ (x+a)(x-c)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1}) \\ (x+b)(x-c)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1}) \\ \text{\&c\&c} \\ (x+a)(x-e)(x-d+b\sqrt{-1})(x-d-b\sqrt{-1}) \\ (x+a)(x-d)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1}) \\ (x+b)(x-c)(x-d+a\sqrt{-1})(x-d-a\sqrt{-1}) \\ (x+b)(x-d)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1}) \end{cases}$$

$$x^4+nx^2-px+q=$$

$(x-b)(x-b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-c)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$
$(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1})(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$

$(x-a)(x-d)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-d)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$
$(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})$
$(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$

$$x^4-nx^2+px+q=$$

$(x+a)(x+a)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x-b)(x+c)$
$(x+a)(x+a)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$
$(x+b)(x+b)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+c)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+c)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+c)(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1})$
$(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$

$(x+a)(x-b)(x-c)(x+d)$
$(x+a)(x+c)(x-b+d\sqrt{-1})(x-b-d\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+d)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+d)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})$
$(x+b)(x+d)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1})$
$(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$
$(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$

$$x^4+nx^2-px-q=$$

$$(x-a)(x+b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$$
$$(x-a)(x+b)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$$
$$(x-a)(x+c)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$$
$$(x-a)(x+c)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$$
$$(x-b)(x+c)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$$

$$(x-a)(x+c)(x+d+b\sqrt{-1})(x+d-b\sqrt{-1})$$
$$(x-a)(x+d)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$$
$$(x-b)(x+c)(x+d+a\sqrt{-1})(x+d-a\sqrt{-1})$$
$$(x-b)(x+d)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$$

$$x^4-nx^2+px-q=$$

$$(x+a)(x-b)(x-b)(x-b)$$
$$(x+a)(x-b)(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1})$$
$$(x+a)(x-b)(x-b)(x-c)$$
$$(x+a)(x-b)(x-c)(x-c)$$
$$(x+a)(x-b)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})$$
$$(x+a)(x-c)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$$
$$(x+a)(x-c)(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1})$$
$$(x+a)(x-b)(x-c+c\sqrt{-1})(x-c-c\sqrt{-1})$$
$$(x+a)(x-c)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})$$
$$(x+a)(x-b)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$$

$$(x+a)(x-b)(x-c)(x-d)$$
$$(x+a)(x-b)(x-c+d\sqrt{-1})(x-c-d\sqrt{-1})$$
$$(x+a)(x-b)(x-d+c\sqrt{-1})(x-d-c\sqrt{-1})$$
$$(x+a)(x-c)(x-b+d\sqrt{-1})(x-b-d\sqrt{-1})$$
$$(x+a)(x-c)(x-d+b\sqrt{-1})(x-d-b\sqrt{-1})$$
$$(x+a)(x-d)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})$$
$$(x+a)(x-d)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$$

x^4-

$x^4 - nx^3 - px + q =$

$(x-a)(x-a)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x+b)(x-c)$
$(x-a)(x-a)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-c)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-c)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-c)(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$
$(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$

$(x-a)(x+b)(x+c)(x-d)$
$(x-a)(x-c)(x+b+d\sqrt{-1})(x+b-d\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-d)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-d)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-d)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$
$(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x-a+c\sqrt{-1})(x-a-c\sqrt{-1})$
$(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})$

$x^4 - nx^3 - px - q =$

$(x-a)(x+b)(x+b)(x+b)$
$(x-a)(x+b)(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x+b)(x+c)$
$(x-a)(x+b)(x+c)(x+c)$
$(x-a)(x+b)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+c)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+c)(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x+c+c\sqrt{-1})(x+c-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+c)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$

$(x-a)(x+b)(x+c)(x+d)$
$(x-a)(x+b)(x+c+d\sqrt{-1})(x+c-d\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x+d+c\sqrt{-1})(x+d-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+c)(x+b+d\sqrt{-1})(x+b-d\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+c)(x+d+b\sqrt{-1})(x+d-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+d)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+d)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$

$$x^4 + nx^2 + q = \begin{cases} (x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1}) \\ \text{ou} \\ (x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\,(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1}) \\ (x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})\,(x-b+a\sqrt{-1})\,(x-b-a\sqrt{-1}) \end{cases}$$

$$x^4 + nx^2 - q = (x+b)\,(x-b)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})$$

$$x^4 - nx^2 + q = \begin{cases} (x+a)\,(x+a)\,(x-a)\,(x-a) \\ \text{ou} \\ (x+a)\,(x-a)\,(x+b)\,(x-b) \\ (x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})\,(x-a+b\sqrt{-1})\,(x-a-b\sqrt{-1}) \end{cases}$$

$$x^4 - nx^2 - q = (x+a)\,(x-a)\,(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})$$

$$x^4 + px + q = \begin{cases} (x+b)\,(x+b)\,(x-b+a\sqrt{-1})\,(x-b-a\sqrt{-1}) \\ (x+a)\,(x+c)\,(x-b+a\sqrt{-1})\,(x-b-a\sqrt{-1}) \\ \text{ou} \\ (x+a)\,(x+d)\,(x-c+b\sqrt{-1})\,(x-c-b\sqrt{-1}) \\ (x+b)\,(x+d)\,(x-c+a\sqrt{-1})\,(x-c-a\sqrt{-1}) \\ (x-b+a\sqrt{-1})\,(x-b-a\sqrt{-1})\,(x+b+c\sqrt{-1})\,(x+b-c\sqrt{-1}) \end{cases}$$

$$x^4 + px - q = \begin{cases} (x+a)\,(x-c)\,(x-c+b\sqrt{-1})\,(x-c-b\sqrt{-1}) \\ \text{ou} \\ (x+a)\,(x-c)\,(x-d+b\sqrt{-1})\,(x-d-b\sqrt{-1}) \\ (x+a)\,(x-d)\,(x-c+b\sqrt{-1})\,(x-c-b\sqrt{-1}) \end{cases}$$

$$x^4 - px + q = \begin{cases} (x-b)\,(x-b)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1}) \\ (x-a)\,(x-c)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1}) \\ \text{ou} \\ (x-a)\,(x-d)\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1}) \\ (x-b)\,(x-d)\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1}) \\ (x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})\,(x-b+c\sqrt{-1})\,(x-b-c\sqrt{-1}) \end{cases}$$

$$x^4 - px - q = \begin{cases} (x-a)\,(x+c)\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1}) \\ \text{ou} \\ (x-a)\,(x+c)\,(x+d+b\sqrt{-1})\,(x+d-b\sqrt{-1}) \\ (x-a)\,(x+d)\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1}) \end{cases}$$

$$x^4 + q = \ldots\ (x+a+a\sqrt{-1})\,(x+a-a\sqrt{-1})\,(x-a+a\sqrt{-1})\,(x-a-a\sqrt{-1})$$

$$x^4 - q = \ldots\ (x+a)\,(x-a)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})$$

I.

Soit $x^4 + nx^2 + px + q = (x + b)(x + b)(x - b + a\sqrt{-1})(x - b - a\sqrt{-1})$; donc $a^2 - 2b^2 = n$, $2a^2b = p$, & $b^2(a^2 + b^2) = q$; donc $a^2 = n + 2b^2$, $2nb + 2^2b^3 = p$, $nb^2 + 3b^4 = q$; donc $2^4n^4q - 2^2n^3p^2 - 2^7n^2q^2 + 2^4.3^2np^2q - 3^3p^4 + 2^8q^3 = 0$.

Soit $x^4 + nx^2 + px + q = (x + a)(x + c)(x - b + a\sqrt{-1})(x - b - a\sqrt{-1})$; donc $a + c - 2b = 0$, $a^2 + b^2 - 2ab + ac - 2bc = n$, $(a + c)(a^2 + b^2) - 2abc = p$, $ac.(a^2 + b^2) = q$; donc $c = 2b - a$, $2ab - 3b^2 = n$, $4a^2b - 4ab^2 + 2b^3 = p$, $a(2b - a)(a^2 + b^2) = q$; donc $a = \frac{n + 3b^2}{2b}$, $5b^4 + 4nb^2 + n^2 = pb$, $(3b^4 - 2nb^2 - n^2)(13b^4 + 2.3nb^2 + n^2) = 2^4qb^4$; donc $b^4 = \frac{-2^2nb^2 + pb - n^2}{5}$,

$2^5.5.11npb^3 + (2^4.11n^3 - 2^6.5^2nq - 3.5.13p^2)b^2 + 2^2p(3.13n^2 + 2^2.5^2q)b + 2^2n^2(41n^2 - 2^2.5^2q) = 0$;

donc $2^8.5^4n^{12} + 2^{12}.5^2.7n^{10}q + 2^9.3^2.5^2n^9p^2 + 2^{13}.3.241n^8q^2 + 2^{11}.8453n^7p^2q - 2^5.3.26231n^6p^4 + 2^{16}.5^2.7n^5q^3 + 2^{13}.5.923n^5p^2q^2 + 2^{16}.5^4n^4q^4 - 2^9.38389n^4p^4q - 2^{15}.5^4n^3p^2q^3 + 2^5.186157n^3p^6 + 2^9.5^2.431n^2p^4q^2 + 2^7.3^2.5.13.31np^6q - 3^3.(13)^3p^8 + 2^{12}.5^4p^4q^3 = 0$.

Soit $x^4 + nx^2 + px + q = (x - b + a\sqrt{-1})(x - b - a\sqrt{-1})(x + b + b\sqrt{-1})(x - b - b\sqrt{-1})$; donc $a^2 - b^2 = n$, $2a^2b - 2b^3 = p$, $2b^2(a^2 + b^2) = q$; donc $a^2 = b^2 + n$, $2nb = p$, $2b^2(2b^2 + n) = q$; donc $b = \frac{p}{2n}$; donc $2^2n^4q - 2n^3p^2 - p^4 = 0$.

Le système $(x + a)(x + d)(x - c + b\sqrt{-1})(x - c - b\sqrt{-1})$ peut devenir $(x + a)(x + c)(x - b + a\sqrt{-1})(x - b - a\sqrt{-1})$ en faisant $a = b$; auquel cas, on auroit la fonction $2^8 \cdot 5^4 n^{12} +$ &c. $= 0$; donc, tant que a sera $> b$, cette fonction sera toûjours plus grande ou toûjours moindre que 0.

Soit $d = 2$, $c = 11$, $b = 2 \cdot 3^2$, $a = 2^2 \cdot 5$, on aura $n = 1$, $p = 2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 11$, $q = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 89$; & en substituant ces valeurs dans la fonction, l'on aura un reste < 0; d'où on conclura que la condition pour ce système-ci est $2^8 \cdot 5^4 n^{12} +$ &c. < 0.

Le système $(x + b)(x + d)(x - c + a\sqrt{-1})(x - c - a\sqrt{-1})$ peut devenir 1.° $(x + b)(x + b)(x - b + a\sqrt{-1})(x - b - a\sqrt{-1})$ en faisant $d = c = b$; auquel cas, on auroit la fonction $2^4 n^4 q -$ &c. $= 0$; donc, tant que d sera $< c$, & $c < b$, cette fonction sera toûjours plus grande ou toûjours moindre que 0.

Soit $d = 1$, $c = 2$, $b = 3$, $a = 4$, on aura $n = 7$, $p = 2^2 \cdot 17$, $q = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$; & en substituant ces valeurs dans la fonction, on aura un reste négatif; d'où l'on conclura qu'une des conditions de ce système-ci est $2^4 n^4 q -$ &c. < 0.

Il peut devenir 2.° $(x + a)(x + c)(x - b + a\sqrt{-1})(x - b - a\sqrt{-1})$ en faisant $a = b$; auquel cas, on auroit la fonction $2^8 \cdot 5^4 n^{12} +$ &c. $= 0$; donc, tant que a sera $> b$, cette fonction sera toûjours plus grande ou toûjours moindre que 0; mais lorsqu'elle est moindre que 0, la formule appartient au système précédent: donc, c'est toûjours plus grande que 0 qu'elle sera; on aura donc pour seconde condition de ce système-ci $2^8 \cdot 5^4 n^{12} +$ &c. > 0.

Le ſyſtème $(x - b + a\sqrt{-1})(x - b - a\sqrt{-1})(x + b + c\sqrt{-1})(x + b - c\sqrt{-1})$ peut devenir 1.° $(x + b)(x + b)(x - b + a\sqrt{-1})(x - b - a\sqrt{-1})$ en faiſant $c = 0$; auquel cas, on auroit la fonction 2^4n^4q — &c. $= 0$; donc, tant que c ſera > 0, cette fonction ſera toûjours plus grande ou toûjours moindre que 0.

Soit $c = 1$, $b = 2$, $a = 3$, on aura $n = 2$, $p = 2^5$, $q = 5 \cdot 13$; & en ſubſtituant dans la fonction, on aura un reſte poſitif ; d'où l'on conclura qu'une des conditions de ce ſyſtème-ci eſt 2^4n^4q — &c. > 0.

Il peut devenir 2.° $(x + b + b\sqrt{-1})(x + b - b\sqrt{-1})(x - b + a\sqrt{-1})(x - b - a\sqrt{-1})$ en faiſant $c = b$; auquel cas, on auroit la fonction 2^2n^4q — &c. $= 0$; donc, tant que c ſera moindre que b, cette fonction ſera toûjours plus grande ou toûjours moindre que 0.

En y ſubſtituant pour n, p, q, les valeurs précédentes, on aura un reſte négatif, & l'on conclura que la ſeconde condition pour ce ſyſtème-ci eſt 2^2n^4q — &c. < 0.

Le ſyſtème $(x - c + a\sqrt{-1})(x - c - a\sqrt{-1})(x + c + b\sqrt{-1})(x + c - b\sqrt{-1})$ peut devenir $(x + b + b\sqrt{-1})(x + b - b\sqrt{-1})(x - b + a\sqrt{-1})(x - b - a\sqrt{-1})$ en faiſant $c = b$; auquel cas, on auroit la fonction 2^2n^4q — &c. $= 0$; donc, tant que c ſera moindre que b, cette fonction ſera toûjours plus grande ou toûjours moindre que 0 ; & il eſt évident que c'eſt plus grande que 0 qu'elle ſera, ſans quoi, les nombres qui ſatisferoient au ſyſtème précédent, ſatisferoient auſſi à celui-ci ; la condition pour ce ſyſtème-ci eſt donc 2^2n^4q — &c. > 0.

II.

Soit $x^4 + nx^2 + px - q = (x+a)(x-b)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$, on aura $2^2(13)^2n^3 - 3^2p^2 = 0$, $2.5n^2 - 3q = 0$.

Soit $x^4 + nx^2 + px - q = \begin{cases} (x+a)(x-b)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1}) \\ (x+a)(x-c)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1}) \end{cases}$ en changeant le signe de q dans l'équation que nous avons trouvée pour le second système de la première formule, on aura $2^8.5^4n^{12} - 2^{12}.5^2.7n^{10}q + 2^9.3^2.5^2n^9p^2 + 2^{13}.3.241n^8q^2 - 2^{11}.8453n^7p^2q - 2^5.3.26231n^6p^4 - 2^{16}.5^2.7n^6q^3 + 2^{13}.5.923n^5p^2q^2 + 2^{16}.5^4n^4q^4 + 2^9.38389n^4p^4q + 2^{15}.5^4n^3p^2q^3 + 2^5.186157n^3p^6 + 2^9.5^2.431n^2p^4q^2 - 2^7.3^2.5.13.31np^6q - 3^3(13)^3p^8 - 2^{12}.5^4p^4q^3 = 0$.

Soit $x^4 + nx^2 + px - q = \begin{cases} (x+a)(x-c)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1}) \\ (x+b)(x-c)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1}) \end{cases}$ on aura $2^43^4n^4q - 2^5.3^5n^3p^2 + 2^7.3^2.5^2n^2q^2 - 2^4.3^2.5.7.np^2q - 3^3.7^3p^4 + 2^8.5^4q^3 = 0$.

Les deux systèmes $\begin{cases} (x+a)(x-b)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1}) \\ (x+a)(x-c)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1}) \end{cases}$ sont distingués de tous ceux de leur formule par la condition $2^8.5^4n^{12} - \&c. = 0$; mais il faut les distinguer l'un de l'autre, c'est-à-dire, qu'il faut trouver une fonction de n, de p & de q la plus simple possible, qui soit toûjours plus grande que 0 dans l'un, & toûjours moindre que 0 dans l'autre. Cette fonction sera $= 0$ dans le cas $(x+a)(x-b)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$ commun à ces deux systèmes.

La suite des fonctions parmi lesquelles doit se trouver celle dont il s'agit, est $An^2 + Bq$, $An^3 + Bnq + Cp^2$, $An^4 + Bn^2q + Cnp^2 + Dq^2$, $An^5 + Bn^3q + Cn^2p^2 + Dnq^2 + Ep^2q$, $An^6 + Bn^4q + Cn^3p^2 + Dn^2q^2 + Enp^2q + Fp^4 + Gq^3$, &c.

Eſſayons d'abord cette fonction-ci $2 \cdot 5n^2 - 3q$ qui a déjà la dernière des trois conditions que doit avoir celle que nous cherchons.

Dans le premier ſyſtème, on a $a - b - 2c = 0$, $2bc + c^2 = n$, $2abc + (a - b)(a^2 + c^2) = p$, $ab.(a^2 + c^2) = q$. Soit $b = c + \mathcal{C}$, on aura $n = 3c^2 + 2c\mathcal{C}$, $q = 2.3.5c^4 + 2.29c^3\mathcal{C} + 37c^2\mathcal{C}^2 + 2.5c\mathcal{C}^3 + \mathcal{C}^4$; & en ſubſtituant dans la fonction $2 \cdot 5n^2 - 3q$, on aura

$$\begin{array}{l} -2.3^2.5c^4 - 2.3.29c^3\mathcal{C} - 3.37c^2\mathcal{C}^2 - 2.3.5c\mathcal{C}^3 - 3\mathcal{C}^4 < 0. \\ +2.3^2.5 \quad +2^3.3.5 \quad +2^3.5 \end{array}$$

Dans le ſecond ſyſtème, on a $a - 2b - c = 0$, $2bc + b^2 = n$, $2abc + (a - c)(a^2 + b^2) = p$, $ac(a^2 + b^2) = q$.

Soit encore $b = c + \mathcal{C}$, on aura $n = 3c^2 + 2c\mathcal{C} + \mathcal{C}^2$, $q = 2.3.5c^4 + 2.31c^3\mathcal{C} + 43c^2\mathcal{C}^2 + 2.5c\mathcal{C}^3$; & en ſubſtituant dans la fonction, on aura

$$\begin{array}{l} +2.3^2.5c^4 \\ \quad -2.3^2.5 \\ +2^4.3.5c^3\mathcal{C} + 2^2.5.11c^2\mathcal{C}^2 + 2^4.5c\mathcal{C}^3 + 2.5\mathcal{C}^4 > 0. \\ -2.3.31 \quad -3.43 \quad -2.3.5 \end{array}$$

Par conſéquent, la condition pour ce ſyſtème-ci $(x + a)(x - b)(x - c + a\sqrt{-1})(x - c - a\sqrt{-1})$ eſt $2 \cdot 5n^2 - 3q < 0$; celle pour celui-ci $(x + a)(x - c)(x - b + a\sqrt{-1})(x - b - a\sqrt{-1})$ eſt $2 \cdot 5n^2 - 3q > 0$.

Les deux ſyſtèmes $\begin{cases} (x+a)(x-c)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1}) \\ (x+b)(x-c)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1}) \end{cases}$ ſont diſtingués de tous ceux de leur formule par la condition $2^4 \cdot 3^4 n^4 q - \&c. = 0$.

Il s'agit de les diſtinguer l'un de l'autre: eſſayons encore cette fonction-ci $2 \cdot 5n^2 - 3q$.

Dans le premier ſyſtème, on a $a - 3c = 0$,

$-3ac+3c^2+b^2=n$, $2ac^2+(a-c)(b^2+c^2)=p$, $ac.(b^2+c^2)=q$. Soit $b=3c-\alpha$ & $b=2^{\frac{1}{3}}.3^{\frac{1}{3}}c+\mathcal{C}$, on aura $c=\frac{\alpha+\mathcal{C}}{3^{\frac{1}{3}}(3^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{3}})}$, $b=\frac{2^{\frac{1}{3}}\alpha+3^{\frac{1}{3}}\mathcal{C}}{3^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{3}}}$, $a=\frac{3^{\frac{1}{3}}\alpha+3^{\frac{1}{3}}\mathcal{C}}{3^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{3}}}$; donc $n=\frac{2^{\frac{1}{3}}(3^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{3}})\alpha\mathcal{C}+\mathcal{C}^2}{(3^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{3}})^2}$,

$q=\frac{7\alpha^4+2^{\frac{1}{3}}(2^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{1}{3}})\alpha^3\mathcal{C}+3(7+2^{\frac{2}{3}}.3^{\frac{1}{3}})\alpha^2\mathcal{C}^2+2(11+2^{\frac{1}{3}}.3^{\frac{1}{3}})\alpha\mathcal{C}^3+2.5\mathcal{C}^4}{3(3^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{3}})^4}$;

en substituant ces valeurs de n & de q dans la fonction $2.5n^2-3q$, on aura $-7\alpha^4-2^{\frac{1}{3}}(2^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{1}{3}})\alpha^3\mathcal{C}-3(7+2^{\frac{2}{3}}.3^{\frac{1}{3}})\alpha^2\mathcal{C}^2$
$+2^4.5(3^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{3}})^2$
$-2(11+2^{\frac{1}{3}}.3^{\frac{1}{3}})\alpha\mathcal{C}^3-2.5\mathcal{C}^4<0.$
$+2^{\frac{7}{3}}.5(3^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{3}})+2.5$

Dans le second système, on a $b-3c=0$, $-3bc+3c^2+a^2=n$, $2bc^2+(b-c)(a^2+c^2)=p$, $bc.(a^2+c^2)=q$.

Soit $a=3c+\alpha$, on aura $n=3c^2+2.3c\alpha+\alpha^2$, $q=2.3.5c^4+2.3^2c^3\alpha+3c^2\alpha^2$; & en substituant dans la fonction $2.5n^2-3q$, on aura

$+2.3^2.5c^4+2^3.3^2.5c^3\alpha+2^2.3.5.7c^2\alpha^2+2^3.3.5c\alpha^3+2.5\alpha^4>0$;
$-2.3^2.5-2.3^3-3^2$

Par conséquent, la condition pour ce système-ci $(x+a)(x-c)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$ est $2.5n^2-3q<0$; celle pour celui-ci $(x+b)(x-c)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1})$ est $2.5n^2-3q>0$.

Le système $(x+a)(x-c)(x-d+b\sqrt{-1})(x-d-b\sqrt{-1})$ peut devenir 1.° $(x+a)(x-b)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1})$ en faisant $a=b$;

auquel

auquel cas, on auroit $2^8 . 5^4 n^{12} —$ &c. $= 0$, & $2 . 5 n^2 — 3q < 0$; donc, tant que a ſera plus grand que b, la fonction $2^8 . 5^4 n^{12} —$ &c. ſera plus grande ou moindre que 0.

Soit $d = 7$, $c = 8$, $b = 18$, $a = 22$, on aura $n = 1$, $p = 3956$, $q = 65648$. Subſtituez ces valeurs, & vous ſaurez ſi c'eſt plus grande ou moindre que 0 qu'eſt la fonction $2^8 . 5^4 n^{12} —$ &c.

Il peut devenir 2.° $(x + a)(x — c)(x — c + b\sqrt{-1})(x — b — c\sqrt{-1})$ en faiſant $d = c$; auquel cas, on auroit $2^4 . 3^4 n^4 q —$ &c. $= 0$, & $2 . 5 n^2 — 3q < 0$; donc, tant que d ſera moindre que c, la fonction $2^4 . 3^4 n^4 q —$ &c. ſera plus grande ou moindre que 0. Subſtituez-y les valeurs précédentes de n, de p & de q, & vous ſaurez à quoi vous en tenir; vous aurez donc pour ce ſyſtème-ci $2^8 . 5^4 n^{12} —$ &c. $> < 0$, $2^4 . 3^4 n^4 q —$ &c. $> < 0$, $2 . 5 n^2 — 3q < 0$.

Le ſyſtème $(x + a)(x — d)(x — c + b\sqrt{-1})(x — c — b\sqrt{-1})$ peut devenir 1.° $(x + a)(x — c)(x — b + a\sqrt{-1})(x — b — a\sqrt{-1})$ en faiſant $a = b$; auquel cas, on auroit $2^8 . 5^4 n^{12} —$ &c. $= 0$, & $2 . 5 n^2 — 3q > 0$.

Il peut devenir 2.° $(x + a)(x — c)(x — c + b\sqrt{-1})(x — c — b\sqrt{-1})$ en faiſant $d = c$; auquel cas, on auroit $2^4 . 3^4 n^4 q —$ &c. $= 0$, & $2 . 5 n^2 — 3q < 0$.

Le ſyſtème de conditions pour ce ſyſtème de facteurs-ci ſera donc $2^8 . 5^4 n^{12} —$ &c. $> < 0$, $2^4 . 3^4 n^4 q —$ &c. $> < 0$.

Le ſyſtème $(x + b)(x — c)(x — d + a\sqrt{-1})(x — d — a\sqrt{-1})$ peut devenir 1.° $(x + a)(x — b)(x — c + a\sqrt{-1})(x — c — a\sqrt{-1})$ en faiſant

$a = b$; auquel cas, on auroit $2^8 \cdot 5^4 n^{12} -$ &c. $= 0$; & $2 \cdot 5 n^2 - 3q < 0$.

Il peut devenir 2.° $(x + b)(x - c)(x - c + a\sqrt{-1})$ $(x - c - a\sqrt{-1})$ en faiſant $d = c$; auquel cas, on auroit $2^4 \cdot 3^4 n^4 q -$ &c. $= 0$, & $2 \cdot 5 n^2 - 3q > 0$.

Le ſyſtème de conditions pour ce ſyſtème de facteurs-ci eſt donc $2^8 \cdot 5^4 n^{12} -$ &c. $>< 0$, $2^4 \cdot 3^4 n^4 q -$ &c. $>< 0$.

Le ſyſtème $(x + b)(x - d)(x - c + a\sqrt{-1})$ $(x - c - a\sqrt{-1})$ peut devenir 1.° $(x + a)(x - c)$ $(x - b + a\sqrt{-1})(x - b - a\sqrt{-1})$ en faiſant $a = b$; auquel cas, on auroit $2^8 \cdot 5^4 n^{12} -$ &c. $= 0$, & $2 \cdot 5 n^2 - 3q < 0$.

Il peut devenir 2.° $(x + b)(x - c)(x - c + a\sqrt{-1})$ $(x - c - a\sqrt{-1})$ en faiſant $d = c$; auquel cas, on auroit $2^4 \cdot 3^4 n^4 q -$ &c. $= 0$, & $2 \cdot 5 n^2 - 3q > 0$.

Le ſyſtème de conditions pour ce ſyſtème de facteurs-ci eſt donc $2^8 \cdot 5^4 n^{12} -$ &c. $>< 0$, $2^4 \cdot 3^4 n^4 q -$ &c. $>< 0$, $2 \cdot 5 n^2 - 3q > 0$.

III.

Les ſyſtèmes de conditions des ſyſtèmes de facteurs de la formule $x^4 + nx^2 - px + q$ ſont les mêmes que ceux des ſyſtèmes correſpondans de la formule $x^4 + nx^2 + px + q$.

IV.

Soit $x^4 - nx^2 + px + q = (x + a)(x + a)(x - a + a\sqrt{-1})(x - a - a\sqrt{-1})$
on aura $4n^3 - p^2 = 0$, $2n^2 - q = 0$.

Soit $x^4 - nx^2 + px + q = \begin{cases} (x + a)(x - b)(x - b)(x + c) \\ (x + a)(x + a)(x - a + b\sqrt{-1})(x - a - b\sqrt{-1}) \\ (x + b)(x + b)(x - b + a\sqrt{-1})(x - b - a\sqrt{-1}) \end{cases}$
on aura $2^4 n^4 q + 2^2 n^3 p^2 - 2^7 n^2 q^2 - 2^4 \cdot 3^2 n p^2 q - 3^3 p^4 + 2^8 q^3 = 0$.

Soit $x^4 - ux^2 + px + q = \begin{cases} (x+a)(x+c)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1}) \\ (x+a)(x+c)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1}) \end{cases}$ en changeant le signe de n dans l'équation que nous avons trouvée pour le second système de la première formule, on aura $2^8 \cdot 5^4 n^{12} + 2^{12} \cdot 5^2 \cdot 7 n^{10} q - 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^2 n^9 p^2 + 2^{13} \cdot 3 \cdot 241 n^8 q^2 - 2^{11} \cdot 8453 n^7 p^2 q - 2^5 \cdot 3 \cdot 26231 n^6 p^4 + 2^{16} \cdot 5^2 \cdot 7 n^6 q^3 - 2^{13} \cdot 5 \cdot 923 n^5 p^2 q^2 + 2^{16} \cdot 5^4 n^4 q^4 - 2^9 \cdot 38389 n^4 p^4 q + 2^{15} \cdot 5^4 n^3 p^2 q^3 - 2^5 \cdot 18157 n^5 p^6 + 2^9 \cdot 5^2 \cdot 431 n^2 p^4 q^2 - 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 31 n p^6 q - 3^3 (13)^3 p^8 + 2^{12} \cdot 5^4 p^4 q^3 = 0.$

Soit $x^4 - nx^3 + px + q = \begin{cases} (x+a)(x+c)(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1}) \\ (x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1}) \end{cases}$ on aura $2^2 n^4 q + 2 n^3 p^2 - p^4 = 0.$

Les trois systèmes $\begin{cases} (x+a)(x-b)(x-b)(x+c) \\ (x+a)(x+a)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1}) \\ (x+b)(x+b)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1}) \end{cases}$ sont distingués de tous ceux de leur formule par la condition $2^4 n^4 q +$ &c. $= 0$; mais il faut les distinguer entr'eux.

Les deux premiers ont un cas commun $(x+a)(x+a)(x-a)(x-a)$, dans lequel on auroit la fonction $n^2 - 4q = 0$; par conséquent, cette fonction doit être toûjours plus grande que o dans l'un, & toûjours moindre que o dans l'autre. Je trouve $n^2 - 4q > 0$ pour le système $(x+a)(x-b)(x-b)(x+c)$, & par conséquent $n^2 - 4q < 0$ pour le système $(x+a)(x+a)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$.

Les deux derniers ont un cas commun qui est $(x+a)(x+a)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$, dans lequel la fonction, qui est toûjours plus grande que o dans l'un, & toûjours moindre que o dans l'autre, devient $= 0$; la fonction $2n^2 - q$ a cette dernière propriété,

Eſſayons ſi elle n'auroit pas auſſi les deux autres; je trouve $2n^2 - q > 0$ pour le ſyſtème $(x+a)(x+a)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$, & $2n^2 - q < 0$ pour le ſyſtème $(x+b)(x+b)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$.

Les deux ſyſtèmes $\begin{cases} (x+a)(x+c)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1}) \\ (x+a)(x+c)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1}) \end{cases}$ ſont diſtingués de tous ceux de leur formule par la condition $2^8 \cdot 5^4 n^{12} +$ &c. $= 0$. Il s'agit de les diſtinguer l'un de l'autre, c'eſt-à-dire, qu'il faut trouver une fonction de n, de p & de q, qui ſoit toûjours plus grande que 0 dans l'un, & toûjours moindre que 0 dans l'autre; cette fonction deviendra $= 0$, les deux ſyſtèmes devenant $(x+a)(x+a)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$.

Eſſayons d'abord la fonction $2n^2 - q$, qui a déjà la dernière des trois conditions que doit avoir celle que nous cherchons.

Dans le premier ſyſtème, on a $a+c-2b=0$, $2bc-b^2=n$, $-2abc+(a+c)(a^2+b^2)=p$, $ac(a^2+b^2)=q$; donc $a=2b-c$. Soit $b=c+\mathcal{C}$, $2c=b+\gamma$, on aura $c=\mathcal{C}+\gamma$, $b=2\mathcal{C}+\gamma$; $a=3\mathcal{C}+\gamma$; donc $n=2\mathcal{C}\gamma+\gamma^2$, $q=3\cdot 13\mathcal{C}^4 + 2\cdot 41\mathcal{C}^3\gamma + 59\mathcal{C}^2\gamma^2 + 2\cdot 3^2\mathcal{C}\gamma^3 + 2\gamma^4$; & en ſubſtituant dans la fonction $2n^2 - q$, on aura

$$-3\cdot 13\mathcal{C}^4 - 2\cdot 41\mathcal{C}^3\gamma - 59\mathcal{C}^2\gamma^2 - 2\cdot 3^2\mathcal{C}\gamma^3 - 2\gamma^4 < 0.$$
$$+2^3 \qquad +2^3 \qquad +2$$

Dans le ſecond ſyſtème, on a $a+c-2b=0$, $2ab-b^2=n$, $-2abc+(a+c)(b^2+c^2)=p$, $ac(b^2+c^2)=q$. Soit $b=\alpha+c$, $a=2\alpha+c$, on aura $n=3\alpha^2+2^2\alpha c+c^2$,

$$q=2\alpha^3 c+5\alpha^2 c^2+2\cdot 3\alpha c^3+2c^4;$$

& en ſubſtituant dans la fonction $2n^2 - q$, on aura $2.3^2a^4 + 2^4.3a^3c + 2^2.11a^2c^2 + 2^4ac^3 + 2c^4 > 0$.
$\quad -2 \qquad -5 \qquad -2.3 \quad -2$

Par conſéquent, la condition pour le ſyſtème $(x+a)(x+c)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$ eſt $2n^2 - q < 0$; celle pour le ſyſtème $(x+a)(x+c)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})$ eſt $2n^2 - q > 0$.

Les deux ſyſtèmes $\begin{cases} (x+a)(x+c)(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1}) \\ (x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1}) \end{cases}$ ſont diſtingués de tous ceux de leur formule par la condition $2^2n^4q + 2n^3p^2 - p^4 = 0$. Il s'agit de les diſtinguer l'un de l'autre.

Je trouve $2n^2 - q > 0$ pour le ſyſtème $(x+a)(x+c)(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1})$, & $2n^2 - q < 0$ pour le ſyſtème $(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$.

1.° Le ſyſtème $(x+a)(x-b)(x-c)(x+d)$ peut devenir $(x+a)(x-b)(x-b)(x+c)$ en faiſant $c = b$; auquel cas, on auroit $2^4n^4q +$ &c. $= 0$, & $n^2 - 4q > 0$; par conſéquent le ſyſtème de conditions pour ce ſyſtème de facteurs-ci eſt $2^4n^4q +$ &c. $>< 0$, $n^2 - 4q > 0$.

2.° Le ſyſtème $(x+a)(x+c)(x-b+d\sqrt{-1})(x-b-d\sqrt{-1})$ peut devenir 1.° $(x+a)(x-b)(x-b)(x+c)$ en faiſant $d = 0$; auquel cas, on auroit $2^4n^4q +$ &c. $= 0$, & $n^2 - 4q > 0$; la première condition pour ce ſyſtème-ci ſera donc $2^4n^4q +$ &c. $>< 0$.

Il peut devenir 2.° $(x+a)(x+a)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$ en faiſant $c = b = a$; auquel cas,

on auroit $2^4n^4q + \&c. = 0$; ce qui donne la même condition que la précédente, & $n^2 - 4q < 0$, $2n^2 - q > 0$.

Il peut devenir 3.° $(x + a)(x + c)(x - b + c\sqrt{-1})(x - b - c\sqrt{-1})$ en faisant $d = c$; auquel cas, on auroit $2^8 \cdot 5^4 n^{12} + \&c. = 0$, & $2n^2 - q > 0$.

Le système de conditions du système $(x + a)(x + c)(x - b + d\sqrt{-1})(x - b - d\sqrt{-1})$ est donc $2^4n^4q + \&c. >< 0$, $2^8 \cdot 5^4 n^{12} + \&c. >< 0$, $2n^2 - q > 0$. Nous mettons toûjours ce signe-ci >< au lieu du vrai, que l'on déterminera par une seule expérience.

3.° Le système $(x + a)(x + d)(x - b + c\sqrt{-1})(x - b - c\sqrt{-1})$ peut devenir 1.° $(x + a)(x + c)(x - b + c\sqrt{-1})(x - b - c\sqrt{-1})$ en faisant $d = c$; auquel cas, on auroit $2^8 \cdot 5^4 n^{12} + \&c. = 0$, & $2n^2 - q > 0$; par conséquent, une des conditions de ce système-ci est $2^8 \cdot 5^4 n^{12} + \&c. >< 0$.

Il peut devenir 2.° $(x + a)(x + c)(x - b + b\sqrt{-1})(x - b - b\sqrt{-1})$ en faisant $c = b$; auquel cas, on auroit $2^2n^4q + 2n^3p^2 - p^4 = 0$, & $2n^2 - q > 0$.

Le système de conditions du système $(x + a)(x + d)(x - b + c\sqrt{-1})(x - b - c\sqrt{-1})$ est donc $2^8 \cdot 5^4 n^{12} + \&c. >< 0$, $2^2n^4q + 2n^3p^2 - p^4 >< 0$, $2n^2 - q > 0$.

4.° Le système $(x + a)(x + d)(x - c + b\sqrt{-1})(x - c - b\sqrt{-1})$ peut devenir 1.° $(x + a)(x + c)(x - b + a\sqrt{-1})(x - b - a\sqrt{-1})$ en faisant $a = b$; auquel cas, on auroit $2^8 \cdot 5^4 n^{12} + \&c. = 0$, & $2n^2 - q < 0$; une des conditions de ce système-ci est donc $2^8 \cdot 5^4 n^{12} + \&c. >< 0$.

Il peut devenir 2.° $(x+a)(x+c)(x-b+b\sqrt{-1})$ $(x-b-b\sqrt{-1})$ en faiſant $c=b$; auquel cas, on auroit $2^2n^4q+2n^3p^2-p^4=0$, & $2n^2-q>0$.

Le ſyſtème de conditions du ſyſtème $(x+a)(x+d)$ $(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$ eſt donc $2^8\cdot5^4n^{12}+$&c. $><0$, $2^2n^4q+2n^3p^2-p^4><0$.

5.° Le ſyſtème $(x+b)(x+d)(x-c+a\sqrt{-1})$ $(x-c-a\sqrt{-1})$ peut devenir 1.° $(x+b)(x+b)$ $(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$ en faiſant $d=c=b$; auquel cas, on auroit 2^4n^4q+&c. $=0$, & $2n^2-q<0$; une des conditions de ce ſyſtème-ci eſt donc 2^4n^4q+&c. $><0$.

Il peut devenir 2.° $(x+a)(x+c)(x-b+a\sqrt{-1})$ $(x-b-a\sqrt{-1})$ en faiſant $a=b$; auquel cas, on auroit $2^8\cdot5^4n^{12}+$&c. $=0$, & $2n^2-q<0$.

Le ſyſtème de conditions du ſyſtème $(x+b)(x+d)$ $(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1})$ eſt donc 2^4n^4q+&c. $><0$, $2^8\cdot5^4n^{12}+$&c. $><0$, $2n^2-q<0$.

6.° Le ſyſtème $(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$ $(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$ peut devenir 1.° $(x+a)(x+a)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$ en faiſant $c=0$; auquel cas, on auroit 2^4n^4q+&c. $=0$, & $n^2-4q<0$, $2n^2-q>0$.

Il peut devenir 2.° $(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$ $(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$ en faiſant $a=b$; auquel cas, on auroit $2^2n^4q+2n^3p^2-p^4=0$, & $2n^2-q<0$.

Le ſyſtème de conditions du ſyſtème $(x-a+b\sqrt{-1})$ $(x-a-b\sqrt{-1})(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$ eſt donc 2^4n^4q+&c. $><0$, $2^2n^4q+2n^3p^2-p^4><0$, $n^2-4q<0$.

7.° Le système $(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$ peut devenir 1.° $(x+b)(x+b)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$ en faisant $c=0$; auquel cas, on auroit 2^4n^4q+ &c. $=0$, & $2n^2-q<0$.

Il peut devenir 2.° $(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$ en faisant $a=b$; auquel cas, on auroit $2^2n^4q+2n^3p^2-p^4=0$, & $2n^2-q<0$.

Le système de conditions du système $(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$ est donc 2^4n^4q+ &c. $><0$, $2^2n^4q+2n^3p^2-p^4><0$, $2n^2-q<0$.

V.

Les conditions des systèmes de facteurs de la formule x^4+nx^3-px-q sont les mêmes que celles des systèmes correspondans de la formule x^4+nx^3+px-q.

V I.

Soit $x^4-nx^2+px-q=(x+a)(x-b)(x-b)(x-b)$, on aura $2^3n^3-3^3p^2=0$, $n^2-2^2\cdot 3q=0$.

Soit $x^4-nx^2+px-q=(x+a)(x-b)(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1})$, on aura $2^2n^3-5p^2=0$, $2\cdot 3n^2-5^2q=0$.

Soit $x^4-nx^2+px-q=\begin{cases}(x+a)(x-b)(x-b)(x-c)\\(x+a)(x-b)(x-c)(x-c)\end{cases}$ on aura $2^4n^4q-2^2n^3p^2+2^7n^2q^2-2^4\cdot 3^2np^2q+3^3p^4+2^8q^3=0$.

Soit $x^4-nx^2+px-q=\begin{cases}(x+a)(x-b)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})\\(x+a)(x-c)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})\end{cases}$ on aura $2^4\cdot 3^4n^4q+2^2\cdot 3^3n^3p^2+2^7\cdot 3^2\cdot 5^2n^2q^2+2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7np^2q-3^3\cdot 7^3p^4+2^8\cdot 5^4q^3=0$.

Soit

Soit $x^4 - nx^2 + px - q = \begin{cases} (x+a)(x-c)(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1}) \\ (x+a)(x-b)(x-c+c\sqrt{-1})(x-c-c\sqrt{-1}) \end{cases}$

on aura $2^2n^4q - 2n^3p^2 + p^4 = 0$.

Soit $x^4 - nx^2 + px - q = \begin{cases} (x+a)(x-c)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1}) \\ (x+a)(x-b)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1}) \end{cases}$

on aura $2^8.5^4n^{12} - 2^{12}.5^2.7n^{10}q - 2^9.3^2.5^2n^9p^2 + 2^{13}.3.241n^8q^2 + 2^{11}.8453n^7p^2q - 2^5.3.26231n^6p^4 - 2^{16}.5^2.7n^6q^3 - 2^{13}.5.923n^5p^2q^2 + 2^{16}.5^4n^4q^4 + 2^9.38389n^4p^4q - 2^{15}.5^4n^3p^2q^3 - 2^5.186157n^3p^6 + 2^9.5^2.431n^2p^4q^3 + 2^7.3^2.5.13.31np^6q - 3^3(13)^3p^8 - 2^{12}.5^4p^4q^3 = 0$.

Les deux systèmes $\begin{cases} (x+a)(x-b)(x-b)(x-c) \\ (x+a)(x-b)(x-c)(x-c) \end{cases}$ sont distingués de tous ceux de leur formule par la condition $2^4n^4q - \&c. = 0$; mais il faut les distinguer l'un de l'autre, c'est-à-dire, qu'il faut trouver une fonction de n, de p & de q, la plus simple possible, qui soit toûjours plus grande que o dans l'un, & toûjours moindre que o dans l'autre. Cette fonction sera $= o$ dans le cas $(x+a)(x-b)(x-b)(x-b)$ commun aux deux systèmes.

Dans le premier système, on a $a - 2b - c = 0$, $ac + 2b.(a-c) - b^2 = n$, $2abc + b^2.(a-c) = p$, $ab^2c = q$; donc $a = 2b + c$, $3b^2 + 2bc + c^2 = n$, $2bc.(2b+c) + 2b^3 = p$, $b^2c.(2b+c) = q$. Je fais $b = c + 6$, j'aurai $n = 2.3c^2 + 2^3c6 + 3.6^2$,

$p = 2^3c^3 + 2^4c^2.6 + 2.5c6^2 + 2.6^3$,

$q = 3c^4 + 2^3c^3.6 + 7c^2.6^2 + 2c6^3$.

Dans le second système, on a $a - b - 2c = 0$, $ab + 2c.(a-b) - c^2 = n$, $2abc + c^2(a-b) = p$, $abc^2 = q$; donc $a = b + 2c$, $n = b^2 + 2bc + 3c^2$, $p = 2bc(b+2c) + 2c^3$, $q = bc^2.(b+2c)$.

Soit $b = c + \epsilon$, on aura $n = 2.3c^2 + 2^2c\epsilon + \epsilon^2$, $p = 2^3c^3 + 2^3c^2\epsilon + 2c\epsilon^2$, $q = 3c^4 + 2^2c^3\epsilon + c^2\epsilon^2$.

Je vois d'abord que la fonction $n^2 - 2^2.3q$, qui eſt la première qu'il faudroit eſſayer, ne ſauroit avoir les conditions requiſes, d'être toûjours > o dans l'un des deux ſyſtèmes, & toûjours < o dans l'autre, parce qu'en y ſubſtituant les valeurs de n, de p & de q, le coëfficient de la ſixième puiſſance de ϵ ſera poſitif dans les deux cas.

La fonction la plus prochaine qu'il faut eſſayer, eſt $An^3 + Bnq + Cp^2$; en y ſubſtituant les valeurs de n, de p & de q du premier ſyſtème, on aura $+ 2^3.3^3Ac^6$
$+ 2.3^2B$
$+ 2^6C$

$+ 2^5.3^3Ac^5\epsilon + 2^2.3^2.41Ac^4\epsilon^2 + 2^5.43Ac^3\epsilon^3$
$+ 2^3.3^2B + 5.23B + 2^2.23B$
$+ 2^8C + 2^5.13C + 2^5.11C$

$+ 2.3^2.41Ac^2\epsilon^4 + 2^3.3^3Ac\epsilon^5 + 3^3A\epsilon^6 < 0.$
$+ 37B + 2.3B + 2^2C$
$+ 2^2.41C + 2^3.5C$

En y ſubſtituant celles du ſecond ſyſtème, on aura $+ 2^3.3^3Ac^6$
$+ 2.3^2B$
$+ 2^6C$

$+ 2^4.3^3Ac^5\epsilon + 2^2.3^2.11Ac^4\epsilon^2 + 2^4.13Ac^3\epsilon^3$
$+ 2^2.3^2B + 5^2B + 2^3B$
$+ 2^7C + 2^5.3C + 2^5C$

$+ 2.3.11Ac^2\epsilon^4 + 2^2.3Ac\epsilon^5 + A\epsilon^6 > 0.$
$+ B$
$+ 2^2C$

ϵ étant $= 0$, ou ſeulement infiniment petit par rapport

à c, la fonction $An^3 + Bnq + Cp^2$ doit être $= 0$; donc $2^2 \cdot 3^3 A + 3^2 B + 2^3 C = 0$; donc $B = \frac{-2^2 \cdot 3^3 A - 2^3 C}{3^2}$.

En substituant cette valeur de B par-tout, & en remplissant les conditions, on aura 1.° $3^3 A + 2C < 0$, $3^2 \cdot 17A + 2 \cdot 7C < 0$, $3^3 \cdot 7^2 A + 2 \cdot 73C < 0$, $2 \cdot 3^3 A + 7C < 0$, $3^3 A + 2^2 C < 0$.

2.° On aura $3^3 A + 2C > 0$, $3^2 \cdot 7A + 2C > 0$, $3^3 A + 2C > 0$, $A > 0$.

De ce que $3^3 A + 2C$ est en même temps < 0 & > 0, il suit que $3^3 A + 2C = 0$.

Soit $A = 2$, on aura $C = -3^3$, $B = 2^3 \cdot 3^2$, & toutes les conditions seront remplies ; par conséquent pour ce système-ci $(x + a)(x - b)(x - b)(x - c)$ on aura $2n^3 + 2^3 \cdot 3^2 nq - 3^3 p^2 < 0$, & pour celui-ci $(x + a)(x - b)(x - c)(x - c)$ on aura $2n^3 + 2^3 \cdot 3^2 nq - 3^3 p^2 > 0$.

Les deux systèmes $\begin{cases} (x+a)(x-b)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1}) \\ (x+a)(x-c)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1}) \end{cases}$ sont distingués de tous ceux de leur formule par la condition $2^4 \cdot 3^4 n^4 q +$ &c. $= 0$. Il faut les distinguer l'un de l'autre ; la fonction qui sera toûjours plus grande que 0 dans l'un, & toûjours moindre que 0 dans l'autre, sera $= 0$ dans le cas $(x + a)(x - b)(x - b + b\sqrt{-1})(x - b - b\sqrt{-1})$ commun aux deux systèmes. Cette fonction-ci $2 \cdot 3n^2 - 5^2 q$ a la dernière de ces trois propriétés. Essayons d'abord si elle n'auroit pas aussi les deux autres.

Dans le premier système, on a $n = 2 \cdot 3b^2 - c^2$, $q = 3b^4 + 3b^2 c^2$. Soit $b^2 = c^2 + \mathcal{C}^2$, on aura $n = 5c^2 + 2 \cdot 3\mathcal{C}^2$, $q = 2 \cdot 3c^4 + 3^2 c^2 \mathcal{C}^2 + 3\mathcal{C}^4$;

& en substituant dans la fonction, on aura $+ 2.3.5^2c^4 - 2.3.5^2$
$+ 2^3.3^2.5c^2\mathcal{C}^2 + 2^3.3^3\mathcal{C}^4 > 0.$
$- 3^2.5^2 \qquad - 3.5^2$

Dans le second système, on a $n = 2.3c^2 - b^2$, $q = 3c^4 + 3b^2c^2$. Soit $b^2 = c^2 + \mathcal{C}^2$, on aura $n = 5c^2 - \mathcal{C}^2$, $q = 2.3c^4 + 3c^2\mathcal{C}^2$. Soit $5c^2 - \mathcal{C}^2 = \gamma^2$, ou $c^2 = \frac{\mathcal{C}^2 + \gamma^2}{5}$, on aura $n = \gamma^2$, $q = \frac{3.7\mathcal{C}^4 + 3^3\mathcal{C}^2\gamma^2 + 2.3\gamma^4}{5^2}$; & en substituant dans la fonction, on aura $- 3.7\mathcal{C}^4 - 3^3\mathcal{C}^2\gamma^2 - 2.3\gamma^4 < 0.$
$+ 2.3$

Par conséquent, la condition pour ce système-ci $(x + a)(x - c)(x - b + c\sqrt{-1})(x - b - c\sqrt{-1})$ est $2.3n^2 - 5^2q > 0$; celle pour celui-ci $(x + a)(x - c)(x - c + b\sqrt{-1})(x - c - b\sqrt{-1})$, est $2.3n^2 - 5^2q < 0$.

Les deux systèmes $\begin{cases} (x+a)(x-c)(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1}) \\ (x+a)(x-b)(x-c+c\sqrt{-1})(x-c-c\sqrt{-1}) \end{cases}$ sont distingués de tous ceux de leur formule par la condition $2^2n^4q - 2n^3p^2 + p^4 = 0$. Il s'agit de les distinguer l'un de l'autre; la fonction qui est toûjours plus grande que o dans l'un, & toûjours moindre que o dans l'autre, est $= o$ dans le système $(x + a)(x - b)(x - b + b\sqrt{-1})(x - b - b\sqrt{-1})$ qui leur est commun.

Dans le premier système, on a $a - 2b - c = 0$, $n = 2b^2 + 2bc + c^2$, $p = 2b(2b^2 + 2bc + c^2)$, $q = 2b^2c(2b + c)$; en faisant $b = c + \mathcal{C}$, on aura

$$n = 5c^2 + 2.3c\mathcal{C} + 2\mathcal{C}^2,$$
$$p = 2.5c^3 + 2.11c^2\mathcal{C} + 2^4c\mathcal{C}^2 + 2^2\mathcal{C}^3,$$
$$q = 2.3c^4 + 2^4c^3\mathcal{C} + 2.7c^2\mathcal{C}^2 + 2^2c\mathcal{C}^3.$$

Dans le second système, on a $a - b - 2c = 0$, $n = b^2 + 2bc + 2c^2$, $p = 2c(b^2 + 2bc + 2c^2)$, $q = 2bc^2(b + 2c)$; & en faisant $b = c + \mathcal{C}$, on aura $n = 5c^2 + 2^2c\mathcal{C} + \mathcal{C}^2$, $p = 2.5c^3 + 2^3c^2\mathcal{C} + 2c\mathcal{C}^2$, $q = 2.3c^4 + 2^3c^3\mathcal{C} + 2c^2\mathcal{C}^2$.

Il est aisé de voir que la fonction $2.3n^2 - 5^2q$, qui a la dernière des trois propriétés que doit avoir celle que nous cherchons, ne sauroit avoir les deux autres ; parce qu'en y substituant les valeurs de n & de q, le coëfficient de la plus haute puissance de $\mathcal{C}$ sera positif dans les deux cas ; la fonction qui suit celle-là, & qu'il faut essayer, est $An^3 + Bnq + Cp^2$; en y substituant pour n, p, q, leurs valeurs, dans le premier cas, on aura

$$\begin{array}{lll} + 5^3Ac^6 & & \\ & + 2.3.5B & \\ & + 2^2.5^2C & \\ + 2.3^2.5^2Ac^5\mathcal{C} & + 2.3.5.23Ac^4\mathcal{C}^2 & + 2^6.3^2Ac^3\mathcal{C}^3 \\ + 2^2.29B & + 2.89B & + 2^3.17B \\ + 2^3.5.11C & + 2^2.201C & + 2^4.7^2C \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} + 2^2.3.23Ac^2\mathcal{C}^4 & + 2^3.3^3Ac\mathcal{C}^5 & + 2^3A\mathcal{C}^6 < 0. \\ + 2^2.13B & + 2^3B & + 2^4C \\ + 2^4.3^3C & + 2^7C & \end{array}$$

Dans le second cas, on aura

$$\begin{array}{lll} + 5^3Ac^6 & & + 2^2.3.5^2Ac^5\mathcal{C} \\ & + 2.3.5B & + 2^6B \\ & + 2^2.5^2C & + 2^5.5C \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} + 3^2.5.7Ac^4\mathcal{C}^2 & + 2^3.23Ac^3\mathcal{C}^3 & + 3^2.7Ac^2\mathcal{C}^4, \\ + 2^4.3B & + 2^4B & + 2B \\ + 2^3.13C & + 2^5C & + 2^2C \end{array}$$

$$+ 2^2.3Ac\mathcal{C}^5 + A\mathcal{C}^6 > 0.$$

$\mathcal{C}$ étant $= 0$, la fonction $An^3 + Bnq + Cp^2$ est $= 0$

dans les deux cas ; donc $5^2A + 2.3B + 2^2.5C = 0$; donc $B = \frac{-5^2A - 2^2.5C}{2.3}$.

En substituant cette valeur de B, & en faisant tous les coëfficiens < 0 dans le premier cas, & > 0 dans le second, on aura

$$+ 2^2.3^3.5^2A + 2^4.3.5.11C < 0 ;$$
$$- 2^2.5^2.29 \quad - 2^4.5.29$$

$$+ 2^2.3^2.5.23A + 2^3.3.201C < 0 ;$$
$$- 2.5^2.89 \quad - 2^3.5.89$$

$$+ 2^7.3^3A + 2^5.3.7^2C < 0 ;$$
$$- 2^3.5^2.17 \quad - 2^5.5.17$$

$$+ 2^3.3^2.23A + 2^5.3^4C < 0 ;$$
$$- 2^2.5^2.13 \quad - 2^4.5.13$$

$$+ 2^4.3^3A + 2^8.3C < 0, \quad 2^3A + 2^4C < 0 ;$$
$$- 2^3.5^2 \quad - 2^5.5$$

& $$+ 2^3.3^2.5^2A + 2^6.3.5C > 0,$$
$$- 2^6.5^2 \quad - 2^8.5$$

$$+ 2.3^3.5.7A + 2^4.3.13C > 0,$$
$$- 2^4.3.5^2 \quad - 2^6.5.3$$

$$+ 2^4.3.23A + 2^6.3C > 0 ;$$
$$- 2^4.5^2 \quad - 2^6.5$$

$$+ 2.3^3.7A + 2^3.3C > 0, \quad A > 0 ;$$
$$- 2.5^2 \quad - 2^3.5$$

ou $- 5A + 2^3C < 0$, $- 5.31A + 2^3.79C < 0$;
$7A + 2^3.31C < 0$, $89A + 2^2.97C < 0$,
$29A + 2^2.19C < 0$, $A + 2C < 0$;

& $5A - 2^3C > 0$, $5.23A - 2^3.7C > 0$;
$11A - 2C > 0$, $41A - 2C > 0$, $A > 0$.

A étant un nombre positif, ces quatre conditions-ci $7A + 2^3 \cdot 31C < 0$, $89A + 2^2 \cdot 97C < 0$, $29A + 2^2 \cdot 19C < 0$, $A + 2C < 0$, exigent que C soit un nombre négatif, & les six autres sont en même temps remplies; il ne s'agit donc plus que de trouver pour C un nombre qui satisfasse aux quatre conditions $A + \frac{2^3 \cdot 31}{7} C < 0$, $A + \frac{2^2 \cdot 97}{89} C < 0$, $A + \frac{2^2 \cdot 19}{29} C < 0$, $A + 2C < 0$.

$A + 2C$ est celle de ces conditions où le coëfficient de C est le moindre; par conséquent, en faisant $A + 2C = 0$, les trois autres se trouveront remplies.

Soit $A = 2$, on aura $C = -1$;

donc $B = \frac{-5^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 5}{2 \cdot 3} = \frac{2 \cdot 5(2-5)}{2 \cdot 3} = -5$.

On aura donc pour ce système-ci

$(x+a)(x-c)(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1})$, $2n^3 - 5nq - p^2 < 0$;

& pour celui-ci

$(x+a)(x-b)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})$, $2n^3 - 5nq - p^2 > 0$.

Les deux systèmes $\begin{cases} (x+a)(x-c)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1}) \\ (x+a)(x-b)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1}) \end{cases}$ sont distingués de tous ceux de leur formule par la condition $2^8 \cdot 5^4 n^{12} -$ &c. $= 0$. Il faut les distinguer l'un de l'autre; je trouve $2 \cdot 3n^2 - 5^2 q > 0$ pour le premier, & $2 \cdot 3n^2 - 5^2 q < 0$ pour le second.

1.er Le système $(x+a)(x-b)(x-c)(x-d)$ peut devenir $(x+a)(x-b)(x-b)(x-c)$ en faisant $c = b$; par conséquent, on aura $2^4 n^4 q =$ &c. $\gtrless 0$, $2n^3 + 2^3 \cdot 3^2 nq = 3^3 p^2 < 0$.

Il peut devenir $(x+a)(x-b)(x-c)(x-c)$ en faisant $d=c$; par conséquent, on aura 2^4n^4q — &c. $><0$, $2n^3+2^3.3^2n^2-3^3p^2>0$.

Le système de conditions pour ce système-ci est donc 2^4n^4q — &c. $><0$.

2.me Le système $(x+a)(x-b)(x-c+d\sqrt{-1})(x-c-d\sqrt{-1})$ peut devenir $(x+a)(x-b)(x-c)(x-c)$ en faisant $d=0$; par conséquent, on aura 2^4n^4q — &c. $><0$, $2n^3+2^3.3^2nq-3^3p^2>0$.

Il peut devenir $(x+a)(x-b)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})$ en faisant $c=b$; par conséquent, on aura $2^4.3^4n^4q$ + &c. $><0$, $2.3n^2-5^2q>0$.

Il peut devenir $(x+a)(x-b)(x-c+c\sqrt{-1})(x-c-c\sqrt{-1})$ en faisant $d=c$; par conséquent, on aura $2^2n^4q-2n^3p^2+p^4><0$, $2n^3-5nq-p^2>0$.

Le système de conditions pour ce système de facteurs-ci est donc $2^4.n^4q$ — &c. $><0$, $2^4.3^4n^4q$ + &c. $><0$; $2^2n^4q-2n^3p^2+p^4><0$, $2n^3+2^3.3^2nq-3^3p^2>0$, $2.3n^2-5^2q>0$, $2n^3-5nq-p^2>0$.

3.me Le système $(x+a)(x-b)(x-d+c\sqrt{-1})(x-d-c\sqrt{-1})$ peut devenir $(x+a)(x-b)(x-c+c\sqrt{-1})(x-c-c\sqrt{-1})$ en faisant $d=c$; par conséquent, on aura $2^2n^4q-2n^3p^2+p^4><0$, $2n^3-5nq-p^2>0$.

Il peut devenir $(x+a)(x-b)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$ en faisant $c=b$; par conséquent, on aura $2^8.5^4n^{12}$ — &c. $><0$, $2.3n^2-5^2q<0$.

Le système de conditions pour ce système de facteurs-ci est donc $2^2n^4q-2n^3p+p^4><0$, $2^8.5^4n^{12}$ — &c. $><0$, $2n^3-5nq=p^2>0$, $2.3n^2-5^2q<0$.

4.me

4.me Le système $(x+a)(x-c)(x-b+dV-1)(x-b-dV-1)$ peut devenir $(x+a)(x-b)(x-b)(x-c)$ en faisant $d=0$; par conséquent, on aura 2^4n^4q — &c. $><0$, $2n^3+2^3.3^2nq-3^3p^2<0$.

Il peut devenir $(x+a)(x-b)(x-b+cV-1)(x-b-cV-1)$ en faisant $c=b$; par conséquent, on aura $2^4.3^4n^4q$ + &c. $><0$, $2.3n^2-5^2q>0$.

Il peut devenir $(x+a)(x-c)(x-b+cV-1)(x-b-cV-1)$ en faisant $d=c$; par conséquent, on aura $2^8.5^4n^{12}$ — &c. $><0$, $2.3n^2-5^2q>0$.

Le système de conditions de ce système de facteurs-ci est donc 2^4n^4q — &c. $><0$, $2^4.3^4n^4q$ + &c. $><0$, $2^8.5^4n^{12}$ — &c. $><0$, $2n^3+2^3.3^2nq-3^3p^2<0$, $2.3n^2-5^2q>0$.

5.me Le système $(x+a)(x-c)(x-d+bV-1)(x-d-bV-1)$ peut devenir $(x+a)(x-c)(x-c+bV-1)(x-c-bV-1)$ en faisant $d=c$; par conséquent, on aura $2^4.3^4n^4q$ + &c. $><0$; $2.3n^2-5^2q<0$.

Il peut devenir $(x+a)(x-b)(x-c+bV-1)(x-c-bV-1)$ en faisant $c=b$; par conséquent, on aura $2^8.5^4n^{12}$ — &c. $><0$, $2.3n^2-5^2q<0$.

Le système de conditions pour ce système de facteurs-ci est donc $2^4.3^4n^4q$ + &c. $><0$, $2^8.5^4n^{12}$ — &c. $><0$, $2.3n^2-5^2q<0$.

6.me Le système $(x+a)(x-d)(x-b+cV-1)(x-b-cV-1)$ peut devenir $(x+a)(x-c)(x-b+bV-1)(x-b-bV-1)$ en faisant

$c = b$; par conſéquent, on aura $2^2n^4q - 2n^3p^2 + p^4 >< 0$; $2n^3 - 5nq - p^2 < 0$.

Il peut devenir $(x + a)(x - c)(x - b + c\sqrt{-1})(x - b - c\sqrt{-1})$ en faiſant $d = c$; par conſéquent, on aura $2^8 \cdot 5^4n^{12} - \&c. >< 0$, $2 \cdot 3n^2 - 5^2q > 0$.

Le ſyſtème de conditions pour ce ſyſtème de facteurs-ci eſt donc $2^2n^4q - 2n^3p^2 + p^4 >< 0$, $2n^3 - 5nq - p^2 < 0$, $2 \cdot 3n^2 - 5^2q > 0$.

7.me Le ſyſtème $(x + a)(x - d)(x - c + b\sqrt{-1})(x - c - b\sqrt{-1})$ peut devenir $(x + a)(x - c)(x - c + b\sqrt{-1})(x - c - b\sqrt{-1})$ en faiſant $d = c$; par conſéquent, on aura $2^4 \cdot 3^2n^4q + \&c. >< 0$, $2 \cdot 3n^2 - 5^2q < 0$.

Il peut devenir $(x + a)(x - c)(x - b + b\sqrt{-1})(x - b - b\sqrt{-1})$ en faiſant $c = b$; par conſéquent, on aura $2^2n^4q - 2n^3p^2 + p^4 >< 0$, $2n^3 - 5nq - p^2 < 0$.

Le ſyſtème de conditions pour ce ſyſtème de facteurs-ci eſt donc $2^4 \cdot 3^4n^4q + \&c. >< 0$, $2^2n^4q - 2n^3p^2 + p^4 >< 0$, $2 \cdot 3n^2 - 5^2q < 0$, $2n^3 - 5nq - p^2 < 0$.

VII.

Les conditions des ſyſtèmes de facteurs de la formule $x^4 - nx^2 - px + q$ ſont les mêmes que celles des ſyſtèmes correſpondans de la formule $x^4 - nx^2 + px + q$.

VIII.

Les conditions des ſyſtèmes de facteurs de la formule $x^4 - nx^2 - px - q$ ſont les mêmes que celles des ſyſtèmes correſpondans de la formule $x^4 - nx^2 + px - q$.

IX.

Soit $x^4 + nx^2 + q = (x + a\sqrt{-1})(x - a\sqrt{-1})(x + a\sqrt{-1})(x - a\sqrt{-1})$, on aura $n^2 - 4q = 0$.

Le système $(x + a\sqrt{-1})(x - a\sqrt{-1})(x + b\sqrt{-1})(x - b\sqrt{-1})$ peut devenir $(x + a\sqrt{-1})(x - a\sqrt{-1})(x + a\sqrt{-1})(x - a\sqrt{-1})$ en faisant $b = a$; par conséquent, on aura la fonction $n^2 - 4q >< 0$.

Soit $b = 1$, & $a = 2$, on aura $n = 5$, $q = 2^2$; & en substituant dans la fonction, on aura $5^2 - 2^2.2^2 > 0$; la condition pour ce système-ci est donc $n^2 - 4q > 0$.

Le système $(x + b + a\sqrt{-1})(x + b - a\sqrt{-1})(x - b + a\sqrt{-1})(x - b - a\sqrt{-1})$ peut devenir $(x + a\sqrt{-1})(x - a\sqrt{-1})(x + a\sqrt{-1})(x - a\sqrt{-1})$ en faisant $b = 0$; par conséquent, on aura la fonction $n^2 - 4q >< 0$; & il est évident que c'est moindre que 0 qu'elle est, puisque lorsqu'elle est plus grande que 0, la formule appartient au système précédent; la condition pour ce système-ci est donc $n^2 - 4q < 0$.

X.

La formule $x^4 + nx^2 - q$ appartient toûjours à ce système-ci $(x + b)(x - b)(x + a\sqrt{-1})(x - a\sqrt{-1})$ quels que soient les nombres n & q.

XI.

Soit $x^4 - nx^2 + q = (x + a)(x + a)(x - a)(x - a)$ on aura $n^2 - 4q = 0$.

Le système $(x + a)(x - a)(x + b)(x - b)$ peut devenir $(x + a)(x - a)(x + a)(x - a)$ en faisant $b = a$; par conséquent, on aura $n^2 - 4q >< 0$. Je trouve $n^2 - 4q > 0$.

Le ſyſtème $(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$ peut devenir $(x+a)(x+a)(x-a)(x-a)$ en faiſant $b=0$; par conſéquent, on aura $n^2-4q><0$, & il eſt évident que c'eſt $n^2-4q<0$.

XII.

La formule x^4-nx^2-q appartient toûjours à ce ſyſtème-ci $(x+a)(x-a)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$, quels que ſoient les nombres n & q.

XIII.

Soit $x^4+px+q=(x+b)(x+b)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$, on aura $3^3p^4-2^8q^3=0$.

Soit $x^4+px+q=(x+a)(x+c)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$, on aura $3^3\cdot(13)^3p^4-2^{12}\cdot5^4q^3=0$.

Le ſyſtème $(x+a)(x+d)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$ peut devenir $(x+a)(x+c)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$ en faiſant $a=b$; par conſéquent, on aura $3^3\cdot(13)^3p^4-2^{12}\cdot5^4q^3><0$.

Soit $d=1$, $c=2^3\cdot3$, $b=41$, $a=47$, on aura $p=2^5\cdot3\cdot5\cdot221$, $q=47\cdot2257$, & en ſubſtituant ces valeurs de p & de q dans la fonction, on aura

$3^3\cdot(13)^3\cdot2^{20}\cdot3^4\cdot5^4\cdot(221)^4-2^{12}\cdot5^4\cdot(47)^3\cdot(2257)^3$,

ou $3^3\cdot(13)^3\cdot2^8\cdot3^4\cdot(221)^4-(47)^3\cdot(2257)^3$,

ou $2^2\cdot3\cdot221\,(2^2\cdot3^2\cdot13\cdot221)^3-(47\cdot2257)^3$,

ou $2652\,(103428)^3-(106079)^3$,

ou $(29.103428)^3-(106079)^3>0$; donc la condition pour ce ſyſtème-ci eſt $3^3\cdot(13)^3p^4-2^{12}\cdot5^4q^3>0$.

Le système $(x + b)(x + d)(x - c + a\sqrt{-1})$ $(x - c - a\sqrt{-1})$ peut devenir $(x + b)(x + b)(x - b + a\sqrt{-1})(x - b - a\sqrt{-1})$ en faisant $d = c = b$; par conséquent, on aura $3^3p^4 - 2^8q^3 > < 0$.

Il peut devenir $(x + a)(x + c)(x - b + a\sqrt{-1})$ $(x - b - a\sqrt{-1})$ en faisant $a = b$; par conséquent, on aura $3^3 \cdot (13)^3p^4 - 2^{12} \cdot 5^4q^3 > < 0$. Mais lorsque la fonction $3^3 \cdot (13)^3p^4 - 2^{12} \cdot 5^4q^3$ est > 0, la formule appartient au système précédent; donc pour celui-ci on aura $3^3 \cdot (13)^3p^4 - 2^{12} \cdot 5^4q^3 < 0$; & pour que cette condition-ci ne soit pas vaine, dans le cas précédent on aura $3^3p^4 - 2^8q^3 > 0$; car si $3^3p^4 - 2^8q^3$ étoit < 0, à plus forte raison $3^3 \cdot (13)^3p^4 - 2^{12} \cdot 5^4q^3$ seroit < 0.

Le système $(x - b + a\sqrt{-1})(x - b - a\sqrt{-1})$ $(x + b + c\sqrt{-1})(x + b - c\sqrt{-1})$ peut devenir $(x + b)(x + b)(x - b + a\sqrt{-1})(x - b - a\sqrt{-1})$; par conséquent, on aura $3^3p^4 - 2^8q^3 > < 0$, & il est évident que c'est le signe $<$ qu'il faut prendre; car si $3^3p^4 - 2^8q^3$ étoit > 0, ceci $3^3 \cdot (13)^3p^4 - 2^{12} \cdot 5^4q^3$ étant nécessairement < 0, ce système-ci ne seroit pas distingué du précédent.

XIV.

Soit $x^4 + px - q = (x + a)(x - c)(x - c + b\sqrt{-1})(x - c - b\sqrt{-1})$ on aura $3^3 \cdot 7^3p^4 - 2^8 \cdot 5^4q^3 = 0$.

Le système $(x + a)(x - c)(x - d + b\sqrt{-1})$ $(x - d - b\sqrt{-1})$ peut devenir $(x + a)(x - c)$ $(x - c + b\sqrt{-1})(x - c - b\sqrt{-1})$ en faisant $d = c$; par conséquent on aura $3^3 \cdot 7^3p^4 - 2^8 \cdot 5^4q^3 > < 0$.

Soit $d = 2 \cdot 3$, $c = 11$, $b = 19$, $a = 23$,

on aura $p = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 13$, $q = 11 \cdot 23 \cdot 397$; & en substituant dans la fonction, on aura

$3^3 \cdot 7^3 \cdot 2^{12} \cdot 3^4 \cdot 5^8 \cdot (13)^4 - 2^8 \cdot 5^4 \cdot (11)^3 \cdot (23)^3 \cdot (397)^3$,

ou $2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot (13)^4 - (11 \cdot 23 \cdot 397)^3$,

ou $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 (2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13)^3 - (100441)^3$,

ou $390 (8190)^3 - (100441)^3$,

ou $(8 \cdot 8190)^3 - (100441)^3 < 0$; donc la condition pour ce système-ci est $3^3 \cdot 7^3 p^4 - 2^8 \cdot 5^4 q^3 < 0$.

Le système $(x + a)(x - d)(x - c + b\sqrt{-1})(x - c - b\sqrt{-1})$ peut devenir $(x + a)(x - c)(x - c + b\sqrt{-1})(x - c - b\sqrt{-1})$ en faisant $d = c$; par conséquent, on aura $3^3 \cdot 7^3 p^4 - 2^8 \cdot 5^4 q^3 >< 0$; & il est évident que c'est > 0 qu'il faut prendre, pour que ce système-ci soit distingué du précédent; on aura donc $3^3 \cdot 7^3 p^4 - 2^8 \cdot 5^4 q^3 > 0$.

XV.

Les conditions pour les systèmes de la formule $x^4 - px + q$ sont les mêmes que celles des systèmes correspondans de la formule $x^4 + px + q$.

XVI.

Les conditions pour les systèmes de la formule $x^4 - px - q$ sont les mêmes que celles des systèmes correspondans de la formule $x^4 + px - q$.

XVII.

La formule $x^4 + q$ appartient au système $(x + a + a\sqrt{-1})(x + a - a\sqrt{-1})(x - a + a\sqrt{-1})(x - a - a\sqrt{-1})$, & la formule $x^4 - q$ appartient au système $(x + a)(x - a)(x + a\sqrt{-1})(x - a\sqrt{-1})$.

CONCLUSION.

Lorſque l'on aura une équation à réſoudre, l'on cherchera dans la Table la formule de cette équation; l'on trouvera à côté de cette formule tous les ſyſtèmes de facteurs qui peuvent la produire, & vis-à-vis chaque ſyſtème de facteurs, le ſyſtème de conditions qui lui convient; les coëfficiens de l'équation donnée ſatisferont toûjours à l'un de ces ſyſtèmes de conditions, & ne ſatisferont jamais qu'à un ſeul; l'on aura donc pour cette équation le ſeul ſyſtème de facteurs qui puiſſe la produire; il ne s'agira plus que de déterminer les nombres a, b, c, d, e, &c. de ce ſyſtème; ce qui s'exécutera par la méthode ſuivante.

Étant données deux équations entre deux nombres réels poſitifs m *&* n, *& ſachant que* m *eſt plus grand que* n; *trouver ces deux nombres.*

Je fais $m = \alpha R$, $n = \zeta R$, & je ſubſtitue ces valeurs dans les deux équations entre m & n; j'en aurai deux autres entre α, ζ & R, d'où chaſſant R, j'aurai une équation entre α & ζ. Je mets dans cette équation $x\varphi + y$ au lieu de α, & $z\varphi + u$ au lieu de ζ; j'aurai $c1\varphi^{\varepsilon} + c2\varphi^{\varepsilon-1} + c3\varphi^{\varepsilon-2} + c4\varphi^{\varepsilon-3} + c5\varphi^{\varepsilon-4} + c6\varphi^{\varepsilon-5} +$ &c. $= 0$, (ε déſignant un nombre entier poſitif, & $c1$, $c2$, $c3$, $c4$, $c5$, &c. déſignant des fonctions de x, y, z, u.)

Pour faciliter extrêmement ces ſubſtitutions, il faudra avoir une Table des puiſſances de $x\varphi + y$ & de $z\varphi + u$, & de leurs produits; au moyen de quoi, on n'aura à chaque fois qu'une ſimple addition à faire.

PREMIÈRE OPÉRATION.

$x = 1$, $y = 0$, $z = 0$, $u = 1$; l'on aura une équation où il n'y aura que φ d'inconnue, dont je suppose tous les termes d'un côté & o de l'autre, & le coëfficient de la plus haute puissance de φ positif.

Soit A un nombre entier positif, tel que si je fais $\varphi = A$, le premier membre de cette équation soit < 0, & que si je fais $\varphi = A + 1$, ou $= A + 2$, ou $= A + 3$, ou $= A + 4$, &c. à l'infini, il soit > 0, je dis qu'il faudra faire $\varphi = A$.

On aura $\alpha = A$, $\zeta = 1$; donc $m = AR$, $n = R$. Je laisse R au lieu de sa valeur, qu'on aura en mettant dans l'expression de R pour α & ζ les valeurs qui sont ici.

SECONDE OPÉRATION.

$x = A$, $y = 1$, $z = 1$, $u = 0$; l'on aura une nouvelle équation où il n'y aura que φ d'inconnue, & l'on trouvera pour φ le nombre entier positif B, comme on a trouvé A dans l'opération précédente.

Donc $\alpha = AB + 1$, $\zeta = B$; donc $m = (AB + 1)R$, $n = BR$. Je laisse toûjours R au lieu de sa valeur, qu'on aura en mettant dans l'expression de R pour α & ζ les valeurs qui sont ici.

Continuez de la même manière autant que vous voudrez, & faites à chaque fois $x =$ le dernier α, $y =$ l'avant-dernier, $z =$ le dernier ζ, $u =$ l'avant-dernier.

Suivant cette règle, vous aurez

TROISIÈME OPÉRATION.

$x = AB + 1$, $y = A$, $z = B$, $u = 1$; d'où résultera

réſultera une troiſième équation où il n'y aura que φ d'inconnue, & vous trouverez pour φ le nombre entier poſitif C, comme vous avez trouvé A & B.

Donc $\alpha = (AB + 1)C + A$, $\mathcal{C} = BC + 1$; donc $m = [(AB + 1)C + A]R$, $n = (BC + 1)R$.

Au reſte, ſi les nombres m & n ont une meſure commune, on les déterminera exactement par cette méthode, & s'ils n'ont pas de commune meſure, on approchera toûjours de plus en plus de leurs valeurs; par conſéquent, ſi deux quelconques des nombres a, b, c, d, e, &c. ſont commenſurables entr'eux, on aura la réſolution parfaite de l'équation propoſée; & s'ils ſont incommenſurables, pris deux à deux de toutes les manières poſſibles, on en aura la réſolution auſſi approchée qu'on voudra.

Voilà tout ce qu'on pouvoit deſirer ſur les équations; mais l'affaire eſt d'exécuter les Tables que nous propoſons: il faudroit pour cela que l'on prît ceci à cœur, comme on a pris autrefois les logarithmes.

EXEMPLE I.

Trouver les deux facteurs de $x^2 - 7x + 5$; au moyen de la Table, l'on trouvera $x^2 - 7x + 5 = (x - a)(x - b)$; donc $a + b = 7$, $ab = 5$.

Je fais $a = \alpha R$, $b = \mathcal{C}R$; j'aurai $(\alpha + \mathcal{C})R = 7$, $\alpha\mathcal{C}R^2 = 5$; donc $R = \frac{7}{\alpha + \mathcal{C}}$, $R = \frac{5}{\alpha\mathcal{C}R}$; donc $7\alpha\mathcal{C}R = 5\alpha + 5\mathcal{C}$; donc $R = \frac{5\alpha + 5\mathcal{C}}{7\alpha\mathcal{C}}$; donc $\frac{7}{\alpha + \mathcal{C}} = \frac{5\alpha + 5\mathcal{C}}{7\alpha\mathcal{C}}$; donc $5\alpha^2 - 39\alpha\mathcal{C} + 5\mathcal{C}^2 = 0$.

Je fais $\alpha = x\varphi + y$, $\mathcal{C} = z\varphi + u$; & en

substituant, j'aurai $(5x^2 - 39xz + 5z^2)\varphi^2 +$
$(10xy - 39yz - 39xu + 10zu)\varphi +$
$(5y^2 - 39yu + 5u^2) = 0.$

PREMIÈRE OPÉRATION.

$x = 1$, $y = 0$, $z = 0$, $u = 1$; on aura $5\varphi^2 - 39\varphi + 1 = 0$ & l'on trouvera qu'il faut faire $\varphi = 7$. Donc $\alpha = 7$, $\zeta = 1$.

SECONDE OPÉRATION.

$x = 7$, $y = 1$, $z = 1$, $u = 0$; on aura $23\varphi^2 - 31\varphi - 5 = 0$, & l'on trouvera qu'il faut faire $\varphi = 1$. Donc $\alpha = 8$, $\zeta = 1$.

TROISIÈME OPÉRATION.

$x = 8$, $y = 7$, $z = 1$, $u = 1$; on aura $13\varphi^2 - 15\varphi - 23 = 0$, & l'on trouvera qu'il faut faire $\varphi = 2$. Donc $\alpha = 23$, $\zeta = 3$.

QUATRIÈME OPÉRATION.

$x = 23$, $y = 8$, $z = 3$, $u = 1$; on aura $\varphi^2 - 37\varphi - 13 = 0$, & l'on trouvera qu'il faut faire $\varphi = 37$. Donc $\alpha = 859$, $\zeta = 112$.

CINQUIÈME OPÉRATION.

$x = 859$, $y = 23$, $z = 112$, $u = 3$; on aura $13\varphi^2 - 37\varphi - 1 = 0$, & l'on trouvera qu'il faut faire $\varphi = 2$. Donc $\alpha = 1741$, $\zeta = 227$.

SIXIÈME OPÉRATION.

$x = 1741$, $y = 859$, $z = 227$, $u = 112$; on aura $18\varphi^2 - 15\varphi - 13 = 0$, & l'on trouvera qu'il faut faire $\varphi = 1$. Donc $\alpha = 2600$, $\zeta = 339$, &c.

EXEMPLE II.

Trouver les trois facteurs de $x^3 + x^2 + 3x + 5$; par le moyen de la Table, on aura $x^3 + x^2 + 3x + 5 = x + b)(x - c + a\sqrt{-1})(x - c - a\sqrt{-1})$; donc $b - 2c = 1$, $a^2 - 2bc + c^2 = 3$, $b.(a^2 + c^2) = 5$; l'on peut chasser de ces trois équations a, ou b, ou c, & avoir deux équations entre b & c, ou entre a & c, ou entre a & b. Je chasse, par exemple, a; j'aurai $b - 2c = 1$, $3b + 2b^2c = 5$.

Je fais $b = \alpha R$, $c = \mathcal{C}R$; j'aurai $(\alpha - 2\mathcal{C})R = 1$, $3\alpha R + 2\alpha^2\mathcal{C}R^3 = 5$; donc $R = \frac{1}{\alpha - 2\mathcal{C}}$, $R = \frac{5}{3\alpha + 2\alpha^2\mathcal{C}R^2}$; donc $3\alpha + 2\alpha^2\mathcal{C}R^2 = 5\alpha - 10\mathcal{C}$; donc $R = \frac{\alpha - 5\mathcal{C}}{\alpha^2\mathcal{C}R}$, donc $\frac{1}{\alpha - 2\mathcal{C}} = \frac{\alpha - 5\mathcal{C}}{\alpha^2\mathcal{C}R}$; donc $R = \frac{\alpha^2 - 7\alpha\mathcal{C} + 10\mathcal{C}^2}{\alpha^2\mathcal{C}}$; donc $\frac{\alpha^2 - 7\alpha\mathcal{C} + 10\mathcal{C}^2}{\alpha^2\mathcal{C}} = \frac{1}{\alpha - 2\mathcal{C}}$; donc enfin $\alpha^3 - 10\alpha^2\mathcal{C} + 24\alpha\mathcal{C}^2 - 20\mathcal{C}^3 = 0$.

Je fais $\alpha = x\varphi + y$, $\mathcal{C} = z\varphi + u$; & en substituant, j'aurai $(x^3 - 10x^2z + 24xz^2 - 20z^3)\varphi^3 + (3x^2y - 20xyz - 10x^2u + 48xzu + 24yz^2 - 60z^2u)\varphi^2 + (3xy^2 - 10y^2z - 20xyu + 24xu^2 + 48yzu - 60zu^2)\varphi + (y^3 - 10y^2u + 24yu^2 - 20u^3) = 0$.

PREMIÈRE OPÉRATION.

$x = 1$, $y = 0$, $z = 0$, $u = 1$; on aura $\varphi^3 - 10\varphi^2 + 24\varphi - 20 = 0$, & l'on trouvera qu'il faut faire $\varphi = 6$. Donc $\alpha = 6$, $\mathcal{C} = 1$.

SECONDE OPÉRATION.

$x = 6$, $y = 1$, $z = 1$, $u = 0$; on aura $20\varphi^3 - 12\varphi^2 - 8\varphi - 1 = 0$, & l'on trouvera qu'il faut faire $\varphi = 1$ Donc $\alpha = 7$, $\zeta = 1$.

TROISIÈME OPÉRATION.

$x = 7$, $y = 6$, $z = 1$, $u = 1$; on aura $\varphi^3 - 12\varphi^2 - 48\varphi - 20 = 0$, & l'on trouvera qu'il faut faire $\varphi = 15$. Donc $\alpha = 111$, $\zeta = 16$.

QUATRIÈME OPÉRATION.

$x = 111$, $y = 7$, $z = 16$, $u = 1$; on aura &c.

FIN.

ACCADEMIA
R. DELLE SCIENZE
DI TORINO